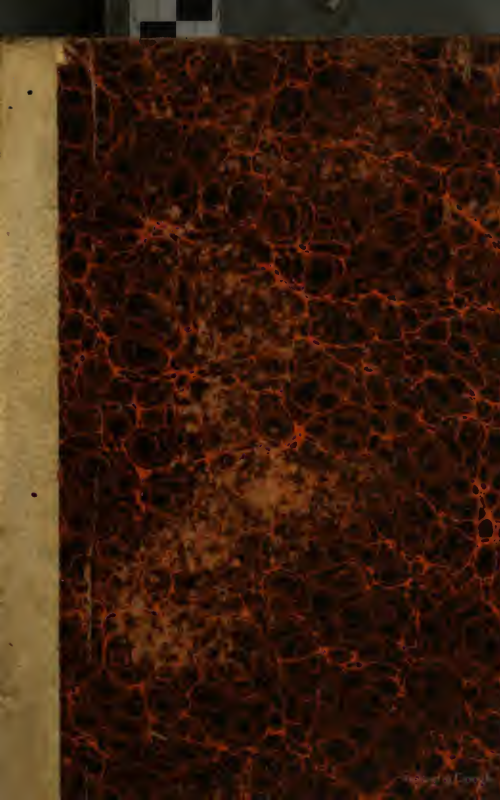


Die Abnehmer dieses Werkes erhalten ein Verzeichniss der Druckfehler binnen Kurzem nachgeliefert.



SIR ISAAC NEWTON'S

MATHEMATISCHE PRINCIPIEN

DER

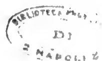
NATURLEHRE.

MIT BEMERKUNGEN UND ERLÄUTERUNGEN

HERAUSGEGEBEN

VON

PROF. DR. J. PH. WOLFERS.



BERLIN,
VERLAG VON ROBERT OPPENHEIM.
1872.

Vorwort des Herausgebers.

Es sind nahezu zwei Jahrhunderte verflossen, seitdem das Werk Newton's zum ersten Male erschienen ist. Die Wahrheit der in demselben enthaltenen Lehren hat sich in diesem langen Zeitraume desto deutlicher und vollständiger gezeigt, je mehr es seinen Nachfolgern gelungen ist, sie der Mechanik des Himmels anzupassen. Bereits vor länger als 20 Jahren war der Herausgeber des vorliegenden Werkes in den Besitz der ersten Ausgabe des Originals gelangt. Um dasselbe kennen zu lernen, hat er es nicht nur mit der Feder in der Hand studirt, sondern er schrieb zugleich den gesammten Text in deutscher Sprache nieder und fügte zugleich Bemerkungen und Erläuterungen gesondert hinzu, welche ihm zum Verständniss dienen sollten. Später verglich er die so erhaltene Uebersetzung mit den späteren Ausgaben des Originals und berichtigte oder ergänzte dieselbe nach den letzteren.

Auf diese Weise ist das vorliegende Werk entstanden, und ohne dass der Herausgeber an eine Veröffentlichung desselben dachte, blieb es über zwei Jahrzehnte liegen, während welcher es ihm und einigen mathematischen Freunden zum Nachschlagen gedient hat. Jetzt bot sich ihm die Gelegenheit zur Veröffentlichung des Werkes, und er nahm keinen Anstand, es hierzu herzugeben. Die von Newton begründete und aufgestellte Lehre der allgemeinen Anziehung hat nicht allein einfache Gesetze für die Bewegung der Wandelsterne im Weltraume geliefert, sondern es stellt sich fortwährend eine grössere Uebereinstimmung zwischen der Theorie und Beobachtung heraus, je mehr es den Geometern gelingt, die erstere auf Newton's Grundlage auszubilden und anwendbar zu machen.

Während Newton sich in dem Weltsystem darauf beschränkt hat, die Anwendung seiner Principien auf die Bestimmung der Bahnen der Planeten, Trabanten und einiger Kometen zu zeigen; hat man in der neueren Zeit erfahren, dass dasselbe Gesetz der Anziehung sich eben so bei der Bestimmung der Bahnen der Doppelsterne anwenden lässt. Das aus den Erscheinungen in unserem Sonnensystem abgeleitete Gesetz der allgemeinen Anziehung hat sich hiernach auch in Abständen als gültig erwiesen, von deren Grösse man sich kaum Vorstellung machen kann. Wir erinnern hier an den Begleiter des Sirius, dessen Vorhandensein Bessel im Voraus als wahrscheinlich verkündet hatte nach Unregelmässigkeiten, welche sich in der eigenen Bewegung dieses Fixsternes gezeigt hatten. Dieser Begleiter ist später entdeckt und seine Bahn berechnet worden.

Während vor Newton der Begriff der Masse eines Himmelskörpers eigentlich nicht vorhanden war, ist es seitdem gelungen, die Massen der Planeten sehr nahe zu bestimmen, in so weit sich dieselben überhaupt als wirksam zeigen. Die Berechnung der Störungen, welche die Wandelsterne auf einander ausüben, würde aber schwerlich durchzuführen sein, wenn nicht glücklicherweise die Massen der bei Weitem zahlreichsten Planeten und Kometen so unbedeutend wären, dass man sie mit vollem Rechte ausser Acht lassen kann.

Bis vor einem Vierteljahrhundert war nur die Aufgabe vorgekommen, die Störungen zu berechnen, welche ein Wandelstern ausüben konnte, dessen Ort und Masse mehr oder weniger nahe bekannt war. Um diese Zeit unternahmen es hingegen zwei Männer, Leverrier und Adams, aus den Störungen, welche sich im Laufe des Uranus durch Beobachtungen gezeigt hatten, umgekehrt den Ort eines noch unbekannten Planeten herzuleiten, welcher im Stande sei, durch seine Anziehung diese Störungen hervorzubringen. Dass es jedem der zwei genannten Männer gelang, den Ort des Neptuns so genau anzugeben, dass es nur einer Nachsuchung an der betreffenden Stelle bedurfte, um den bis dahin unbekannten Planeten aufzufinden, ist allgemein bekannt. Dieses Ereigniss, die Frucht der von Newton aufgestellten Lehre der allgemeinen Anziehung, wird als ein grosses

Denkmal des Letzteren dienen, so lange die Astronomie in ihrer Blüthe verharret.

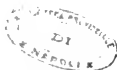
Ueber die Einrichtung dieser Uebersetzung, im Vergleich mit dem Original, bedarf es nur weniger Worte. Sie stimmt im Wesentlichen mit dieser überein, nur hat sich der Herausgeber erlaubt, die einzelnen Sätze mit fortlaufenden Paragraphen zu versehen; hauptsächlich um die einzelnen Sätze auf einfachere Weise anführen zu können. Die ziemlich zahlreichen Bemerkungen sind nicht unter dem Texte aufgeführt worden, weil hierdurch die Aufmerksamkeit des Lesers getheilt und geschwächt wird. Sie folgen hinter dem Texte, und in diesem ist durch eine einfache Zahl angedeutet, dass und wo man eine hinzugefügte Bemerkung zu finden habe. Der Herausgeber wünscht nur, dass diese die Erwartung den Leser nicht zu sehr täuschen möge. Er selbst hat sie, wie bereits oben bemerkt, dargestellt, um sich die betreffenden Stellen des Textes klar zu machen, und muss abwarten, wie dieselben künftig von Anderen beurtheilt werden dürften.

Bei der Correctur und Revision des Werkes haben einige Missverständnisse obgewaltet, welche mehr Druckfehler übrig gelassen haben, als wünschenswerth ist. Gegen das Ende des Druckes wurde der Herausgeber durch ein Augenleiden verhindert, die Revision des Werkes zu Ende zu bringen. Glücklicherweise fand sein Freund, Herr Dr. Tietjen, sich bereit, statt seiner hier einzutreten. Für diese Bereitwilligkeit fühlt er sich gedrungen, demselben hier seinen innigen tiefgefühlten Dank abzustatten.

Berlin, im Juli 1871.

Der Herausgeber.

Inhalts-Verzeichniss.



Vorwort an den Leser.

Die Alten hielten (nach Pappus' Angabe) die Mechanik für sehr wichtig bei der Erforschung der Natur, und die Neuern haben, nachdem sie die Lehre von den substantiellen Formen und den verborgenen Eigenschaften aufgegeben, angefangen die Erscheinungen der Natur auf mathematische Gesetze zurückzuführen. Es erschien daher zweckmässig, im vorliegenden Werke die Mathematik so weit auszuführen, als sie sich auf die Physik bezieht.

Die Alten stellten die Mechanik auf zweifache Weise dar, als rationale, welche durch Beweisführung mit Genauigkeit vorwärtsschreitet und als practische. Zur letztern gehören alle Handfertigkeiten, von denen auch der Name Mechanik abgeleitet ist. Da aber die Künstler nicht sehr genau zu Werke zu gehen pflegen, so unterscheidet man dermaassen zwischen der Mechanik und der Geometrie, dass man alles Genaue zur letztern, alles weniger Genaue zur erstern zählt. Die begangenen Fehler darf man jedoch nicht der Kunst, sondern den Künstlern zuschreiben. Wer nämlich weniger genau zu Werke geht, ist ein unvollkommener Mechaniker; derjenige hingegen, welcher auf's genaueste arbeiten könnte, würde der vollkommenste aller Mechaniker sein.

Die Darstellung von geraden Linien und Kreisen, welche der Geometrie als Grundlage dienen, gehört auch der Mechanik an. Die Geometrie lehrt nämlich nicht, wie man solche Linien beschreibt, sie setzt dies als bekannt voraus. Sie verlangt dass der Anfänger vorher gelernt habe, dieselben genau darzustellen, bevor er die Schwelle der Geometrie betritt. Sie lehrt hierauf, wie man durch diese Operationen Aufgaben lösen kann. Gerade Linien und Kreise beschreiben, sind Aufgaben, nicht der Geometrie sondern der Mechanik; erstere lehrt die Anwendung derselben und es gereicht ihr zum Ruhme, dass sie mit so wenigen, von anderswo hergenommenen Principien so viel leistet. Die Geometrie hat demnach ihre Basis in der praktischen Mechanik, und sie ist derjenige Theil der allgemeinen Mechanik, welcher die Kunst, genau zu messen, aufstellt und beweist.

Da aber die Handfertigkeiten hauptsächlich bei der Bewegung der Körper in Anwendung kommen, so bezieht man gewöhnlich die Geometrie auf die Grössen, die Mechanik auf die Bewegung. In

diesem Sinne ist die **rationale Mechanik** die genau dargestellte und erwiesene Wissenschaft, welche von den aus gewissen Kräften hervorgehenden Bewegungen und umgekehrt den, zu gewissen Bewegungen erforderlichen Kräften handelt. Diesen Theil hatten die Alten in den **fünf Kräften**, welche sich auf Handfertigkeiten beziehen, ausgebildet. Sie betrachteten dabei die **Schwere** (da sie keine Kraft der Hand ist) kaum weiter, als bei den Gewichten, welche durch jene Kräfte bewegt werden sollen. Wir aber, die wir nicht die Kunst, sondern die wir die Wissenschaft zu Rathe ziehen, und die wir nicht über die Kräfte der Hand, sondern die der Natur schreiben, betrachten hauptsächlich diejenigen Umstände, welche sich auf Schwere und Leichtigkeit, auf die Kraft der Elasticität und den Widerstand der Flüssigkeiten und auf andere derartige anziehende oder bewegende Kräfte beziehen, und stellen daher unsere Betrachtungen als **Mathematische Principien der Naturlehre** auf.

Alle Schwierigkeit der Physik besteht nämlich dem Anschein nach darin, aus den Erscheinungen der Bewegung die Kräfte der Natur zu erforschen und hierauf durch diese Kräfte die übrigen Erscheinungen zu erklären. Hierzu dienen die allgemeinen Sätze, welche im ersten und zweiten Buche behandelt werden. Im dritten Buche haben wir, zur Anwendung derselben, das Weltsystem erklärt. Dort wird nämlich aus den Erscheinungen am Himmel, vermittelst der in den ersten Büchern mathematisch bewiesenen Sätze, die **Kraft der Schwere** abgeleitet, vermöge welcher die Körper sich bestreben, der Sonne und den einzelnen Planeten sich zu nähern. Aus derselben Kraft werden dann, gleichfalls vermittelst mathematischer Sätze, die Bewegungen der Planeten, Cometen, des Mondes und des Meeres abgeleitet.

Möchte es gestattet sein, die übrigen Erscheinungen der Natur auf dieselbe Weise aus mathematischen Principien abzuleiten! Viele Beweggründe bringen mich zu der Vermuthung, dass diese Erscheinungen alle von gewissen Kräften abhängen können. Durch diese werden die Theilchen der Körper nämlich, aus noch nicht bekannten Ursachen, entweder gegen einander getrieben und hängen alsdann als reguläre Körper zusammen, oder sie weichen von einander zurück und fliehen sich gegenseitig. Bis jetzt haben die Physiker es vergebens versucht, die Natur durch diese unbekannten Kräfte zu erklären; ich hoffe jedoch, dass die hier aufgestellten Principien entweder über diese, oder irgend eine richtigere Verfahrungsweise Licht verbreiten werden.

Bei der Herausgabe dieses Werkes hat **Edmund Halley**, dieser höchst scharfsinnige und vielseitig gelehrte Mann, vielfache Mühe verwandt. Er hat nicht nur die Correctur und die Holzschnitte besorgt, sondern war überhaupt auch derjenige, welcher mich zur Abfassung dieses Werkes veranlasst hat. Da er nämlich von mir einen Beweis der Gestalt, welche die Bahnen der Himmelskörper haben, verlangt hatte; so bat er mich, ich möchte denselben der **Königlichen Gesellschaft**

mittheilen. Diese bewirkte hierauf durch ihre Aufforderuug und Oberleitnng, dass ich anfing, an die Herausgabe des Werkes zu denken. Nachdem ich aber mit den Uugleichheiten der Mondbewegung den Anfang gemacht hatte, beschäftigte ich mich mit den Gesetzen und dem Maasse der Schwere nnd anderer Kräfte, mit den Bahnen, welche Körper beschreiben, die nach beliebigen gegebenen Gesetzen angezogen werden, ferner mit der Bewegung mehrerer Körper unter sich, mit der Bewegung der Körper in widerstehenden Mitteln, den Kräften, der Dichtigkeit nnd Bewegung dieser Mittel, endlich mit den Cometenbahnen nnd ähnlichen Untersnchnngen. Ich glaubte aber, die Herausgabe einige Zeit verschieben zu müssen, um das Uebrige ausfeilen und mit der ersten Untersuchnng vereint veröffentlichen zu können. Dasjenige, was sich auf die Bewegung des Mondes bezieht (nnd freilich nnvollkommen ist) habe ich in den Zusätzen des §. 107. zusammengefasst, damit ich nicht gehalten wäre, einzelne weitläufiger auseinander zu setzen, als der Sache werth ist und dasselbe gesondert zu beweisen, wodnrch die Reihefolge der übrigen Sätze eine Unterbrechung erlitten haben würde. Einzelnes, was ich noch spät auffand, wollte ich lieber an nicht ganz passenden Stellen einfügen, als die Zahl der Sätze nnd der Citate ändern.

Möge alles mit Eifer gelesen werden, Mängel in einer so schwierigen Materie den Leser weniger zum Tadel, als zu nenen Versuchen nnd gefälliger Ergänzung veranlassen! Hiernm bitte ich denselben recht dringend.

Cambridge, den 8. Mai 1686. Is. Newton.

Vorrede des Verfassers zur zweiten Ausgabe.

In dieser zweiten Ausgabe der Principien ist vieles hin und wieder verbessert, und manches hinzngefügt worden. Im Abschnitt II. des ersten Buches habe ich die Bestimmung der Kräfte, vermöge deren sich Körper in gegebenen Bahnen bewegen können, leichter und ausgedehnter dargestellt. Im Abschnitt VII. des zweiten Buches habe ich die Theorie des Widerstandes der Flüssigkeiten genauer erforscht und durch neue Versnche bestätigt. Im dritten Buche wird die Theorie des Mondes nnd die Praecession der Aequinoctien aus ihren Principien vollständiger abgeleitet nnd die Theorie der Cometen durch mehrere und genauer berechnete Beispiele vou Bahnen bestätigt.

London, den 28. März 1713. Is. Newton.

Vorrede zur zweiten Ausgabe von Cotes.

Die lang ersehnte neue Ausgabe von Newton's Naturlehre überreichen wir dem wohlwollenden Leser, vielfach verbessert und vermehrt. Den hauptsächlichsten Inhalt dieses berühmten Werkes kann man aus dem beigefügten Inhalts-Verzeichniss ersehen; das, was hinzugefügt oder verändert worden ist, erfährt man durch die vorstehende Vorrede des Verfassers. Es ist noch übrig, dass wir über die Methode dieses Werkes etwas hinzufügen.

Diejenigen, welche sich mit der Bearbeitung der Physik beschäftigt haben, kann man etwa in drei Klassen theilen. Einige schrieben nämlich einzelnen Arten von Dingen specifische und verborgene Eigenschaften zu, von denen alsdann die Operationen der einzelnen Körper, aus einer gewissen unbekannten Ursache abhängen sollten. Hierin besteht das Wesentliche der scholastischen Philosophie, welche von Aristoteles und den Peripatetikern herrührt. Sie behaupten, dass die einzelnen Wirkungen aus der Natur der Körper entspringen; woher aber diese Natur rühre, lehren sie nicht; sie lehren daher nichts. Da sie sich durchaus bei dem Namen der Dinge nicht bei den Dingen selbst aufhalten, kann man sagen, dass sie eine gewisse philosophische Sprachweise erfunden, nicht aber, dass sie Philosophie gelehrt haben.

Andere hegten daher die Hoffnung, das Lob eines bessern Eifers einzuernten, nachdem sie den unnützen Mischmasch von Worten weggeworfen hatten. Sie behaupteten demnach, die allgemeine Materie sei homogen, und alle den begrenzten Körpern eigenthümliche verschiedene Formation entspringe aus gewissen höchst einfachen und leicht zu erkennenden Beziehungen der sie zusammensetzenden Theilchen. In der That stellen sie so zwar ein Fortschreiten vom Einfachen zum Zusammengesetzten dar, wenn sie jene ursprünglichen Beziehungen der Theilchen so annehmen, wie die Natur sie zeigt. Allein da sie sich erlauben, eine beliebige unbekannte Gestalt und Grösse der Theile, und eine unbestimmte Lage und Bewegung derselben anzunehmen; da sie selbst gewisse verborgene Flüssigkeiten erdenken, welche die Poren der Körper frei durchwandern, eine sehr bedeutende Freiheit besitzen und durch verborgene Bewegungen angetrieben werden: so versinken sie in Träumereien, indem sie die wahre Einrichtung der Dinge vernachlässigen, welche man vergebens durch falsche Vermuthungen abzuleiten suchen wird, da man sie kaum, selbst durch die sichersten Beobachtungen erforschen kann. Diejenigen, welche ihre Speculationen auf Hypothesen begründen, werden, wenn sie hierauf auch auf's strengste nach mechanischen Gesetzen fortschreiten, eine Fabel, vielleicht eine elegante und schöne, jedoch nur eine Fabel aufbauen.

Es bleibt noch eine dritte Art von Naturforschern übrig, welche

sich zur Experimental-Physik bekennt. Diese wollen zwar aus den möglich einfachsten Principien die Ursachen aller Dinge ableiten, allein als Princip nehmen sie etwas an, was noch nicht durch dio Erscheinungen sich gezeigt hat. Hypothesen werden ersonnen, jedoch nehmen sie sie nur als Fragen, über deren Wahrheit geurtheilt werden soll, in die Physik auf. Sie verfahren daher nach einer zweifachen Methode, der analytischen und synthetischen. Die Kräfte der Natur und ihre einfachen Gesetze leiten sie aus einigen ausgewählten Erscheinungen, mittelst der Analysis ab, und legen die erstern, mittelst der Synthesis, als Beschaffenheit der übrigen Erscheinungen dar. Diese Erforschungsart ist jene bei weitem beste, welche vor den übrigen anzuwenden unser berühmter Verfasser für würdig und verdienstlich hielt. Dieser allein legte er hinreichenden Werth bei, um ihrer Ausbildung und Ausschmückung seine Bemühungen zu widmen. Er stellte als berühmtes Beispiel derselben die, mit Glück aus dem Gesetz der Schwere abgeleitete, Erklärung des Weltsystems auf. Dass die Kraft der Schwere allen Körpern innewohne, hatten die Einen vermuthet, die Andern gedacht; er aber, als der Erste und Einzige vermochte es, ihr Dasein mittelst der Erscheinungen zu erweisen und ihr durch ausgezeichnete Speculationen eine feste Grundlage aufzubauen.

Ich weiss wohl, dass auch einige Männer von bedeutendem Namen, durch gewisse Vorurtheile mehr als billig befangen, diesem neuen Principe ungern beigestimmt und selbst Unerwiesenes dem Erwiesenen vorgezogen haben. Den Ruf dieser Männer anzugreifen, liegt mir nicht im Sinne, ich will vielmehr Dir, wohlwollender Leser, mit wenigen Worten dasjenige auseinander setzen, woraus Du Dir selbst ein nicht ungünstiges Urtheil ableiten könnest.

Um nun unsern Beweis beim Einfachsten und Nächsten zu beginnen, wollen wir einmal kurz untersuchen, welches die Natur der Schwere auf der Erde ist; damit wir später sicherer fortschreiten können, wenn wir zu den weit von uns entfernten Himmelskörpern kommen. Alle Gelehrten sind jetzt darüber einig, dass alle Körper gegen die Erde gravitiren; dass es keine wirklich leichte Körper gebe, hat vielfache Erfahrung längst bestätigt. Was beziehungsweise leicht heisst, ist es nicht wirklich sondern nur scheinbar, es folgt dies aus der überwiegenden Schwere der angrenzenden Körper.

Wie alle Körper gegen die Erde schwer sind, so ist es umgekehrt auch die Erde gegen die Körper; dass nämlich die Wirkung der Schwere wechselseitig und gleich sei, lässt sich folgendermaassen zeigen. Denkt man sich die ganze Last der Erde in zwei Theile unterschieden, welche entweder einander gleich oder beliebig ungleich sind. Wenn nun die Gewichte der Theile nicht wechselseitig einander gleich wären, so würde das kleinere dem grösseren nachgeben und die verbundenen Theile sich ins Unendliche fort nach der Richtung gradlinig bewegen, nach welcher das grössere Gewicht hinstrebt. Dies ist der Erfahrung zuwider. Man

muss daher annehmen, dass die Gewichte der Theile sich im Gleichgewicht befinden, d. h. dass die Wirkung der Schwere wechselseitig und gleich sei.

Die Gewichte gleich weit vom Mittelpuncte der Erde entfernter Körper sind den, in ihnen enthaltenen, Mengen der Materie proportional. Man schliesst dies aus der gleichen Beschleunigung aller Körper, welche vom Zustande der Ruhe ab, vermöge der Kräfte ihrer Gewichte, fallen; denn die Kräfte, durch welche ungleiche Körper gleich beschleunigt werden, müssen der Menge der zu bewegenden Materie proportional sein. Dass aber alle fallenden Körper gleich stark beschleunigt werden, erhellt daraus, dass sie im Boyle'schen Vacuum in gleichen Zeiten durch gleiche Räume fallen, indem hier nämlich der Widerstand der Luft aufgehoben ist. Genauer wird dies durch Pendelversuche bewiesen.

Die anziehenden Kräfte der Körper verhalten sich in gleichen Abständen, wie die Menge der in denselben befindlichen Materie. Da nämlich die Körper gegen die Erde, und umgekehrt diese gegen jene gleich schwer ist, so wird das Gewicht der Erde gegen jeden Körper oder die Kraft, womit der Körper die Erde anzieht, dem Gewicht desselben Körpers gegen die Erde gleich sein. Dieses Gewicht wird aber der Menge der Materie im Körper proportional sein, daher wird auch die Kraft, womit jeder Körper die Erde anzieht, d. h. seine absolute Kraft derselben Menge der Materie proportional sein.

Die anziehende Kraft der ganzen Körper entspringt demnach und wird zusammengesetzt aus den anziehenden Kräften der Theile, indem bei vermehrter oder verminderter Last der Materie, wie gezeigt worden ist, die Kraft proportional vermehrt oder vermindert wird. Man muss daher annehmen, dass die Wirksamkeit der Erde aus der vereinigten Wirksamkeit Ihrer Theile zusammengesetzt werde, dass folglich alle irdischen Körper sich gegenseitig mit absoluten Kräften anziehen, welche im Verhältniss der anziehenden Materie stehen. Dies ist die Natur der Schwere auf der Erde; sehen wir nun, wie sie am Himmel beschaffen ist.

Dass jeder Körper in seinem Zustande der Ruhe, oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung verharre, wofern er nicht durch einwirkende Körper gezwungen wird, jenen Zustand zu verändern, ist ein von allen Gelehrten angenommenes Naturgesetz. Hieraus folgt aber, dass Körper, welche sich in Curven bewegen, also von den ihre Bahnen berührenden geraden Linien beständig abweichen, durch irgend eine fortwährend wirkende Kraft in ihrer krummlinigen Bewegung zurückgehalten werden. Da die Planeten sich in krummen Bahnen bewegen, muss nothwendig irgend eine Kraft da sein, durch deren wiederholte Wirksamkeit sie unaufhörlich von ihren Tangenten abgelenkt werden.

Nun muss man billiger Weise dasjenige zugeben, was durch mathematische Schlussweise auf's bestimmteste erwiesen wird, dass nämlich alle Körper, welche sich in irgend einer in der Ebene befindlichen Curve bewegen und welche mit den, nach einem entweder ruhenden oder beliebig

sich bewegenden Punkte gezogenen, Radien Vectoren um diesen Punkt der Zeit proportionale Flächen beschreiben, durch Kräfte angetrieben werden, welche nach demselben Punkte gerichtet sind. Da nun von den Astronomen ausgesprochen ist, dass die Planeten um die Sonne, die Trabanten aber um ihren Planeten den Zeiten proportionale Flächen beschreiben: so folgt, dass jene Kraft, durch welche sie beständig von den Tangenten abgelenkt und in krummlinigen Bahnen sich zu bewegen gezwungen werden, gegen die Körper gerichtet sei, welche sich im Centrum der Bahn befinden. Diese Kraft kann passend, in Bezug auf den sich bewegenden Körper Centripetal- und in Bezug auf den Centralkörper anziehende Kraft genannt werden, aus welcher Ursache sie sonst auch entspringen möge.

Ferner muss auch das Folgende, was mathematisch bewiesen wird, zugegeben werden. Drehen sich mehrere Körper mit gleichbleibender Bewegung in concentrischen Kreisen, und sind die Quadrate ihrer Umlaufszeiten den Cuben ihrer Abstände vom gemeinschaftlichen Centrum proportional; so verhalten sich die Centripetalkräfte umgekehrt wie die Quadrate der Abstände. Bewegen sich ferner Körper in Bahnen, welche Kreisen sehr nahe kommen und ruhen ihre Apsiden; so verhalten sich die Centripetalkräfte umgekehrt wie die Quadrate der Abstände. Dass einer dieser beiden Fälle bei jedem Planeten stattfinde, darin stimmen die Astronomen überein. Es verhalten sich daher die Centripetalkräfte aller Planeten umgekehrt, wie die Quadrate ihrer Abstände von den Mittelpunkten der Bahnen. Wirft jemand ein, dass die Apsiden der Planeten, ins besondere die des Mondes nicht gänzlich ruhen, sondern sich langsam und rechtläufig bewegen; so kann man hierauf erwidern, dass wir zugeben, durch diese sehr langsame Bewegung werde jenes Verhältniss der Centripetalkraft etwas vom umgekehrten doppelten abweichen, dass diese Abweichung jedoch gefunden werden könne und unmerklich sei. Denn das Verhältniss der Centripetalkraft des Mondes, welches vor allen am mehrsten gestört werden muss, übertrifft zwar etwas das doppelte, kommt jedoch diesem 60mal näher, als dem dreifachen. Noch näher der Wahrheit lautet die Antwort, dass dieses Fortrücken der Apsiden nicht aus einer Abweichung vom doppelten Verhältniss, sondern aus einer durchaus verschiedenen Ursache entspringe, wie auf vortreffliche Weise in diesem Werke dargethan wird. Es steht also fest, dass die Centripetalkräfte, durch welche die Planeten gegen die Sonne und die Trabanten gegen ihren Planeten gedrängt werden, sich genau umgekehrt wie die Quadrate der Abstände verhalten.

Aus dem Bisherigen folgt, dass die Planeten durch irgend eine beständig auf sie einwirkende Kraft in ihren Bahnen erhalten werden; ferner steht fest, dass diese Kraft immer gegen das Centrum der Bahnen gerichtet ist; es steht fest, dass ihre Intensität mit der Annäherung zum Centrum zu-, hingegen mit der Entfernung von demselben abnimmt, und zwar zu- und abnimmt in demselben Verhältniss, in welchem das Quadrat

des Abstandes ab- und zunimmt. Wir wollen nun eine Vergleichung zwischen den Centripetalkräften der Planeten und der Schwerkraft anstellen, und sehen, ob sie vielleicht von derselben Art sind. Sie werden aber von derselben Art sein, wenn von dort und von hier dieselben Gesetze und dieselben Beziehungen bemerkt werden. Untersuchen wir zuerst die Centripetalkraft des, uns am nächsten liegenden, Mondes!

Die geradlinigen Wege, welche die aus dem Zustande der Ruhe in Bewegung übergehenden Körper, im Anfange der letztern und in gegebener Zeit beschreiben, sind, wenn sie durch beliebige Kräfte angetrieben werden, diesen proportional. Dies ergiebt sich durch mathematische Rechnung. Es wird daher die Centripetalkraft, welche auf den in seiner Bahn sich bewegenden Mond wirkt, sich zur Schwerkraft an der Oberfläche der Erde verhalten, wie der Weg, welchen der Mond in einem sehr kleinen Zeitraume zurücklegen würde, wenn er vermöge der Centripetalkraft sich der Erde näherte und seiner Kreisbewegung ganz beraubt wäre, zu dem Wege, welchen ein schwerer Körper in demselben kleinen Zeitraume nahe bei der Erde beschreiben würde, wenn nur die Schwerkraft ihn zum Fallen antriebe. Der erste dieser beiden Wege ist gleich dem Sinus versus des Bogens, welchen der Mond in derselben Zeit beschrieben hat. Dieser Sinus versus misst nämlich die Entfernung, welche der Mond von der Tangente, vermöge der Centripetalkraft in derselben Zeit erlangt hat, und kann daher aus der gegebenen Umlaufszeit des Mondes und seinem Abstande vom Mittelpunkte der Erde berechnet werden. Den zweiten Weg findet man, wie Huygens gelehrt hat, durch Pendelversuche. Stellt man daher die Rechnung an, so wird der erste Weg sich zum zweiten, oder die Centripetalkraft des in seiner Bahn sich bewegenden Mondes zur Schwerkraft an der Oberfläche der Erde verhalten, wie das Quadrat des Erdhalbmessers zum Quadrat des Halbmessers der Mondbahn. Dasselbe Verhältniss hat auch dem Obigen die Centripetalkraft des in seiner Bahn sich bewegenden Mondes, zu derselben Kraft in der Nähe der Erdoberfläche. Die letztere Centripetalkraft ist daher gleich der Kraft der Schwere. Beide Kräfte sind nicht von einander verschieden, sondern eine und dieselbe. Wären sie nämlich von einander verschieden, so müssten die, durch die vereinigten Kräfte angetriebenen Körper doppelt so schnell gegen die Erde fallen, als bloss vermöge der Schwerkraft. Es ist demnach ausgemacht, dass jene Centripetalkraft, durch welche der Mond beständig von der Tangente abgezogen, oder fortgestossen und in seiner Bahn erhalten wird, die Schwerkraft der Erde sei, welche sich bis zum Monde erstreckt. Es stimmt dies auch mit der Vernunft überein, dass jene Kraft sich auf grosse Entfernungen erstrecke, da man auch auf den höchsten Bergspitzen keine bemerkbare Abnahme derselben wahrnehmen kann. Der Mond ist daher gegen die Erde schwer, und durch Gegenwirkung ist die Erde eben so schwer gegen den Mond, was auch vollständig in diesem Werke bestätigt wird da, wo von der Meeresfluth und dem Fortrücken

der Nachtgleichen die Rede ist, welche aus der Wirkung der Sonne und des Mondes auf die Erde entspringen. Hier und dort werden wir belehrt, nach welchem Gesetze die Kraft der Schwere, in grössern Entfernungen von der Erde, abnimmt. Da nämlich die Schwere von der Centripetalkraft des Mondes nicht verschieden, diese letztere aber dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional ist; so nimmt auch die Schwere in demselben Verhältniss ab.

Gehen wir nun zu den andern Planeten über. Da die Umläufe der Planeten um die Sonne, und der Trabanten um den Jupiter und Saturn Erscheinungen von derselben Art, wie der Umlauf des Mondes um die Erde sind, weil erwiesen ist, dass die Centripetalkräfte der Planeten gegen den Mittelpunkt der Sonne, die der Trabanten gegen die Mittelpunkte von Jupiter und Saturn gerichtet sind; da ferner alle diese Kräfte sich umgekehrt wie die Quadrate der Abstände von den Mittelpunkten verhalten, wie die Centripetalkraft des Mondes sich umgekehrt wie das Quadrat seines Abstandes von der Erde verhält: so muss man schliessen, dass sie alle von derselben natürlichen Beschaffenheit seien. Wie der Mond gegen die Erde, und umgekehrt die Erde gegen den Mond schwer ist, so sind auch alle Trabanten gegen ihren Centralplaneten und dieser gegen sie, so wie endlich alle Planeten gegen die Sonne und diese gegen jene schwer.

Die Sonne ist daher gegen alle Planeten und Trabanten, und diese gegen jene schwer. Denn die Trabanten bewegen sich, während sie ihren Centralplaneten begleiten, zugleich mit diesem um die Sonne. Aus demselben Grunde sind daher Planeten und Trabanten gegen die Sonne schwer, und umgekehrt. Dass aber die Trabanten gegen die Sonne gravitiren, ergiebt sich ausserdem aus den Ungleichheiten des Mondes, deren sehr genaue, mit bewundernswerthem Scharfsinne dargelegte, Theorie sich im dritten Buche dieses Werkes findet.

Dass die anziehende Kraft der Sonne sich nach allen beliebigen Richtungen bis in sehr grosse Entfernungen fortpflanze und sich auf die einzelnen Theile des umliegenden Raumes ergiesse, kann man offenbar aus der Bewegung der Cometen schliessen. Diese kommen aus ungeheuern Entfernungen in die Nähe der Sonne, und kommen dieser bisweilen so nahe, dass sie dieselbe in der Gegend des Perihels nur eben nicht zu berühren scheinen. Die Theorie derselben, welche vor diesem die Astronomen vergebens gesucht hatten, ist in unserm Jahrhundert endlich glücklich aufgefunden und auf's Bestimmteste durch Beobachtungen bewiesen worden; wir verdanken es unserm Autor. Es ist demnach klar, dass die Cometen sich in Kegelschnitten bewegen, deren Brennpunkt im Mittelpunkte der Sonne liegt, und dass ihre nach der Sonne gezogenen Radienvectoren der Zeit proportionale Flächen beschreiben. Aus diesen Erscheinungen aber erhellt und wird mathematisch bewiesen, dass jene Kräfte, durch welche die Cometen in ihren Bahnen erhalten werden, nach der Sonne gerichtet und den Quadraten ihrer Abstände

von deren Centrum umgekehrt proportional sind. Daher gravitiren die Cometen gegen die Sonne, und die anziehende Kraft der letztern erstreckt sich nicht allein auf die Planeten und Trabanten, welche sich in gegebenen Abständen und fast in derselben Ebene befinden, [Dieser letztern sind auch mehrere der in der neuern Zeit entdeckten kleinen Planeten, der sog. Asteroïden nicht unterworfen. Bem. d. Herausg.] sondern auch auf die Cometen, welche sich in den verschiedensten Gegenden des Himmels und in den mannigfaltigsten Entfernungen aufhalten. Hierin besteht also die Natur der gravitirenden Körper, dass sie ihre Kräfte in alle Entfernungen und auf alle gravitirenden Körper ausdehnen. Daraus folgt aber, dass alle Planeten und Cometen einander wechselseitig anziehen und gegen einander schwer sein müssen. Dies wird auch durch die, den Astronomen nicht unbekannte, Störung des Jupiters und des Saturns bestätigt, welche aus der gegenseitigen Wirkung dieser Planeten auf einander entspringt, wie auch durch jene oben erwähnte langsame Bewegung der Apsiden, welche aus einer ähnlichen Ursache hervorgeht.

So gelangen wir endlich dahin, aussprechen zu müssen, dass die Erde, die Sonne und alle die letztere begleitenden Himmelskörper sich wechselseitig anziehen. Ferner werden auch die kleinsten Theilchen der anziehenden Körper ihre anziehenden Kräfte haben, welche im Verhältniss der Menge der Materie zu wirken vermögen, wie oben von den irdischen Körpern gezeigt worden ist. In verschiedenen Abständen aber werden auch die Kräfte dieser sich umgekehrt wie die Quadrate der Abstände verhalten; denn es wird mathematisch bewiesen, dass die nach diesem Gesetz anziehenden Kugeln aus Theilchen zusammengesetzt sein müssen, welche nach demselben Gesetze anziehen.

Die vorhergehenden Schlüsse beruhen auf dem folgenden Grundgesetz, welches von allen Gelehrten angenommen wird, dass nämlich für gleichartige Wirkungen dieselben Ursachen gelten, wenn man die Eigenschaften kennt, oder sie noch nicht erkannt hat. Wer wollte wohl daran zweifeln, dass, wenn die Schwere den Fall eines Steines in Europa bewirkt, dieselbe Ursache den Fall in Amerika bewirke? Wenn in Europa eine wechselseitige Schwere zwischen einem Steine und der Erde stattfindet; wer wird dann dieselbe wechselseitige Schwere in Amerika bezweifeln? Wenn die anziehende Kraft des Steines und der Erde in Europa aus den einzelnen Kräften der Theile zusammengesetzt wird; wer wird alsdann eine ähnliche Zusammensetzung in Amerika ableugnen? Wenn die Anziehung der Erde sich in Europa auf alle Arten von Körpern und in alle Entfernungen fortpflanzt; wer wird alsdann nicht eine ähnliche Fortpflanzung in Amerika annehmen? Auf diese Regel gründet sich alle Physik; hebt man sie auf, so kann man nichts von allen Dingen zugleich behaupten. Die Beschaffenheit einzelner Dinge wird durch Beobachtungen und Versuche bekannt; daraus schliessen wir, allein nach dieser Regel, auf die Natur aller Dinge.

Da nun alle Körper, welche sich auf der Erde oder am Himmel befinden, und an denen man Beobachtungen oder Versuche anstellen kann, schwer sind; so wird man allgemein behaupten müssen, dass die Schwere allen Körpern zukomme. So wie man sich keine Körper denken kann, welche nicht ausgedehnt, beweglich und undurchdringlich wären; kann man sich auch keine vorstellen, welche nicht schwer wären. Die Ausdehnung, Beweglichkeit und Undurchdringlichkeit sind nur durch Versuche bekannt, und ganz auf dieselbe Weise hat man auch die Schwere kennen gelernt. Alle Körper, welche wir beobachtet haben, sind ausgedehnt, beweglich und undurchdringlich; und hieraus schliessen wir, dass alle Körper, auch die nicht beobachteten, ausgedehnt, beweglich und undurchdringlich sind. Ebenso sind alle beobachteten Körper schwer, und hieraus schliessen wir auf die Schwere aller Körper, auch derjenigen, welche wir nicht beobachtet haben. Wollte Jemand behaupten, die Fixsterne seien nicht schwer, weil man ihre Schwere noch nicht wahrgenommen hat [Bei den in den neueren so zahlreich beobachteten Doppelsternen dürfte man doch wohl die Gravitation derselben als vermöge directer Beobachtung ihrer gegenseitigen Bewegung festgestellt annehmen Bem. d. Her.]; so könnte man aus demselben Grunde die Behauptung aufstellen, dass sie weder ausgedehnt, noch beweglich, noch undurchdringlich seien, weil man diese Eigenschaften derselben noch nicht beobachtet hat. Wozu bedarf man der Kräfte? Unter den ursprünglichen Eigenschaften aller Kräfte findet entweder die Schwere statt, oder es finden ebensowenig die Ausdehnung, Beweglichkeit und Undurchdringlichkeit statt. Die Natur der Dinge wird entweder richtig durch die erstere, oder nicht richtig durch die drei letztern erklärt.

Ich höre, dass manche diese Schlüsse nicht billigen und, ich weiss nicht was, von verborgenen Eigenschaften murmeln. Sie pflegen nicht immer die Schwere als etwas Verborgenes anzunehmen, und sind der Meinung, dass die verborgenen Ursachen weit von der Forschung abliegen. Diesen erwidert man leicht, dass diejenigen Ursachen keine verborgenen sind, deren Dasein durch Beobachtungen auf's deutlichste erwiesen wird, sondern nur diejenigen, deren Existenz, verborgen oder erdichtet, aber noch nicht erwiesen ist. Die Schwere wird daher keine verborgene Ursache der Erscheinungen am Himmel sein, indem aus den Erscheinungen selbst dargethan worden ist, dass sie wirklich existire. Diejenigen nahmen vielmehr zu verborgenen Ursachen ihre Zuflucht, welche, ich weiss nicht was für Wirbel einer gänzlich ersonnenen und den Sinnen ganz unbekannten Materie annehmen, durch welche jene Bewegungen hervorgebracht werden sollen.

Wird man aber desshalb die Schwere eine verborgene Ursache nennen, und sie unter diesem Namen aus der Naturlehre verbannen, weil ihre Ursache verborgen und noch nicht gefunden ist? Diejenigen, welche dies behaupten, mögen sehen, dass sie keine absurde Behauptung aufstellen, wodurch sie endlich die ganze Grundlage der Physik umreissen

würden. Obgleich man durch beständige Verknüpfung der Ursachen vom Zusammengesetzten zum Einfachen fortzuschreiten pflegt, kann man doch nicht weiter kommen, sobald man zur einfachsten Ursache gelangt ist. Von der letztern kann keine mechanische Erklärung gegeben werden; würde diese gegeben, so wäre die Ursache noch nicht die einfachste. Wird man daher diese einfachsten Ursachen verborgene nennen und dieselben verbannen wollen? Zugleich würden dann auch die unmittelbar von ihnen abhängenden und eben so die weiter abhängenden Ursachen verbannt werden, bis die Naturlehre von allen Ursachen frei und gereinigt wäre.

Manche halten die Schwere für unnatürlich und nennen sie beständig ein Wunder. Sie wollen sie daher verwerfen, da in der Physik aussernatürliche Ursachen nicht stattfinden. Bei der Widerlegung dieses durchaus thörichten Einwurfes, welcher die ganze Naturforschung umstösst, zu verweilen ist wohl kaum der Mühe werth. Entweder leugnen sie, dass die Schwere allen Körpern innewohne, was jedoch nicht behauptet werden kann, oder sie halten sie desshalb für aussernatürlich, weil sie aus anderen Beziehungen der Körper und daher nicht aus mechanischen Ursachen entspringt. Sicher finden ursprüngliche Beziehungen der Körper statt, welche von andern nicht abhängen, weil sie eben ursprüngliche sind. Man mag daher zusehen, ob nicht alle diese aussernatürliche und desshalb zu verwerfen seien, und zusehen, wie künftig die Naturlehre beschaffen sein würde.

Einigen gefällt diese ganze Physik des Himmels desshalb weniger, weil sie den Meinungen von Cartesius zu widerstreiten und kaum damit vereinigt werden zu können scheint. Diese mögen an ihrer Ansicht Freude finden, jedoch müssen sie auch billig handeln, und andern die Freiheit nicht versagen, welche sie für sich selbst in Anspruch nehmen. Es wird daher erlaubt sein, Newton's System, welches uns wahrer erscheint, beizubehalten und zu umfassen, wie auch den durch Erscheinungen dargethanen Ursachen lieber zu folgen, als gänzlich erdichteten und noch nicht erwiesenen. Zur wahren Forschung gehört, die Natur der Dinge aus wirklich existirenden Ursachen abzuleiten und die Gesetze aufzusuchen, nach denen der hohe Weltschöpfer die schönste Ordnung herstellen wollte, nicht aber die, nach denen er es konnte, wenn es ihm beliebt hätte. Es stimmt nämlich mit der Vernunft überein, dass aus mehreren etwas von einander verschiedenen Ursachen dieselbe Wirkung hervorgehen könne; diejenige Ursache wird aber die wahre sein, aus welcher sie in der That und wirklich hervorgeht, die übrigen finden in einem wahren Systeme nicht statt. In sich selbst bewegenden Uhrwerken kann dieselbe Bewegung des Zeigers entweder aus einem angehängten Gewichte, oder aus einer inwendig eingeschlossenen Feder entspringen. Wenn das zerlegte Uhrwerk wirklich mit einem Gewichte construirt ist, so wird man denjenigen auslachen, welcher sich eine Feder gedacht hat und durch eine so voreilig erdachte Hypothese die Bewegung des Zei-

gers erklären wollte. Man muss durchaus die innere Einrichtung der Maschine erforschen, um das wahre Princip der vorausgesetzten Bewegung als erkannt anzusehen. Ein ungefähr ähnliches Urtheil muss man über diejenigen Naturforscher fällen, welche den Himmel mit einer gewissen sehr lockern Materie ausgefüllt und eine beständige Wirbelbewegung derselben annehmen. Wenn sie auch durch ihre Hypothesen den Erscheinungen aufs genaueste Genüge leisten können, so dürfen sie doch nicht behaupten, ein wahres Natursystem vorgetragen und die wahren Ursachen der Himmelsbewegungen gefunden zu haben; wofern sie nicht die Existenz dieser, oder wenigstens die Nichtexistenz anderer Ursachen nachgewiesen haben. Wenn daher gezeigt ist, dass in der Natur eine wirkliche Anziehung aller Dinge stattfinde; wenn ferner auch gezeigt ist, nach welcher Weise man alle Bewegungen am Himmel durch sie erklären könne, so würde der Einwurf, dass dieselben Bewegungen durch Wirbel erklärt werden müssten, wenn wir auch die Möglichkeit der letztern zugegeben hätten, eitel und wahrhaft lächerlich sein. Wir geben aber diese Möglichkeit nicht zu. Die Erscheinungen können nämlich auf keine Weise durch Wirbel erklärt werden, was unser Verfasser vollständig und durch die klarsten Gründe dargethan hat, so dass diejenigen mehr als billig ihren Träumen nachhängen müssen, welche sich die erfolglose Mühe geben, die unpassendste Dichtung auszubessern und mit neuen Erdichtungen auszuschmücken.

Wenn die Planeten und Cometen durch Wirbel um die Sonne geführt werden, so müssen die fortgeführten Körper und die sie zunächst umgebenden Theile der Wirbel mit derselben Geschwindigkeit und nach derselben Richtung sich bewegen; sie müssen dieselbe Dichtigkeit und dasselbe Beharrungsvermögen, im Verhältniss der Menge ihrer Materie besitzen. Es ist aber bekannt, dass die Planeten und Cometen, während sie sich in derselben Gegend des Himmels befinden, sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten und nach verschiedenen Richtungen bewegen. Es folgt daher nothwendig, dass jene Theile der himmlischen Flüssigkeit, welche gleich weit von der Sonne entfernt sind, in derselben Zeit nach verschiedenen Richtungen und mit verschiedener Geschwindigkeit fortwandern; denn eine andere Richtung und Geschwindigkeit muss für den Fortgang der Planeten, und eine andere für den der Cometen erforderlich sein. Da dies nicht erklärt werden kann, so muss man entweder gestehen, dass alle Himmelskörper durch die Materie nicht fortgeführt werden, oder erklären, dass ihre Bewegungen nicht durch einen und denselben Wirbel, sondern durch mehrere ausgeführt werden, welche unter einander verschieden sind und denselben, um die Sonne gelegenen Raum durchwandern.

Wenn sich mehrere Wirbel in demselben Raume befinden und sich wechselseitig durchdringen, wenn sie ferner mit verschiedenen Bewegungen umlaufen; so werden diese Bewegungen denjenigen der fortgeführten Körper ähnlich sein, welche sehr regelmässig und in Kegelschnitten, bald

sehr excentrischen bald der Kreisform nahe kommenden, stattfinden. Man kann daher mit Recht fragen, wie es möglich sei, dass diese Bewegungen unverändert erhalten, und nicht im mindesten durch die Einwirkung der entgegenstehenden Materie, während so vieler Jahrhunderte gestört werden. Wahrlich, da diese erdichteten Bewegungen zusammengesetzter und schwieriger zu erklären sind, als jene wahren Bewegungen der Planeten und Cometen, so scheint es mir unnütz, sie in die Physik aufzunehmen; da jede Ursache einfacher sein muss, als ihre Wirkung. Ist einmal die Freiheit zu fabeln aufgestellt, so könnte jemand behaupten, alle Planeten und Cometen seien wie unsere Erde von Atmosphären umgeben; eine Hypothese, welche mehr mit der Vernunft übereinzustimmen scheint, als die der Wirbel. Hierauf könnte er die Behauptung aufstellen, diese Atmosphären bewegten sich vermöge ihrer natürlichen Beschaffenheit um die Sonne und beschrieben Kegelschnitte. Diese kann man sich wahrlich leichter vorstellen, als eine ähnliche Bewegung der Wirbel, welche gegenseitig durcheinander hindurchgehen. Endlich könnte er die Annahme aufstellen, dass die Planeten und Cometen durch ihre Atmosphären um die Sonne geführt werden und könnte so wegen der aufgefundenen Ursachen der Himmelsbewegungen einen Triumpf feiern. Jeder, welcher aber diese Fabel für verwerflich hält, müsste auch die andere verwerfen; denn ein Ei ist dem andern nicht ähnlicher, als die Hypothese der Atmosphären derjenigen der Wirbel.

Galilei hat gelehrt, die Abbiegung von der geraden Linie, welche ein geworfener und in einer Parabel sich bewegender Stein erleidet, entspringe aus der Schwere des Steines gegen die Erde, also aus einer verborgenen Eigenschaft. Es ist jedoch möglich, dass ein anderer pfiffiger Physiker eine andere Ursache aufstelle. Er wird also eine lockere Materie erdichten, welche weder durch das Gesicht, noch durch das Gefühl, noch durch irgend einen Sinn wahrgenommen wird und welche sich in den, der Oberfläche nahen, Gegenden befindet. Er wird ferner behaupten, diese Materie bewege sich nach verschiedenen Richtungen und mit verschiedenen, häufig entgegengesetzten Geschwindigkeiten und sie beschreibe parabolische Linien. Hierauf wird er auf folgende schöne Weise die Abbiegung des Steines erklären, und sich so den Beifall des grossen Haufens erwerben. Der Stein, wird er sagen, schwimmt in jener lockern Flüssigkeit und indem er ihrem Laufe nachfolgt, kann er nicht zugleich eine andere Bahn beschreiben. Die Flüssigkeit bewegt sich aber in einer Parabel, also muss der Stein dasselbe thun. Wer wird nun nicht den höchst scharfsinnigen Geist dieses Philosophen bewundern, der aus mechanischen Ursachen, nämlich der Materie und der Bewegung die Erscheinungen der Natur erklärt, so dass auch der grosse Haufen es begreifen kann? Wer wird aber nicht jenen guten Galilei verspotten, welcher mit grossen mathematischen Hülfsmitteln die glücklicherweise aus der Naturlehre verbannten verborgenen Eigenschaften auf's neue einzu-

führen versucht hat? Doch es verdriesst mich, länger bei Possen zu verweilen.

Die Summe der Sache kommt auf das Folgende hinaus. Die Zahl der Cometen ist sehr gross und ihre Bewegungen erfolgen ganz regelmässig, so wie sie dieselben Gesetze befolgen, denen die Planeten bei ihren Bewegungen unterworfen sind. Sie bewegen sich in Kegelschnitten, und zwar in sehr excentrischen. Sie kommen von allen Seiten her, und geben nach allen Theilen des Himmels hin; sie durchwandern ganz frei die Gegenden der Planeten und schreiten oft gegen die Ordnung der Zeichen fort. Diese Erscheinungen werden auf's sicherste durch die astronomischen Beobachtungen bestätigt, und können nicht durch Wirbel erklärt werden; ja sie können nicht mit den Planeten-Wirbeln zusammen bestehen. Die Bewegungen der Cometen werden durchaus nicht stattfinden können, wenn jene erdichtete Materie nicht gänzlich vom Himmel fortgeschafft wird. [Encke hat sich jedoch bewogen gefunden, um eine bei seinem Cometen wahrgenommene Erscheinung der beschleunigten Rückkehr zum Perihel zu erklären, ein widerstehendes Mittel anzunehmen. Bem. d. Her.] Werden nämlich die Planeten durch Wirbel um die Sonne geführt, so müssen die Theile dieser Wirbel, welche jeden Planeten am nächsten umgeben, eben so dicht als dieser sein, was schon oben gesagt worden ist. Alle Materie also, welche die Erdbahn berührt, wird gleiche Dichtigkeit mit der Erde besitzen, diejenige Materie aber, welche sich zwischen der Erd- und Saturnsbahn befindet, wird entweder eine grössere oder kleinere Dichtigkeit haben. Damit nämlich der Zustand des Wirbels von Dauer sein könne, müssen die weniger dichten Theile den Mittelpunkt einnehmen, die dichtern hingegen sich entfernter vom Mittelpunkt befinden. Da nun die Umlaufszeiten der Planeten im $^3/_2$ten Verhältniss ihrer Abstände von der Sonne stehen, müssen die Perioden der Theile des Wirbels dasselbe Verhältniss beibehalten. Daraus folgt aber, dass die Centrifugalkräfte dieser Theile sich umgekehrt wie die Quadrate der Abstände verhalten. Die aber weiter vom Mittelpunkte entfernten streben mit geringerer Kraft, sich von demselben zu entfernen, und wenn sie daher weniger dicht wären, müssten sie nothwendig der grösseren Kraft nachgeben, mit welcher die dem Centrum nähern Theile aufzusteigen streben. Die dichtern würden demnach auf-, die weniger dichten absteigen und eine wechselseitige Ortsvertauschung stattfinden, bis die flüssige Materie des ganzen Wirbels so gelegen und geordnet wird, dass sie im Gleichgewicht verharren könne. Befinden sich zwei verschieden dichte Flüssigkeiten in demselben Gefässe, so wird die dichtere, vermöge der grössern Schwerkraft, nach der tiefsten Stelle streben und auf gleiche Weise kann man behaupten, dass die dichtern Theile des Wirbels, vermöge der grössern Centrifugalkraft, nach der höchsten Stelle streben. Jener ganze und bei weitem grösste Theil des Wirbels, der ausserhalb der Erdbahn liegt, wird nach der Menge der Materie eine Dichtigkeit und also auch eine Trägheit besitzen, welche

nicht kleiner als die der Erde ist. Daraus entspringt aber ein ungeheurer Widerstand für die Bewegung der Cometen, ein ungeheurer und sehr bemerkbarer, um nicht zu sagen ein Widerstand, welcher ihre Bewegung ganz aufheben oder vernichten zu können scheint. Es ist aber aus der ganz regelmässigen Bewegung der Cometen bekannt, dass dieselben keinen Widerstand erleiden, welcher im geringsten bemerkt werden kann, und dass dieselben daher keineswegs auf eine Materie stossen, welche irgend eine Kraft zu widerstehen, oder irgend eine Dichtigkeit oder irgend eine Kraft der Trägheit besitzt. (Vgl. die Bemerkung in der vorhergehenden Parenthese. Bem. d. Her.)

Der Widerstand der Mittel entspringt nämlich entweder aus der Kraft der Trägheit, welche der flüssigen Materie innewohnt, oder aus einem Mangel an Schlüpfrigkeit. Der aus dem letztern entspringende Widerstand ist sehr gering und kann in den gewöhnlich bekannten Flüssigkeiten wahrgenommen werden, wenn dieselben nicht wie Oel und Honig sehr zähe sind. Der Widerstand, welchen man in der Luft, im Wasser, Quecksilber und andern derartigen nicht zähen Flüssigkeiten wahrnimmt, ist fast ganz von der ersten Art, und kann nicht durch irgend einen Grad von Feinheit vermindert werden, wenn die Dichtigkeit und Kraft der Trägheit der Flüssigkeit, denen dieser Widerstand proportional ist, unverändert bleiben. Dies hat unser Verfasser sehr deutlich in der Theorie des Widerstandes bewiesen, welche noch genauer in dieser zweiten Ausgabe auseinandergesetzt und durch Versuche fallender Körper vollständiger bestätigt wird.

Die Körper theilen, indem sie fortschreiten, ihre Bewegung allmählig der sie umgebenden Materie mit, verlieren durch diese Mittheilung und erleiden durch den Verlust eine Verzögerung. Die Verzögerung ist daher der mitgetheilten Bewegung proportional. Die letztere verhält sich aber, wenn die Geschwindigkeit des fortschreitenden Körpers gegeben ist, wie die Dichtigkeit der Flüssigkeit. Daher ist die Verzögerung oder der Widerstand eben dieser Dichtigkeit proportional, wenn nicht die verlorene Bewegung durch die, nach den hintern Theilen des Körpers zurückgehende, Flüssigkeit ersetzt wird. Dies wird man aber nicht behaupten können, wenn nicht die Einwirkung der Flüssigkeit auf die hintern Theile des Körpers gleich ist der Einwirkung des Körpers auf die Flüssigkeit an der vordern Seite, d. h. wenn nicht die relative Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit von hinten auf den Körper stürzt, gleich ist derjenigen Geschwindigkeit, womit der Körper auf die Flüssigkeit stürzt. Es müsste also die absolute Geschwindigkeit der zurückgehenden Flüssigkeit doppelt so gross sein, als diejenige der fortgestossenen, was unmöglich ist. Auf keine Weise kann daher der aus der Dichtigkeit und der Kraft der Trägheit entspringende Widerstand der Flüssigkeiten aufgehoben werden. Man muss demnach schliessen, dass die Himmelsflüssigkeit keine Kraft der Trägheit besitze, da sie keine Kraft zum Widerstande habe; dass sie keine Kraft besitze, wodurch eine

Bewegung mitgetheilt werden kann, da sie keine Kraft der Trägheit hat; dass sie keine Kraft besitze, wodurch eine beliebige Aenderung entweder in einem einzelnen oder in mehreren Körpern hervorgebracht werden kann, da sie keine Kraft zur Mittheilung der Bewegung hat; endlich dass ihre ganze Wirksamkeit nicht vorhanden sei, da sie nicht vermögend ist, irgend eine Aenderung hervorzubringen. Warum sollte man also diese Hypothese, welche durchaus grundlos ist, und nicht im mindesten zur Erklärung der Natur der Dinge dient, nicht eine sehr unpassende und des Naturforschers ganz unwürdige nennen dürfen? Diejenigen, welche annehmen, der Himmelsraum sei mit einer flüssigen Materie erfüllt, diese sei aber nicht träge, heben mit diesen Worten den leeren Raum auf und legen ihn zur Seite. Denn da eine derartige Flüssigkeit auf keine Weise vom leeren Raume unterschieden werden kann, so findet der Streit nur über den Namen, nicht aber über die Natur der Dinge statt. Sollten manche so sehr der Materie ergeben sein, dass sie auf keine Weise einen von Körpern leeren Raum zugeben wollen; so wollen wir einmal sehen, wohin diese endlich gelangen müssen.

Entweder werden sie sagen, diese Einrichtung der überall angefüllten Welt, wie sie sie sich vorstellen, sei aus dem Willen Gottes zu dem Zweck hervorgegangen, damit für die Operationen der Natur ein gegenwärtiges Hilfsmittel in dem sehr feinen, alles durchdringenden und erfüllenden Aether vorhanden sei. Dies kann aber nicht behauptet werden, indem durch die Erscheinungen der Cometen gezeigt worden ist, dass dieser Aether keine Wirkung ausübt. Oder sie werden sagen, er sei aus Gottes Willen zu irgend einem Zweck hervorgegangen, was man jedoch nicht behaupten kann, indem eine davon verschiedene Einrichtung der Welt aus demselben Grunde aufgestellt werden könnte. Sie können endlich auch behaupten, nicht aus dem Willen Gottes, sondern aus irgend einer Naturnothwendigkeit sei er hervorgegangen. Sie müssen also endlich in den schmutzigen Bodensatz der unreinsten Heerde versinken. Sie träumen nämlich, es werde alles durch das Fatum, nicht aber durch die Vorsehung regiert, die Materie habe durch ihre eigene Nothwendigkeit, immer und überall existirt, sie sei unbegrenzt und ewig. Setzt man dies voraus, so wird sie auch überall gleichförmig sein, indem die Mannichfaltigkeit der Formen durchaus der Nothwendigkeit widerstreitet. Sie wird auch unbewegt sein; denn wenn sie nothwendigerweise sich nach irgend einer bestimmten Richtung und mit einer gegebenen Geschwindigkeit bewegte, müsste sie eben so nothwendig sich nach einer andern Richtung und mit einer andern Geschwindigkeit bewegen. Nach verschiedenen Richtungen und mit verschiedener Geschwindigkeit kann sie sich aber nicht zugleich bewegen; daher muss sie unbewegt sein. Auf keine Weise konnte die, durch die schönste Mannichfaltigkeit der Formen und Bewegungen ausgezeichnete Welt anders, als aus dem freien Willen des alles vorhersehenden und beherrschenden Gottes hervorgehen.

Aus dieser Quelle sind alle jene sogenannten Naturgesetze hervorgegangen, in denen man wohl viele Spuren von weiser Ueberlegung, aber keine von einer Nothwendigkeit wahrnimmt. Wir müssen aber jene Gesetze nicht aus ungewissen Vermuthungen ableiten, sondern durch Beobachtungen und Versuche erlernen. Wer die Principien der Naturlehre und die Gesetze der Dinge finden zu können glaubt, indem er sich allein auf die Kraft seines Geistes und das innere Licht seiner Vernunft stützt, muss entweder annehmen, die Welt sei aus einer Nothwendigkeit hervorgegangen und die aufgestellten Gesetze aus derselben Nothwendigkeit folgen lassen; oder er muss der Meinung sein, dass, wenn die Ordnung der Natur durch den Willen Gottes entstanden sei, er, ein elendes Menschlein eingesehen habe, was als das Beste zu thun sei. Eine gesunde und wahre Naturlehre gründet sich auf die Erscheinungen der Dinge, welche uns, selbst wider unsern Willen und widerstrebend zu derartigen Principien führen, dass man in ihnen deutlich die beste Ueberlegung und die höchste Herrschaft des weisesten und mächtigsten Wesens wahrnimmt. Diese Principien werden aber deshalb nicht weniger zuverlässig sein, weil sie vielleicht einigen Menschen weniger willkommen sind. Für diese werden sie Wunder und verborgene Eigenschaften sein, an denen sie keinen Gefallen finden; allein die boshafter Weise beigelegten Namen darf man nicht aus Versehen auf die Dinge übertragen; wenn man nicht zuletzt erklären will, dass die Naturlehre sich auf Atheismus gründen müsse. Dieser Menschen wegen braucht man die Naturlehre nicht umzustürzen, indem die Ordnung der Dinge nicht geändert werden will.

Bei rechtschaffenen und billigen Richtern wird daher die so vorzügliche Forschungsweise gelten, welche sich auf Versuche und Beobachtungen gründet. Diesen wird man kaum ausdrücken dürfen, welche Erleuchtung und welche Würde aus diesem vorzüglichen Werke unseres Verfassers hervorgehen wird. Sein besonders glücklicher Geist, womit er alle die schwierigsten Aufgaben löst und dahin sich ausdehnt, wozu der menschliche Geist sich zu erheben kaum hoffen durfte, wird von allen denjenigen bewundert und anerkannt werden, welche etwas tiefer in diesen Dingen bewandert sind. Nachdem er die Riegel fortgeschoben hatte, eröffnete er uns den Zugang zu den schönsten Mysterien der Dinge. Er legte uns den eleganten Bau des Weltsystems vor Augen und gestattete, es von einem Punkte zu durchschauen, dergestalt dass selbst König Alphons, wenn er jetzt wieder aufstünde, kaum Einfachheit oder Harmonie darin vermissen würde. Demnach dürfen wir jetzt die Majestät der Natur näher beschauen und uns der schönsten Betrachtung erfreuen; wir können den Erbauer und Herrn des Weltalls tiefer anbeten und verehren, worin der bei weitem grösste Nutzen der Naturforschung besteht. Blind muss derjenige sein, welcher aus der besten und weisesten Einrichtung der Dinge nicht sogleich die unbegrenzte

Weisheit und Güte des allmächtigen Schöpfers ersähe; thöricht derjenige, welcher es nicht gestehen wollte.

Newton's ausgezeichnetes Werk wird daher der sicherste Schutz gegen die Angriffe der Gottlosen sein, und nirgends wird man glücklicher, als aus diesem Köcher, Geschosse gegen die gottlose Schaar entnehmen können. Dieses fühlte zuerst und bewies in gelehrten englischen und lateinischen Reden der in allen Wissenschaften ausgezeichnete Mann und vorzügliche Begünstiger ausgezeichneter Talente, Richard Bentley, eine grosse Zierde seines Jahrhunderts und unserer Akademie, der würdige und redliche Lehrer in unserm Collegium. Diesem muss ich mich in mehrfacher Beziehung verpflichtet bekennen, und auch Du, wohl wollender Leser, wirst ihm Deinen schuldigen Dank nicht versagen. Er, ein langjähriger Freund des Verfassers, sorgte zugleich für den Ruf seines Freundes und die Beförderung der Wissenschaften. Da von der frühern Ausgabe nur seltene und theuer zu bezahlende Exemplare übrig waren, überredete er durch häufige Anregung und trieb endlich, indem er ihn nur eben nicht tadelte, den herrlichen, durch Bescheidenheit und Gelehrsamkeit gleich ausgezeichneten Mann, ihm zu gestatten, dass diese neue Ausgabe des Werkes, durchgehends aufs neue ausgefeilt und mit neuen Zusätzen bereichert, auf seine Kosten und unter seiner Leitung erscheinen dürfe. Mir aber übertrug er nach seinem Rechte die nicht undankbare Aufgabe, mit Kräften für die Verbesserung zu sorgen.

Cambridge, 12. Mai 1713. Roger Cotes.

Vorrede des Verfassers zur dritten Ausgabe.

In dieser dritten Ausgabe, welche Heinrich Pemberton, ein in diesen Gegenständen erfahrener Mann besorgt hat, wird manches im zweiten Buche über den Widerstand der Mittel etwas ausführlicher als früher dargestellt, und hinzugefügt sind neue Versuche über den Widerstand schwerer Körper. Im dritten Buche ist der Grund, aus welchem der Mond durch die Schwere in seiner Bahn erhalten wird, ausführlicher auseinander gesetzt, sowie neue Beobachtungen über das gegenseitige Verhältniss des Jupiters-Durchmesser nach Pound hinzugefügt sind. Ferner finden sich hier einige Beobachtungen des im Jahre 1680 erschienenen Cometen, welche Kirch in Deutschland angestellt hat und die vor kurzem in unsere Hände gelangt sind. Sie zeigen, wie nahe parabolische Bahnen sich den Bewegungen der Cometen anschliessen. Auch die Bahn jenes Cometen wird

nach Halley's Berechnung etwas genauer als früher, und zwar in einer Ellipse gegeben. Es wird gezeigt, dass der Comet 9 Himmelszeichen hindurch seinen Weg nicht weniger genau in dieser elliptischen Bahn beschrieben hat, als es die Planeten in den, durch die Astronomie bestimmten, elliptischen Bahnen zu thun pflegen. Auch die Bahn des 1723 erschienenen Cometen ist nach Bradley's Berechnung hinzugefügt.

London, 12. Jan. 1725.

Is. Newton.

Mathematische Principien der Naturlehre.

ERKLÄRUNGEN.

Erklärung 1. *Die Grösse der Materie wird durch ihre Dichtigkeit und ihr Volumen vereint gemessen.*

Eine doppelt so dichte Luft im doppelten Raume ist von vierfacher Grösse; dasselbe gilt von Schnee oder Staub, welche durch Flüssigwerden oder Druck verdichtet werden. Dasselbe findet auch bei allen Körpern statt, die durch irgend welche Ursachen auf verschiedene Weise verdichtet werden. Auf das Mittel, welches etwa die Zwischenräume der Theile frei durchdringen kann, nehme ich hier keine Rücksicht.

Diese Grösse der Materie werde ich im Folgenden unter dem Namen Körper oder Masse verstehen, und sie wird durch das Gewicht des jedesmaligen Körpers bekannt. Dass die Masse dem Gewichte proportional sei, habe ich durch sehr genau angestellte Pendelversuche gefunden, wie später gezeigt werden wird.

Erklärung 2. *Die Grösse der Bewegung wird durch die Geschwindigkeit und die Grösse der Materie vereint gemessen.*

Die Bewegung des Ganzen ist die Summe der Bewegungen der einzelnen Theile. Daher ist sie eine doppelte in einem doppelt so grossen Körper bei gleicher Geschwindigkeit und eine vierfache in einem doppelt so grossen Körper bei doppelter Geschwindigkeit.

Erklärung 3. *Die Materie besitzt das Vermögen zu widerstehen; deshalb verharrt jeder Körper, soweit es an ihm ist, in einem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung.*

Diese Kraft ist stets dem Körper proportional, und unterscheidet sich nur in der Art der Auffassung von der Trägheit der Materie. Die Trägheit der Materie bewirkt, dass jeder Körper von seinem Zustande der Ruhe oder der Bewegung nur schwer abgebracht wird, wesshalb auch diese der Materie eigenthümliche Kraft mit dem sehr bezeichnenden

Namen: **Kraft der Trägheit** belegt werden könnte. Es übt daher der Körper diese Kraft nur bei der Aenderung seines Zustandes aus, der durch eine andere an ihm angebrachte Kraft bewirkt werden soll und erstere wirkt, unter verschiedenen Gesichtspunkten, bald als **widerstehende**, bald als **angreifende** Kraft. **Widerstehend**, in so fern der Körper, zur Erhaltung seines Zustandes, der angebrachten Kraft entgegenstrebt; **angreifend**, in so fern er, indem er der Kraft des entgegenstehenden Hindernisses nur sehr schwer nachgiebt, den Zustand des letztern zu ändern versucht. Gewöhnlich schreibt man den Widerstand den ruhenden, den Angriff den sich bewegenden Körpern zu; allein Bewegung und Ruhe, wie sie gewöhnlich aufgefasst werden, unterscheiden sich von einander durch die Weise der Beziehung, und es ruhen nicht immer diejenigen Körper, welche man gewöhnlich als ruhend ansieht.

Erklärung 4. *Eine angebrachte Kraft ist das gegen einen Körper ausgeübte Bestreben, seinen Zustand zu ändern, entweder den der Ruhe oder den der gleichförmigen geradlinigen Bewegung.*

Diese Kraft besteht nur in dem Bestreben und sie verbleibt, nachdem sie dieses ausgeübt hat, nicht im Körper. Dieser verharret nämlich in jedem neuen Zustande nur vermöge der Kraft der Trägheit. Die beigebrachte Kraft ist verschiedenen Ursprungs, wie z. B. durch Stoss, Druck, Centripetalkraft.

Erklärung 5. *Die Centripetalkraft bewirkt, dass ein Körper gegen irgend einen Punkt als Centrum gezogen oder gestossen wird, oder auf irgend eine Weise dahin zu gelangen strebt.*

Hierher gehört die **Schwere**, vermöge welcher ein Körper sich dem Mittelpunkte der Erde zu nähern sucht; die **magnetische Kraft**, durch welche das Eisen zum Pole des Magneten hingezogen wird und jene **Kraft**, welche es auch immer sei, durch welche die Planeten beständig von der gradlinigen Bewegung abgezogen und, in krummen Linien sich zu bewegen, gezwungen werden. Ein in der Schlender herumgedrehter Stein hat das Bestreben, sich von der herumtreibenden Hand zu entfernen; er spannt durch dieses Bestreben die Schlender an, und zwar desto stärker, je schneller er herumgedreht wird, und er fliegt davon, sobald man ihn loslässt. Die jenem Bestreben entgegengesetzte Kraft, durch welche die Schlender den Stein beständig gegen die Hand zurückzieht und ihn im Kreise festhält, nenne ich die **Centripetalkraft**, weil sie gegen die Hand, als den Mittelpunkt des Kreises gerichtet ist. Dasselbe findet bei allen Körpern statt, welche im Kreise herumgetrieben werden. Sie haben alle das Bestreben, sich vom Mittelpunkte ihrer Bahn zu entfernen, und wenn nicht eine jenem Bestreben entgegengesetzte Kraft da wäre, wodurch sie gebunden und in ihren Bahnen zurückgehalten

werden, welche Kraft ich **Centripetalkraft** nenne; so würden sie längs einer geraden Linie mit gleichförmiger Bewegung fortgehen. Ein Projectil würde, wenn es von der Schwerkraft befreit wäre, nicht zur Erde abgelenkt werden, sondern gradlinig gegen den Himmel fortschreiten und zwar mit gleichförmiger Bewegung, wenn nur der Widerstand der Luft aufgehoben wäre. Durch die Schwere wird es vom gradlinigen Laufe abgezogen und beständig gegen die Erde gelenkt, und zwar stärker oder schwächer nach Verhältniss seines Gewichtes und der Geschwindigkeit seiner Bewegung. Je kleiner sein Gewicht nach Verhältniss der Menge der Materie, und je grösser die Geschwindigkeit ist, mit welcher es fortgeworfen wird; desto weniger wird es vom gradlinigen Wege abweichen und desto länger ihn fortsetzen. Wenn eine Bleikugel mit gegebener Geschwindigkeit längs einer horizontalen Linie von der Spitze eines Berges fortgeschossen wird und auf einer krummen Linie 2 Meilen weit fortgeht, ehe sie auf die Erde fällt; so würde sie mit der doppelten Geschwindigkeit etwa doppelt so weit, mit 10facher etwa 10mal so weit fortgehen, wenn nur der Widerstand der Luft aufgehoben wäre. Durch Vergrösserung der Geschwindigkeit könnte nach Belieben die Entfernung in welche sie geworfen wird, vergrössert und die Krümmung der beschriebenen Linien vermindert werden; dergestalt, dass sie endlich erst in einer Entfernung von 10^0, oder 30^0 oder 90^0 niederfiele, oder auch um die ganze Erde herumliefe, oder endlich gen Himmel fortginge und diese abweichende Bewegung in's Unendliche fortsetzte. Eben so wie das Projectil in eine Bahn gebracht werden und so die ganze Erde umlaufen könnte, kann auch der Mond entweder durch die Schwerkraft, wenn er nur schwer ist, oder durch eine andere ihn gegen die Erde drängende Kraft stets vom geradlinigen Wege zur Erde hingezogen und in seine Bahn gebogen werden. Ohne eine solche Kraft kann er nicht in derselben erhalten werden. Diese Kraft würde ferner, wenn sie angemessen kleiner wäre, ihn nicht stark genug vom geradlinigen Wege ablenken, hingegen, wenn sie zu gross wäre, ihn mehr als hinreichend zur Erde ablenken und gegen diese hinführen. Es ist daher nothwendig, dass sie gerade von der richtigen Grösse sei. Aufgabe der Mathematik ist es, die Kraft zu finden, durch welche ein Körper in einer gegebenen Bahn und mit gegebener Geschwindigkeit erhalten werden könne, und umgekehrt, den krummlinigen Weg zu finden, auf welchen ein von einem gegebenen Orte und mit gegebener Geschwindigkeit ausgegangener Körper durch eine gegebene Kraft abgelenkt wird.

Die Grösse der Centripetalkraft ist von dreierlei Art: **absolut, beschleunigend** und **bewegend**.

Erklärung 6. *Die absolute Grösse der Centripetalkraft ist das grössere oder kleinere Maass derselben, nach Verhältniss der wirkenden Ursache, welche vom Mittel-*

punkte nach den umgebenden Theilen sich fortpflanzt.

So ist die magnetische Kraft grösser in dem einen, kleiner in dem andern Magneten, je nach der Grösse des Magneten und der Intensität seiner Kraft.

Erklärung 7. *Die beschleunigende Grösse der Centripetalkraft ist derjenigen Geschwindigkeit proportional, welche sie in einer gegebenen Zeit erzeugt.*

So ist die Kraft desselben Magneten grösser in kleiner, und kleiner in grosser Entfernung. Die Kraft der Schwere grösser in Thälern, kleiner auf den Spitzen sehr hoher Berge (wie Pendelversuche gezeigt haben), und noch kleiner (wie später gezeigt werden wird) in grösseren Abständen von der Erde. In gleichen Abständen ist sie aber überall dieselbe, weil sie alle fallenden Körper (schwere oder leichte, grosse oder kleine) nach aufgegebenem Widerstande des Aethers gleich stark beschleunigt.

Erklärung 8. *Die bewegende Grösse der Centripetalkraft ist der Bewegung proportional, welche sie in einer gegebenen Zeit hervorbringt.*

So ist das Gewicht grösser in einem grossen, kleiner in einem kleinen Körper, und in demselben Körper grösser in der Nähe der Erde kleiner am Firmament. Diese Kraft ist des ganzen Körpers Streben oder Neigung zum Centrum und (wie man zu sagen pflegt) sein Gewicht. Bekannt wird sie immer durch die ihr entgegengesetzte und gleiche Kraft, durch welche das Herabsteigen des Körpers verhindert werden kann.

Man kann der Kürze wegen diese, auf dreifache Weise betrachtete Grösse der Kraft absolute, beschleunigende und bewegende Kraft nennen, und sie zu gegenseitigen Unterscheidung auf die nach dem Mittelpunkte strebenden Körper, den Ort der Körper und den Mittelpunkt der Kräfte beziehen. Die bewegende Kraft auf den Körper, als ein Streben und Hinneigung des Ganzen gegen das Centrum, welches aus der Hinneigung der einzelnen Theile zusammengesetzt ist. Die beschleunigende Kraft auf den Ort des Körpers, als eine wirkende Ursache, welche sich vom Centrum aus nach den einzelnen es umgebenden Orten, zur Bewegung der in denselben befindlichen Körper, fortpflanzt. Die absolute Kraft auf das Centrum, welches mit einer Ursache begabt ist, ohne welche die bewegenden Kräfte sich nicht durch den umgebenden Raum fortpflanzen würden. Diese Ursache mag nun irgend ein Centralkörper (wie der Magnet im Centrum der magnetischen, die Erde im Centrum der Schwerkraft), oder irgendwie unsichtbar sein. Dies ist wenigstens der mathematische Begriff derselben, denn die physischen Ursachen und Sitze der Kräfte ziehe ich hier nicht in Betracht.

Die beschleunigende Kraft verhält sich daher zur bewegenden, wie die Geschwindigkeit zur Bewegung. Die Grösse der Bewegung entsteht nämlich aus dem Producte der Geschwindigkeit in die Masse, und die bewegende Kraft aus dem Producte der beschleunigenden Kraft in dieselbe Masse, indem die Summe der Wirkungen, welche die beschleunigende Kraft in den einzelnen Theilchen des Körpers hervorbringt, die bewegende Kraft des ganzen Körpers ist. Daher verhält sich in der Nähe der Erdoberfläche, wo die beschleunigende Kraft, d. h. die Kraft der Schwere in allen Körpern dieselbe ist, die bewegende Kraft der Schwere oder das Gewicht, wie der Körper. Steigt man aber zu Gegenden auf, in denen die beschleunigende Kraft der Schwere geringer wird, so wird das Gewicht gleichmässig vermindert und stets dem Product aus der beschleunigenden Kraft der Schwere in den Körper proportional sein. So wird in Gegenden, wo die beschleunigende Kraft halb so gross ist, das Gewicht eines Körpers um die Hälfte vermindert. Ferner nenne ich die Anziehungen und den Stoss in demselben Sinne beschleunigend und bewegend. Die Benennung: Anziehung, Stoss oder Hinneigung gegen den Mittelpunkt nehme ich ohne Unterschied und unter einander vermischt an, indem ich diese Kräfte nicht im physischen, sondern nur im mathematischen Sinne betrachte. Der Leser möge daher aus Bemerkungen dieser Art nicht schliessen, dass ich die Art und Weise der Wirkung oder die physische Ursache erklären, oder auch dass ich den Mittelpunkten (welche geometrische Punkte sind) wirkliche und physische Kräfte beilege, indem ich sage: die Mittelpunkte ziehen an, oder es finden Mittelpunktskräfte statt.

Anmerkung.

Bis jetzt habe ich zu erklären versucht, in welchem Sinne weniger bekannte Benennungen in der Folge zu verstehen sind. Zeit, Raum, Ort und Bewegung als allen bekannt, erkläre ich nicht. Ich bemerke nur, dass man gewöhnlich diese Grössen nicht anders, als in Bezug auf die Sinne auffasst und so gewisse Vorurtheile entstehen, zu deren Aufhebung man sie passend in absolute und relative, wahre und scheinbare, mathematische und gewöhnliche unterscheidet.

I. Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfliesst an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig, und ohne Beziehung auf irgend einen äussern Gegenstand. Sie wird so auch mit dem Namen: Dauer belegt.

Die relative, scheinbare und gewöhnliche Zeit ist ein fühlbares und äusserliches, entweder genaues oder ungleiches, Maass der Dauer, dessen man sich gewöhnlich statt der wahren Zeit bedient, wie Stunde, Tag, Monat, Jahr.

II. Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äussern Gegenstand, stets gleich und unbeweglich.

Der relative Raum ist ein Maass oder ein beweglicher Theil des erstern, welcher von unsern Sinnen, durch seine Lage gegen andere

Körper bezeichnet und gewöhnlich für den unbeweglichen Raum genommen wird. Z. B. ein Theil des Raumes innerhalb der Erdoberfläche; ein Theil der Atmosphäre; ein Theil des Himmels, bestimmt durch seine Lage gegen die Erde. Der absolute und relative Raum sind dasselbe an Art und Grösse, aber sie bleiben es nicht immer an Zahl. Bewegt sich z. B. die Erde, so ist der Raum unserer Atmosphäre, welcher in Bezug auf unsere Erde immer derselbe bleibt, bald der eine, bald der andere Theil des absoluten Raumes, in welchen die Atmosphäre übergeht und ändert sich so beständig.

III. Der Ort ist ein Theil des Raumes, welchen ein Körper einnimmt, und, nach Verhältniss des Raumes entweder absolut oder relativ.

Er ist ein Theil des Raumes, nicht aber der Platz oder die Lage des Körpers oder die ihn umgebende Oberfläche. Denn die Orte gleicher fester Körper sind stets einander gleich, wogegen die Oberflächen, wegen der Unähnlichkeit der Gestalt meistentheils ungleich sind. Die Lage eines Körpers hat aber eigentlich gar keine Grösse und ist nicht so sehr ein Ort, als ein Verhältniss des Ortes. Die Bewegung des Ganzen ist identisch mit der Summe der Bewegungen seiner einzelnen Theile, daher die Ortsveränderung des Ganzen identisch mit der Summe der Ortsveränderungen seiner einzelnen Theile. Er befindet sich daher innerhalb des ganzen Körpers.

IV. Die absolute Bewegung ist die Uebertragung des Körpers von einem absoluten Orte nach einem andern absoluten Orte; die relative Bewegung die Uebertragung von einem relativen Orte nach einem andern relativen Orte.

In einem segelnden Schiffe ist der relative Ort eines Körpers die Gegend des Schiffes, in welcher der letztere sich befindet, oder derjenige Theil des ganzen innern Raumes, welchen der Körper ausfüllt und welcher daher gleichzeitig mit dem Schiffe fortbewegt wird. Relative Ruhe ist das Verharren des Körpers in derselben Gegend des Schiffes oder demselben Theile des ganzen innern Raumes. Wahre Ruhe hingegen ist das Verharren des Körpers in demselben Theile jenes unbewegten Raumes, in welchem das Schiff selbst mit seinem hohlen Raume und all seinem Inhalt sich bewegt. Wenn daher die Erde ruhete, so würde der Körper, welcher relativ im Schiffe ruhet, sich wirklich und absolut mit derselben Geschwindigkeit bewegen, mit welcher das Schiff sich bewegt. Bewegt sich hingegen die Erde auch, so entsteht die wahre und absolute Bewegung des Körpers theils aus der relativen Bewegung des Schiffes auf der Erde, theils aus der wahren Bewegung der Erde im unbewegten Raume, theils aus den relativen Bewegungen des Schiffes auf der Erde und des Körpers im Schiffe, und aus den beiden letzteren Bewegungen ergiebt sich die relative Bewegung des Körpers auf der Erde.

Bewegt sich z. B. der Theil der Erde, in welchem das Schiff sich

befindet, gegen Osten mit einer Geschwindigkeit von 10010 Theilen; das durch Wind und Segel angetriebene Schiff hingegen gegen Westen mit einer Geschwindigkeit von 10 Theilen; geht endlich der Schiffer im Schiffe gegen Osten mit einer Geschwindigkeit von 1 Theile: so bewegt sich der letztere *wirklich* und *absolut* im unbewegten Raume gegen Osten mit einer Geschwindigkeit von 10001 Theilen und *relativ* auf der Erde gegen Westen mit einer Geschwindigkeit von 9 Theilen.

Die *absolute* Zeit wird in der Astronomie von der *relativen* durch die Zeitgleichung unterschieden. Die natürlichen Tage, welche gewöhnlich als Zeitmaasse für gleich gehalten werden, sind nämlich eigentlich ungleich. Diese Ungleichheit verbessern die Astronomen, indem sie die Bewegung der Himmelskörper nach der richtigen Zeit messen. Es ist möglich, dass keine gleichförmige Bewegung existire, durch welche die Zeit genau gemessen werden kann, alle Bewegungen können beschleunigt oder verzögert werden; allein der Verlauf der *absoluten* Zeit kann nicht geändert werden. Dieselbe Dauer und dasselbe Verharren findet für die Existenz aller Dinge statt; mögen die Bewegungen geschwind, oder langsam oder Null sein. Ferner wird diese Dauer von ihren durch die Sinne wahrnehmbaren Maassen unterschieden und, mittelst der astronomischen Gleichung aus ihnen entnommen Die Nothwendigkeit dieser Gleichung bei der Bestimmung der Erscheinungen wird aber sowohl durch die Anwendung einer Pendeluhr, als auch durch die Verfinsterungen der Jupiters-Trabanten erwiesen.

Wie die Reihenfolge der Zeittheile, ist auch die der Raumtheile unveränderlich. Bewegt man diese von ihrem Orte, so werden sie (so zu sagen) von sich selbst entfernt. Die Zeiten und die Räume sind die Orte ihrer selbst und aller Dinge; in der Zeit, in Bezug auf die Aufeinanderfolge, im Raume, in Bezug auf die Lage aller Dinge. Das Wesen der Räume ist, dass sie Orte sind; dass ein ursprünglicher Ort bewegt werde, ist absurd. Diese sind daher die absoluten Orte, und aus der Uebertragung von einem Orte zum andern entsteht die absolute Bewegung.

Weil aber diese Theile des Raumes weder gesehen, noch vermittelst unserer Sinne von einander unterschieden werden können, nehmen wir statt ihrer wahrnehmbare Maasse an. Aus der Lage und Entfernung der Dinge von einem Körper, welchen wir als unbeweglich betrachten, erklären wir nämlich alle Orte. Hierauf schätzen wir auch alle Bewegungen in Bezug auf bestimmte Orte, insofern wir wahrnehmen, dass die Körper sich von ihnen entfernen. So bedienen wir uns, und nicht unpassend, in menschlichen Dingen statt der *absoluten* Orte und Bewegungen der *relativen*; in der Naturlehre hingegen muss man von den Sinnen abstrahiren. Es kann nämlich der Fall sein, dass kein wirklich ruhender Körper existirt, auf welchen man die Orte und Bewegungen beziehen könne.

Absolute und relative Ruhe und Bewegung unterscheiden sich von

einander durch ihre Eigenschaften, Ursachen und Wirkungen. Eine Eigenschaft der absoluten Ruhe besteht darin, dass wirklich ruhende Körper unter sich ruhen. Da es nun möglich sein kann, dass irgend ein Körper in der Nähe der Fixsterne oder weit jenseits derselben absolut ruhe, man aber durch die gegenseitige Lage der Körper in unserer Nähe nicht wissen kann, ob einer von diesen gegen jenen entfernten dieselbe Lage behält; so kann die wahre Ruhe aus der Lage dieser unter sich nicht abgeleitet werden.

Eine Eigenschaft der Bewegung besteht darin, dass Theile welche die gegebene Lage gegen das Ganze beibehalten, an der Bewegung des letztern Theil nehmen. Alle Theile sich drehender Körper haben nämlich das Bestreben, sich von der Axe der Bewegung zu entfernen, und der Stoss bewegter Körper entspringt aus den vereinigten Stössen ihrer einzelnen Theile. Wenn daher bewegte Körper sich herumdrehen, so bewegen sich die Theile, welche relativ in den sich drehenden Körpern ruhen. Daher kann man die absolute und wahre Bewegung nicht durch die Uebertragung aus der Nähe von Körpern, welche als ruhende angesehen werden, ableiten. Man kann äussere Körper nicht bloss als ruhende ansehen, sondern sie müssen wirklich ruhen; sonst werden alle eingeschlossenen Theile, ausserdem dass sie aus der Nähe der sich umdrehenden entfernt werden, auch an den wahren Bewegungen der letztern Theil nehmen. Findet diese Entfernung nicht statt, so werden sie doch nicht wahrhaft ruhen, sondern nur als ruhende angesehen werden. Es verhalten sich nämlich die sich umdrehenden Theile zu den eingeschlossenen, wie der äussere Theil des Ganzen zum innern, oder wie die Rinde zum Kern. Wird aber die Rinde bewegt, so bewegt sich auch der Kern, ohne sich aus der Nähe der Rinde zu entfernen, als Theil des Ganzen ebenfalls.

Der vorhergehenden Eigenschaft ist diejenige verwandt, dass, im Fall ein Ort sich bewegt, der in diesem befindliche Körper an dieser Bewegung Theil nimmt; ein Körper, welcher sich aus einem bewegten Orte entfernt, theilt auch die Bewegung seines Ortes. Daher sind alle Bewegungen, welche von bewegten Orten aus erfolgen, nur Theile der ganzen und absoluten Bewegungen. Eine jede ganze Bewegung wird zusammengesetzt aus der Bewegung des Körpers von seinem ersten Orte, aus der Bewegung dieses Ortes von seinem Orte, u. s. w. f., bis man zu einem unbewegten Orte gelangt, wie in dem oben erwähnten Beispiele des Schiffers. Ganze und absolute Bewegungen können daher nur durch unbewegte Orte erklärt werden, und desshalb habe ich diese eben auf unbewegte, die relativen Bewegungen auf bewegte Orte bezogen. Unbewegte Orte sind aber nur solche, welche alle von Ewigkeit zu Ewigkeit dieselbe gegenseitige Lage beibehalten, also immer unbewegt bleiben, und einen Raum bilden, welchen ich unbeweglich nenne.

Die Ursachen, durch welche wahre und relative Bewegungen

verschieden sind, sind die Kräfte, welche zur Erzeugung der Bewegung auf die Körper eingewirkt haben. Eine wahre Bewegung wird nur erzeugt oder abgeändert durch Kräfte, welche auf den Körper selbst einwirken, wogegen relative Bewegungen erzeugt und abgeändert werden können, ohne dass die Kräfte auf diesen Körper einwirken. Es genügt schon, dass sie auf den andern Körper, auf welchen man diesen bezieht, einwirken; weicht der andere Körper alsdann zurück, so ändert sich auch die Beziehung, und hierin besteht eben die relative Ruhe und Bewegung des Körpers. Umgekehrt wird die wahre Bewegung des Körpers stets durch auf ihn einwirkende Kräfte geändert, wogegen die relative Bewegung durch diese Kräfte nicht nothwendig geändert wird. Wirken nämlich dieselben Kräfte auch auf die andern Körper, auf welche man jenen bezieht, so ein, dass die relative Lage beibehalten wird, so bleibt die Beziehung, woraus relative Bewegung hervorgeht, unverändert. Jede relative Bewegung kann sich demnach ändern, wenn die wahre unverändert bleibt und ungeändert bleiben, wenn letztere sich ändert. Daher besteht die wahre Bewegung keineswegs in Beziehungen dieser Art.

Die wirkenden Ursachen, durch welche absolute und relative Bewegungen von einander verschieden sind, sind die Fliehkräfte von der Axe der Bewegung. Bei einer nur relativen Kreisbewegung existiren diese Kräfte nicht, aber sie sind kleiner oder grösser je nach Verhältniss der Grösse der Bewegung.

Man hänge z. B. ein Gefäss an einem sehr langen Faden auf, drehe dasselbe beständig im Kreise herum, bis der Faden durch die Drehung sehr steif wird; hierauf fülle man es mit Wasser und halte es zugleich mit dem letzteren in Ruhe. Wird es nun durch eine plötzlich wirkende Kraft in entgegengesetzte Kreisbewegung versetzt und hält diese, während der Faden sich ablöst, längere Zeit an, so wird die Oberfläche des Wassers anfangs eben sein, wie vor der Bewegung des Gefässes, hierauf, wenn die Kraft allmählig auf das Wasser einwirkt, bewirkt das Gefäss, dass dieses (das Wasser) merklich sich umzudrehen anfängt. Es entfernt sich nach und nach von der Mitte und steigt an den Wänden des Gefässes in die Höhe, indem es eine hohle Form annimmt. (Diesen Versuch habe ich selbst gemacht). Durch eine immer stärkere Bewegung steigt es mehr und mehr an, bis es in gleichen Zeiträumen mit dem Gefässe sich umdreht und relativ in demselben ruhet. Dieses Ansteigen deutet auf ein Bestreben, sich von der Axe der Bewegung zu entfernen, und durch einen solchen Versuch wird die wahre und absolute kreisförmige Bewegung des Wassers, welche der relativen hier ganz entgegengesetzt ist, erkannt und gemessen. Im Anfange, als die relative Bewegung des Wassers im Gefässe am grössten war, verursachte dieselbe kein Bestreben, sich von der Axe zu entfernen. Das Wasser suchte nicht, sich dem Umfange zu nähern, indem es an den Wänden emporstieg, sondern blieb eben, und die wahre kreisförmige

Bewegung hatte daher noch nicht begonnen. Nachher aber, als die relative Bewegung des Wassers abnahm, deutete sein Aufsteigen an den Wänden des Gefässes das Bestreben an, von der Axe zurückzuweichen, und dieses Bestreben zeigte die stets wachsende wahre Kreisbewegung des Wassers an, bis diese endlich am grössten wurde, wenn das Wasser selbst relativ im Gefässe ruhte. Jenes Streben hängt nicht von der Uebertragnng des Wassers in Bezug auf die umgebenden Körper ab, und deshalb kann die wahre Kreisbewegung nicht durch eine solche Uebertragung erklärt werden. Einfach ist die wirkliche kreisförmige Bewegung eines jeden sich umdrehenden Körpers, dem einfachen Streben gleichsam als eigenthümliche und angemessene Wirkung entsprechend. Die relativen Bewegungen sind nach den mannichfachen Beziehungen auf äussere Körper unzählig, als Schatten der Beziehung sind sie aller wahren Wirkungen baar; ausser insofern, als sie an jener einfachen und wahren Bewegung Theil nehmen.

Daher werden nach den Ansichten derjenigen, welche unser Sonnensystem innerhalb des Fixsternhimmels sich umdrehen und die Planeten mit sich führen lassen, die Planeten und einzelnen Theile des Himmels, welche relativ in den ihnen zunächst gelegenen Theilen ruhen, in Wahrheit sich bewegen. Sie ändern nämlich ihre gegenseitige Lage (anders als es bei den wahrhaft ruhenden geschieht) und nehmen, zugleich mit den Theilen des Himmels fortgetragen, an der Bewegung der letztern Theil; sie haben, als Theile rotirender ganzer Systeme, das Bestreben, sich von ihren Axen zu entfernen.

Die relativen Grössen sind daher nicht die Grössen selbst, deren Namen sie tragen, sondern deren wahrnehmbare Maasse (wahre oder irrthümliche), deren man sich gewöhnlich statt der gemessenen Grössen bedient. Sollen aber aus dem Gebrauche die Bedeutungen der Worte definirt werden, so hat man unter den Namen: Zeit, Raum, Ort und Bewegung eigentlich diese wahrnehmbaren Maasse zu verstehen, und die Rede fällt ungewöhnlich und rein mathematisch aus, wenn die gemessenen Grössen hierunter verstanden werden.

Ferner thun diejenigen der heiligen Schrift Gewalt an, welche diese Namen aus den dort aufgeführten gemessenen Grössen übersetzen, aber nicht weniger besudeln diejenigen die Mathematik und die Naturlehre, welche die wahren Grössen mit den relativen und den gewöhnlichen Maassen derselben verwechseln.

Die wahren Bewegungen der einzelnen Körper zu erkennen, und von den scheinbaren scharf zu unterscheiden, ist übrigens sehr schwer, weil die Theile jenes unbeweglichen Raumes, in denen die Körper sich wahrhaft bewegen, nicht sinnlich erkannt werden können. Die Sache ist jedoch nicht gänzlich hoffnungslos. Es ergeben sich nämlich die erforderlichen Hülfsmittel, theils aus den scheinbaren Bewegungen, welche die Unterschiede der wahren sind, theils aus den Kräften, welche den wahren Bewegungen als wirkende Ursachen zu Grunde liegen.

Werden z. B. zwei Kugeln in gegebener gegenseitiger Entfernung mittelst eines Fadens verbunden und so um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt gedreht, so erkennt man aus der Spannung des Fadens das Streben der Kugeln, sich von der Axe der Bewegung zu entfernen und kann daraus die Grösse der kreisförmigen Bewegung berechnen. Brächte man hierauf beliebige gleiche Kräfte an beiden Seiten der Kugeln zugleich an, um die Kreisbewegung zu vergrössern oder zu verkleinern; so würde man aus der vergrösserten oder verminderten Spannung des Fadens die Vergrösserung oder Verkleinerung der Bewegung erkennen und hieraus endlich diejenigen Seiten der Kugeln erkennen können, auf welche die Kräfte einwirken müssten, damit die Bewegung am stärksten vergrössert würde, d. h. die hintere Seite oder diejenige, welche bei der Kreisbewegung nachfolgt. Sobald man aber die nachfolgende und die ihr entgegengesetzte vorangehende Seite erkannt hätte, würde man auch die Richtung der Bewegung erkannt haben. Auf diese Weise könnte man sowohl die Grösse als auch die Richtung dieser kreisförmigen Bewegung in jedem unendlich grossen leeren Raume finden, wenn auch nichts Aeusserliches und Erkennbares sich dort befände, womit die Kugeln verglichen werden könnten. Würden nun in jenem Raume einige sehr entfernte Körper aufgestellt, welche unter sich eine gegebene Lage beibehalten, wie die Fixsterne in der Gegend des Himmels, so könnte man aus der relativen Bewegung der Kugeln unter den Körpern nicht erkennen, ob diesen oder jenen die Bewegung zuzuschreiben sei. Achtet man aber auf den Faden, und findet man seine Spannung so, wie die Bewegung der Kugeln sie erfordert; so kann man daraus schliessen, dass die Kugeln sich bewegen und die Körper ruhen, und wird dann endlich aus der Bewegung der Kugeln unter den Körpern die Richtung der Bewegung folgern. Auf die wahren Bewegungen aus ihren Ursachen, Wirkungen und scheinbaren Unterschieden zu schliessen, und umgekehrt, aus den wahren oder scheinbaren Bewegungen die Ursachen und Wirkungen abzuleiten, wird im Folgenden ausführlicher gelehrt werden. Zu diesem Ende habe ich die folgende Abhandlung verfasst.

Grundsätze oder Gesetze der Bewegung.

1. Gesetz. *Jeder Körper beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.*

Geschosse verharren in ihrer Bewegung, insofern sie nicht durch den Widerstand der Luft verzögert und durch die Kraft der Schwere von ihrer Richtung abgelenkt werden. Ein Kreisel, dessen Theile vermöge der Cohäsion sich beständig aus der geradlinigen Bewegung entfernen, hört nur insofern auf, sich zu drehen, als der Widerstand der Luft (und die Reibung) ihn verzögert. Die grossen Körper der Planeten und Kometen aber behalten ihre fortschreitende und kreisförmige Bewegung, in weniger widerstehenden Mitteln längere Zeit bei.

2. Gesetz. *Die Aenderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.*

Wenn irgend eine Kraft eine gewisse Bewegung hervorbringt, so wird die doppelte eine doppelte, die dreifache eine dreifache erzeugen; mögen diese Kräfte zugleich und auf einmal, oder stufenweise auf einander folgend einwirken. Da diese Bewegung immer nach demselben Ziele, als die erzeugende Kraft gerichtet ist, so wird sie, im Fall dass der Körper vorher in Bewegung war, entweder, wenn die Richtung übereinstimmt, hinzugefügt oder, wenn sie unter einem schiefen Winkel einwirkt, mit ihr nach den Richtungen beider zusammengesetzt.

3. Gesetz. *Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper auf einander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.*

Jeder Gegenstand, welcher einen andern drückt oder zieht, wird eben so stark durch diesen gedrückt oder gezogen. Drückt Jemand einen Stein mit dem Finger, so wird dieser vom Steine gedrückt. Zieht ein Pferd einen an ein Seil befestigten Stein fort, so wird das erstere gleich stark gegen den letzteren zurückgezogen, denn das nach beiden Seiten gespannte Seil wird durch dasselbe Bestreben schlaff zu werden,

das Pferd gegen den Stein und diesen gegen jenes drängen; es wird eben so stark das Fortschreiten des einen verhindern, als das Fortrücken des andern befördern. Wenn irgend ein Körper auf einen andern stösst und die Bewegung des letztern irgendwie verändert, so wird ersterer, in seiner eigenen Bewegung dieselbe Aenderung, nach entgegengesetzter Richtung, durch die Kraft des andern (wegen der Gleichheit des wechselseitigen Druckes) erleiden. Diesen Wirkungen werden die Aenderungen nicht der Geschwindigkeiten, sondern der Bewegungen nämlich bei Körpern, welche nicht anderweitig verhindert sind, gleich. Die Aenderungen der Geschwindigkeiten, nach entgegengesetzten Richtungen, sind nämlich, weil die Bewegungen sich gleich ändern, den Körpern umgekehrt proportional. Es gilt dieses Gesetz auch bei den Anziehungen, wie in der nächsten Anmerkung gezeigt werden wird.

Zusatz. 1. *Ein Körper beschreibt in derselben Zeit, durch Verbindung zweier Kräfte die Diagonale eines Parallelogrammes, in welcher er, vermöge der einzelnen Kräfte die Seiten beschrieben haben würde.*



Fig. 1.

Wird der Körper durch die Kraft M allein von A nach B, und durch die Kraft N allein von A nach C gezogen, so vollende man das Parallelogramm ABDC, und es wird der Körper durch beide vereinten Kräfte in derselben Zeit von A nach D gezogen. Da nämlich die Kraft N längs der Linie AC ∓ BD wirkt, so wird diese Kraft nach dem 2. Gesetz nichts an der Geschwindigkeit ändern, mit welcher sich der Körper, vermöge der Kraft M, jener Linie BD nähert. Der Körper wird daher in derselben Zeit zur Linie BD gelangen, die Kraft N mag einwirken oder nicht, und wird daher am Ende jener Zeit sich irgendwo auf BD befinden. Auf dieselbe Weise folgt, dass er am Ende jener Zeit sich irgendwo auf der Linie CD befinden wird; er muss sich also nothwendig im Punkte D, wo beide Linien zusammentreffen, befinden. Nach dem 1. Gesetz wird er geradlinig von A nach D fortgehen.

Zusatz 2. *Hieraus ergiebt sich die Zusammensetzung der geradlinig wirkenden Kräfte AD, aus irgend welchen zwei schiefwirkenden AB und BD und umgekehrt die Zerlegung einer geradlinigen Kraft AD in die beliebigen schiefen AB und BD. Diese Zusammensetzung und Zerlegung wird in der Mechanik vollständig bestätigt.*

Gehen etwa vom Mittelpunkte O eines Rades ungleiche Radien OM, ON aus, und tragen dieselben an den Fäden MA, NP die Gewichte A und P, so werden die Kräfte gesucht, welche diese Gewichte zur Bewegung des Rades hervorbringen. Durch den Mittelpunkt O ziehe

man die gerade Linie KOL, welche in K und L auf die Richtung der Fäden perpendikulär ist. Aus O beschreibe man mit dem grössern der beiden Abstände OK und OL, hier OL als Radius einen Kreis, welcher den Faden MA in D schneidet. Man ziehe OD, ferner AC ‡ OD und DC perpendikulär auf DO. Da es gleichgültig ist, ob die Punkte K, L, D der Fäden an die Ebene des Rades befestigt sind oder nicht, so werden die Gewichte dasselbe bewirken, man mag sie an den Punkten K und L, oder denen D und L anfügen. Die Kraft des Gewichtes A werde durch die Länge AD ausgedrückt, und dieselbe in die beiden Seitenkräfte AC und CD zerlegt, von denen AC den Radius DO geradlinig vom Centrum fortzieht, und nichts zur Umdrehung des Rades beitragen kann, DC hingegen den Radius DO perpendikulär angreift, und dasselbe bewirkt, als wenn sie perpendikulär auf OL = OD wirkte. Ihre Wirkung wird daher derjenigen der Kraft P gleich sein, wenn

Fig. 2.

$$P : A = CD : DA$$

ist. Da nun

$$\triangle\ ADC \sim DOK,$$

haben wir

$$CD : DA = KO : OD = KO : OL.$$

Demnach werden die Gewichte A und P, welche sich umgekehrt wie die in gerader Linie liegenden Radien OK und OL verhalten, gleiche Intensität besitzen und so im Gleichgewicht stehen. (Dies ist die sehr bekannte Eigenschaft der Wage, des Hebels und der Winde). Ist eines von beiden Gewichten grösser, als diesem Verhältniss entsprechend, so wird seine Kraft, in Bezug auf Drehung des Rades, um so grösser sein.

Hängt das Gewicht p = P theils am Faden Np, und liegt es theils auf der schiefen Ebene pG, so ziehe man pH senkrecht auf den Horizont und NH perpendikulär auf pG, und es kann alsdann die Kraft p, welche durch die Linie pH ausgedrückt wird, in die Seitenkräfte pN und HN zerlegt werden. Ist nun die Ebene pQ perpendikulär auf den Faden pN, und scheidet sie die andere Ebene pG in einer dem Horizonte parallelen Linie; liegt ferner das Gewicht p bloss auf den Ebenen pQ und pG, so wird es gegen diese respective mit den Kräften pN und HN drücken. Entfernt man daher die Ebene pQ, damit das Gewicht den Faden anspanne; so wird dieser, welcher die Stelle der fortgenommenen

Ebene vertritt, durch dieselbe Kraft pN angezogen, welche vorher gegen letztere drückte. Es verhält sich daher die Spannung dieses schiefen Fadens pN zu der des senkrechten PN, wie

pN : pH.

Verhält sich also, wenn OB auf pN perpendikulär gezogen wird,

p : A = OK : OB

und ist zugleich

p : A = pH : pN;

so werden beide gleich viel zur Umdrehung des Rades beitragen und sich gegenseitig im Gleichgewicht halten, wie jeder leicht versuchen kann.

Das Gewicht p, welches auf jenen beiden schiefen Ebenen liegt, befindet sich in derselben Lage, wie ein Keil zwischen den inneren Flächen eines gespaltenen Körpers, und es werden so die Kräfte des Keiles und Hammers bekannt. Nämlich die Kräfte, womit der erstere gegen die Flächen pQ und pG drückt, verhalten sich zu der senkrechten Kraft, mit welcher der Hammer wirkt, wie bezüglich

pN : pH
HN : pH;

also auch die Kräfte, durch welche pQ und pP gedrückt werden, wie

pN : HN.

Auch die Kraft der Schraube wird durch eine ähnliche Zerlegung der Kräfte bestimmt, weil sie (die Schraube) ein mittelst eines Hebels getriebener Keil ist.

Die vielseitige Anwendung dieses Zusatzes ist daher klar, und seine Wahrheit wird um so vielfältiger erwiesen, als die gesammte, von den Schriftstellern auf verschiedenen Wegen dargestellte, Mechanik von dem Gesagten abhängig ist. Hieraus werden nämlich auf leichte Weise die Kräfte der Maschinen abgeleitet, welche aus Rädern, Hebeln, beweglichen Rollen, Schrauben, gespannten Seilen, gerade oder schräg ansteigenden Gewichten und den übrigen mechanischen Potenzen zusammengesetzt zu werden pflegen. Eben so verhält es sich mit den Kräften der Nerven, wodurch die Knochen der Thiere bewegt werden.

Zusatz 3. *Die Grösse der Bewegung, welche man erhält, indem man von der Summe der nach Einer Richtung stattfindenden Bewegungen die Summe der nach entgegengesetzter Richtung stattfindenden subtrahirt, wird durch eine gegenseitige Wirkung der Körper auf einander nicht geändert.*

Nach dem 3. Gesetz ist die Wirkung der Gegenwirkung gleich, und nach dem 2. Gesetz bringen beide in der Bewegung gleiche und entgegengestzte Aenderungen hervor. Findet daher die Bewegung nach derselben Richtung statt, so wird der Theil derselben, welcher dem vorangehenden Körper zugelegt wird, dem nachfolgenden genommen, so dass

die Summe unverändert dieselbe bleibt. Begegnen sich die Körper, so verlieren beide gleich viel von ihrer Bewegung und der Unterschied der, nach entgegengesetzten Richtungen stattfindenden, Bewegungen bleibt derselbe.

Ist etwa ein sphärischer Körper A 3 mal so gross als ein anderer B. hat ersterer eine Geschwindigkeit = 2, letzterer, in derselben Richtung nachfolgend, = 10; so verhält sich die Grösse der Bewegung von A zu der von B, wie

$$2.3 : 1.10 = 6 : 10,$$

und ihre Summe ist = 16. Wenn nun beim Zusammentreffen beider A 3, 4 oder 5 Theile gewinnt, so wird B eben so viele verlieren, demnach A 9, 10 oder 11, B hingegen 7, 6 oder 5 Theile Bewegung besitzen und die Summe beider stets = 16 bleiben. Gewinnt A 9, 10, 11 oder 12 Theile, und schreitet er daher nach dem Zusammentreffen in derselben Richtung mit der Grösse der Bewegung von respective 15, 16, 17, 18 Theilen fort; so verliert B hingegen eben so viel Theile und schreitet nach dem Zusammentreffen respective mit 1 Theil Bewegung in der frühern Richtung fort, er ruhet, oder geht mit 1 Theil oder 2 Theilen Bewegung zurück, nachdem er seine 10 Theile Bewegung und so zu sagen 1 oder 2 Theile mehr verloren hat. Die Summe der Bewegungen beider Körper bleibt dabei stets

$$15 + 1,\ 16 + 0,\ 17 - 1,\ 18 - 2,$$

also unverändert = 16, wie vor dem Zusammentreffen.

Ist aber die Grösse der Bewegung bekannt, mit welcher die Körper nach ihrer Trennung fortschreiten, so erhält man die Geschwindigkeit eines jeden, indem man setzt, dass dieselbe vor und nach dem Zusammentreffen der Grösse der Bewegung vor- und nachher proportional sei Z. B. Im letzten Falle war die

Grösse der Bewegung des Körpers A vor dem Zusammentreffen = 6
" " " " " " nach " " = 18
seine Geschwindigkeit vor " " = 2
" " nach " " = x

daher 6 : 18 = 2 : x. also x = 6.

Sind die Körper entweder nicht sphärisch gestaltet, oder treffen sie, indem sie sich längs verschiedener geraden Linien bewegen, schief auf einander; so muss man, um ihre Bewegung nach der Zurückwerfung zu finden, zuerst die Lage der Ebene bestimmen, welche die Körper im Puncte des Zusammentreffens berührt. Hierauf hat man bei der Bewegung beider Körper (Zusatz 2) zwischen zweien zu unterscheiden, der einen auf diese Ebene perpendikulären, der andern ihr parallelen. Die letztere bleibt in beiden Körpern, weil diese nur längs der auf die Ebene perpendikulären Richtung auf einander wirken, vor und nach dem Zusammentreffen dieselbe, den perpendikulären Bewegungen hingegen muss man gleiche und entgegengesetzte Aenderungen beilegen, so dass die

Summe der nach gleichem Ziele und der Unterschied der nach entgegengesetzten Zielen gerichteten Bewegungen dieselbe wie vorher bleibt.

Aus Zurückwerfungen dieser Art pflegen auch die kreisförmigen Bewegungen der Körper um ihre Mittelpunkte hervorzugeben, aber diese Fälle betrachte ich im Folgenden nicht, und es würde zu weitläufig sein, alles Hierbergehörige zu beweisen.

Zusatz 4. *Der gemeinschaftliche Schwerpunkt zweier oder mehrerer Körper ändert seinen Zustand der Ruhe oder Bewegung durch die Wirkung der Körper unter sich, nicht und ersterer wird daher (unter Ausschliessung äusserer Wirkungen und Hindernisse) entweder ruhen oder sich gleichförmig in gerader Linie bewegen.*

Wenn zwei Punkte nämlich mit gleichförmiger geradliniger Bewegung fortschreiten, und ihr gegenseitiger Abstand in einem gegebenen Verhältniss getheilt wird; so wird der theilende Punkt entweder ruhen, oder sich gleichförmig in gerader Linie fortbewegen. Dies wird später in §. 58. und Zusatz, für die Bewegung in derselben Ebene bewiesen und kann auf dieselbe Weise für die Bewegung im Raume dargethan werden. Bewegen sich daher beliebig viele Körper gleichförmig in graden Linien fort, so wird der gemeinschaftliche Schwerpunkt zweier beliebigen von ihnen entweder ruhen, oder gleichförmig und geradlinig fortschreiten, weil die Linie, welche die Schwerpunkte dieser Körper verbindet, durch den gemeinschaftlichen Schwerpunkt in einem gegebenen Verhältniss getheilt wird. Auf dieselbe Weise wird der gemeinschaftliche Schwerpunkt dieser beiden und eines beliebigen dritten Körpers entweder ruhen, oder sich gleichförmig und geradlinig fortbewegen, weil dieser Schwerpunkt die Verbindungslinie vom Schwerpunkte des dritten Körpers mit dem gemeinschaftlichen Schwerpunkte der beiden erstern in einem gegebenen Verhältnisse theilt. Ebenso verhält es sich mit dem gemeinschaftlichen Schwerpunkte dieser drei Körper und eines vierten, u. s. w. f. in's Unendliche.

In einem Systeme von Körpern, welche so wohl von allen gegenseitigen, als auch von allen, von aussen her angebrachten Wirkungen frei sind und daher einzeln gleichförmig und geradlinig sich bewegen, wird der gemeinschaftliche Schwerpunkt entweder ruhen, oder sich gleichförmig und geradlinig bewegen.

Da ferner in dem Systeme zweier Körper, welche auf einander wirken, die Abstände der Schwerpunkte beider vom gemeinschaftlichen Schwerpunkte sich indirect wie die Körper verhalten, so werden ihre relativen Bewegungen, womit sie sich dem gemeinschaftlichen Schwerpunkte nähern oder von ihm entfernen, einander gleich sein. Eben so wird dieser Schwerpunkt durch gleiche und entgegengesetzte Aenderungen in den Bewegungen, also durch die Wirkungen dieser Körper auf einander, weder beschleunigt noch verzögert, noch erleidet er eine Aende-

rung in seinem Zustande der Ruhe oder der Bewegung. In einem Systeme mehrerer Körper ändert der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller niemals seinen Zustand der Ruhe oder der Bewegung, wenn je zwei Körper unter sich auf einander wirken. Denn der gemeinschaftliche Schwerpunkt dieser beiden ändert in Folge jener Wirkung keineswegs seinen Zustand, der Schwerpunkt der übrigen erleidet gar nichts von derselben, weil sie sich nicht auf sie erstreckt. Der Abstand dieser beiden besondern Schwerpunkte wird nun aber durch den gemeinschaftlichen Schwerpunkt aller Körper in Stücke getheilt, welche den Summen der Körper, deren Schwerpunkte jene sind, indirect proportional sind. Da nun jene beiden Schwerpunkte ihren Zustand der Ruhe oder der Bewegung beibehalten, so ist dasselbe beim gemeinschaftlichen Schwerpunkte aller der Fall. In einem solchen Systeme sind aber alle Wirkungen entweder zwischen je zwei Körpern, oder aus den Wirkungen zwischen je zweien zusammengesetzt, und sie werden daher niemals auf die Aenderung des Zustandes der Ruhe oder der Bewegung, in welchem der gemeinschaftliche Schwerpunkt sich befindet, von Einfluss sein. Da der letztere, wenn jene Körper nicht auf einander wirken, entweder ruhet oder längs irgend einer geraden Linie gleichförmig fortschreitet, so wird er darin fortfahren, ohne dass die Wirkungen der Körper unter sich hinderlich sind, wenn er nicht durch von aussen her angebrachte Kräfte aus seinem Zustande herausgebracht wird. Es findet daher für ein System von Körpern dasselbe Gesetz, in Bezug auf das Verharren im Zustande der Ruhe oder der Bewegung, statt, welches für einzelne Körper gilt. Die fortschreitende Bewegung sowohl eines einzelnen Körpers, als auch eines Systemes mehrerer Körper muss nämlich stets nach der Bewegung des Schwerpunktes abgeschätzt werden.

Zusatz 5. *Körper, welche in einen gegebenen Raum eingeschlossen sind, haben dieselbe Bewegung unter sich; dieser Raum mag ruhen oder sich gleichförmig und geradlinig, nicht aber im Kreise fortbewegen.*

Die Unterschiede der Bewegungen nach derselben Seite und die Summe derer nach entgegengesetzter Richtung sind nämlich (der Annahme zufolge) anfangs in beiden Fällen dieselben, und aus diesen Unterschieden oder Summen entspringen Bewegungen und Stösse, durch welche die Körper auf einander wirken. Es werden daher nach dem 2. Gesetz die Wirkungen des Zusammentreffens in beiden Fällen gleich sein, und desshalb die Bewegungen unter sich in dem einen Falle gleich bleiben den Bewegungen unter sich im andern Falle. Dasselbe kann durch einen Versuch deutlich erwiesen werden. Alle Bewegungen finden auf dieselbe Weise in einem Schiffe statt, mag dieses ruhen, oder sich gleichförmig und geradlinig fortbewegen.

Zusatz 6. *Wenn Körper sich unter einander auf irgend eine Weise bewegen, und gleiche beschleunigende Kräfte nach paral-*

lelen Richtungen auf sie einwirken; so fahren alle fort, sich auf dieselbe Weise unter einander zu bewegen, als wenn sie nicht durch jene Kräfte angetrieben würden.

Jene Kräfte werden nämlich, indem sie gleich stark (nach Verhältniss der Grösse der zu bewegenden Körper) und nach parallelen Richtungen wirken, alle Körper (was die Geschwindigkeit betrifft) nach dem 2. Gesetz gleich fortbewegen, und daher nie die Bewegung und Lage unter einander ändern.

Anmerkung.

Bis jetzt habe ich die Principien dargestellt, welche von den Mathematikern angenommen, und durch vielfältige Versuche bestätigt worden sind. Durch die zwei ersten Gesetze und die zwei ersten Zusätze fand Galilei, dass der Fall schwerer Körper im doppelten Verhältniss der Zeit stehe, und dass die Bewegung der geworfenen Körper in Parabeln erfolge; übereinstimmend mit der Erfahrung, in so weit jene Bewegungen nicht durch den Widerstand der Luft etwas verzögert werden. Von denselben Gesetzen und Zusätzen sind die Beweise abhängig, welche in Betreff der Dauer der Pendelschwingungen, unterstützt durch die tägliche Erfahrung an den Uhren, aufgestellt worden sind. Wenn ein Körper fällt, so flösst ihm die gleichförmige Schwere, indem sie in den einzelnen gleichen Zeittheilchen gleich stark wirkt, gleiche Kräfte ein und erzeugt gleiche Geschwindigkeiten. In der ganzen Zeit flösst sie die ganze Kraft ein und erzeugt die ganze Geschwindigkeit, beide der Zeit proportional. Die in proportionalen Zeiten beschriebenen Wege verhalten sich aber, wie die Geschwindigkeiten und die Zeiten zusammengesetzt, d. h. sie stehen im doppelten Verhältniss der Zeiten. Wird ein Körper aufwärts geworfen, so flösst ihm die gleichförmige Schwere Kräfte ein, und nimmt ihm den Zeiten proportionale Geschwindigkeiten. Die Zeit des Aufsteigens zur grössten Höhe verhält sich wie die fortzunehmenden Geschwindigkeiten und jene Höhen, wie die Geschwindigkeiten und Zeiten zusammengesetzt, oder sie stehen im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeiten. Die Bewegung eines längs einer geraden Linie geworfenen Körpers, welche aus dem Wurfe hervorgehen muss, wird mit der Bewegung zusammengesetzt, die aus der Schwere entspringt.

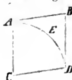


Fig. 3.

Könnte der Körper A, vermöge der Wurfbewegung allein, in einer gegebenen Zeit die gerade Linie AB beschreiben, und vermöge der Fallbewegung allein, in derselben Zeit die Höhe AC zurücklegen; so wird er sich, wenn man das Parallelogramm ABDC vollendet, bei zusammengesetzter Bewegung, am Ende jener Zeit im Punkte D befinden. Die Curve AED, welche er beschreibt, ist eine Parabel, welche AB in A berührt, und deren Ordinate BD proportional AB^2 ist. Aus denselben Gesetzen und dem dritten haben Christoph

Wren, Johann Wallis und Christian Huygens, die ersten Geometer unseres Jahrhunderts, die Regeln für den Zusammenstoss und die Zurückwerfung zweier Körper, jeder für sich gefunden und fast zu derselben Zeit der Königlichen Societät mitgetheilt, wobei sie (was die Gesetze betrifft) durchaus mit einander übereinstimmten. Zuerst machte Wallis, hierauf Wren und dann Huygens seine Erfindung bekannt und der zweite zeigte der Societät die Richtigkeit seiner Erfindung an einem Pendelversuche, den der berühmte Mariotte in seinem eigenen Werke aus einander zu setzen, für würdig erachtete. Damit dieser Versuch aufs schärfste mit der Theorie übereinstimme, muss man so wohl auf den Widerstand der Luft, als auf die Elasticität der zusammenstossenden Körper Rücksicht nehmen.

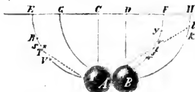


Fig. 4.

Es hängen zwei Körper A und B an den parallelen und gleichen Fäden CA und DB von den Mittelpunkten C und D herab. Von diesen Mittelpunkten und mit diesen Halbmessern werden die Halbkreise EAF und GBH beschrieben, welche durch die Halbmesser CA und DB halbirt werden. Nun bringe man den Körper A nach dem beliebigen Punkte R des Bogens EAF, und lasse ihn von dort, nachdem B fortgenommen ist, fallen; er möge nach Zurücklegung einer Schwingung zum Punkte V zurückkehren. Alsdann ist RV die durch den Widerstand der Luft bewirkte Verzögerung. Ist nun $ST = \frac{1}{4} RV$ und in der Mitte von RV liegend, dergestalt dass

$$RS = TV$$

und

$$RS : ST = 3 : 2;$$

so drückt dieser Bogen ST sehr nahe die Verzögerung aus, welche der Widerstand der Luft, während des Herabfallens von S bis A hervorbringt.[1]) Hierauf bringe man den Körper B wieder an seine Stelle zurück. Fällt der Körper A jetzt von S herab, so wird seine Geschwindigkeit im Zurückwerfungspunkte A ohne merklichen Fehler eben so gross sein, als wenn er im luftleeren Raume vom Punkte T herabgefallen wäre. Diese Geschwindigkeit kann man durch die Sehne TA darstellen; denn es ist ein bekannter Satz der Geometrie, dass die Geschwindigkeit eines Pendels im tiefsten Punkte sich wie die Sehne des durchlaufenen Bogens verhält. Nachdem die Körper einander zurückgeworfen haben, gelange A nach s und B nach k, und während B fortgenommen wird, falle A von v herab und gelange nach Zurücklegung einer Schwingung bis r zurück. Ist dann

$$st = \frac{1}{4} rv$$

und in der Mitte von rv gelegen, dergestalt dass

$$rs = tv;$$

so stellt die Sehne sA sehr nahe die Geschwindigkeit dar, welche der Körper A nach der Zurückwerfung im Punkte A hatte, indem t jenen wahren und verbesserten Ort bezeichnet, zu welchem A ohne den Widerstand der Luft hätte gelangen müssen. Nach derselben Methode kann man den Ort k verbessern, zu welchem B aufsteigt, und den Ort t bestimmen, zu welchem er im leeren Raume aufgestiegen sein würde. Auf diese Weise kann man alle Versuche so anstellen, als ob wir uns im luftleeren Raume befänden. Endlich muss man den Körper A auf die Sehne TA, welche seine Geschwindigkeit darstellt, beziehen, um seine Bewegung im Punkte A, unmittelbar vor dem Zusammentreffen, hierauf auf die Sehne tA, um dieselbe unmittelbar nach der Zurückwerfung zu bestimmen. Eben so hat man den Körper B auf die Sehne lB zu beziehen, um seine Bewegung unmittelbar nach der Zurückwerfung zu erhalten.

Nach derselben Methode muss man, im Fall die Körper von verschiedenen Orten herabfallen, die Bewegung beider vor und nach der Zurückwerfung suchen, und erst dann die Bewegung beider mit einander vergleichen, um die Wirkungen des Zusammentreffens zu erforschen.

Auf diese Weise habe ich mit Pendeln von 10' Länge Versuche angestellt, und zwar so wohl mit gleichen als ungleichen Körpern. Hierbei richtete ich es so ein, dass die Körper aus sehr weiten Entfernungen von 8', 12' oder 16' zusammentrafen und fand, wenn die Körper sich gegenseitig direct begegneten, stets ohne einen Fehler von 3'', wie gross die Aenderung der Bewegung beider Körper nach entgegengesetzten Richtungen war; ferner auch, dass die Wirkung der Gegenwirkung stets gleich war. Fiel A auf den ruhenden Körper B mit 9 Theilen Bewegung und ging er mit Verlust von 7 Theilen, nach der Zurückwerfung mit 2 Theilen weiter; so sprang B mit jenen 7 Theilen zurück.

Begegneten beide einander, A mit 12, B mit 6 Theilen, und ging ersterer mit 2 Theilen zurück, so kehrte der letztere mit 8 um, in dem beiderseits 14 Theile fortgenommen waren. Werden nämlich von der Bewegung des Körpers A 12 Theile fortgenommen, so bleibt gar keine übrig und nimmt man noch 2 mehr fort, so erfolgt eine Bewegung von 2 Theilen in entgegengesetzter Richtung. Ebenso erhält B, nach Fortnahme von 14 Theilen von seinen 6 Theilen Bewegung, nach entgegengesetzter Richtung eine Bewegung von 8 Theilen.

Bewegten sich die Körper nach derselben Richtung, A geschwinder mit 14, B langsamer mit 5 Theilen, und bewegte sich ersterer nach dem Zusammentreffen mit 5 Theilen weiter; so hatte B eine Bewegung = 14, nachdem 9 Theile von A auf B übertragen waren u. s. w. f. Durch das Zusammentreffen und Stossen beider Körper wurde die Grösse der Bewegung niemals geändert, wie man aus der Summe der nach derselben, und dem Unterschiede der nach entgegengesetzten Richtungen stattfindenden Bewegungen schloss; denn einen Fehler von 1 bis 2'' möchte ich der Schwierigkeit, alles Einzelne hinreichend genau auszuführen, zu-

schreiben. Schwierig war es, sowohl die Pendel gleichzeitig loszulassen, damit die Körper sich im untersten Punkte AB berührten, als auch die Punkte s und k zu bezeichnen, zu denen die Körper nach dem Zusammentreffen aufstiegen. Aber auch in den Bällen selbst brachte ungleiche Dichtigkeit der Theile, und eine aus andern Ursachen ungleiche Textur Fehler hervor.

Damit nun niemand den Einwurf mache, die Regel, zu deren Beweis dieser Versuch erdacht worden ist, setze entweder absolut harte oder wenigstens vollkommen elastische Körper voraus, welche man in der Natur nicht findet; so füge ich hinzu, dass die beschriebenen Versuche eben so sehr bei weichen, als harten Körpern erfolgen und daher keineswegs von der Bedingung der Härte abhängen. Will man nämlich den Versuch mit nicht vollkommen harten Körpern anstellen, so hat man nur die Zurückwerfung in einem bestimmten Verhältniss, nach der Grösse der elastischen Kraft, zu vermindern. In der Theorie von Wren und Huygens kehrten absolut harte Körper von einander, mit der Geschwindigkeit des Zusammentreffens zurück. Bestimmter wird dies bei vollkommen elastischen Körpern bestätigt. Bei unvollkommen elastischen Körpern ist die Geschwindigkeit der Rückkehr zugleich mit der elastischen Kraft zu vermindern, weil diese (ausser wenn die Theile des Körpers beim Zusammentreffen verletzt werden, oder irgend eine Ausdehnung, wie unter dem Hammer, erleiden) gewiss und bestimmt ist und bewirkt, dass die Körper von einander mit einer relativen Geschwindigkeit zurückkehren, welche zu der relativen Geschwindigkeit des Zusammentreffens in einem gegebenen Verhältniss steht. Dies habe ich mit Bällen versucht, welche aus Wolle zusammengewickelt und fest zusammengedrückt waren.

Indem ich zuerst die Pendel losliess und die Grösse der Zurückwerfung mass, fand ich die Grösse der elastischen Kraft. Hierauf bestimmte ich durch diese Kraft die Grösse der Zurückwerfung in andern Fällen des Zusammentreffens, und die Versuche stimmten hiermit überein. Die Bälle kehrten von einander mit einer relativen Geschwindigkeit zurück, welche sich zu der des Zusammentreffens ungefähr wie

$$5 : 9$$

verhielt. Fast dieselbe Geschwindigkeit fand bei Bällen von Stahl statt, während sie bei andern von Kork ein wenig geringer war. Bei gläsernen war das Verhältniss ungefähr wie

$$15 : 16.$$

Auf diese Weise ist das 3. Gesetz, so weit es den Stoss und die Zurückwerfung betrifft, durch die Theorie bewiesen und die Erfahrung stimmt damit vollkommen überein.

Bei den Anziehungen zeige ich die Sache folgendermaassen. Zwischen zwei Körpern A und B, welche sich gegenseitig anziehen, denke man sich ein Hinderniss aufgestellt, wodurch ihr Zusammentreffen unmöglich wird. Wird A stärker gegen B, als dieser gegen jenen gezogen,

so wird das Hinderniss stärker durch A als durch B gedrückt und daher nicht im Gleichgewicht bleiben. Der stärkere Druck wird überwiegend sein und bewirken, dass das aus beiden Körpern und dem Hinderniss zusammengesetzte System sich geradlinig nach B hin bewegt, und im freien Raume mit einer beschleunigten Bewegung ins Unendliche fortgeht. Dies ist absurd und widerspricht dem ersten Gesetze, nach welchem das System in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung verharren müsste. Die Körper werden daher gleich stark gegen das Hinderniss drücken und gegen einander gezogen werden. Ich habe dies mit einem Magneten und einem Eisenstabe versucht. Befinden sich beide in zwei besonderen Gefässen, welche im ruhigen Wasser neben einander schwimmen, so stossen sie einander nicht fort, sondern suchen durch die beiderseitige gleiche Anziehung fortwährend einander näher zu kommen, und bleiben, wenn sie endlich in den Zustand des Gleichgewichts getreten sind, in Ruhe. So findet auch die Schwere zwischen der Erde und ihren Theilen welchselseitig statt. Man schneide die Erde FJ durch eine beliebige Ebene EG in die beiden Stücke EGF und EGJ; alsdann werden die wechselseitigen Gewichte derselben einander gleich sein. Wenn man nämlich durch eine andere Ebene

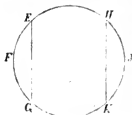


Fig. 5.

$$HK \neq EG$$

das grössere Stück EJG in die zwei Theile EGKH und HKJ zerlegt, von denen

$$HKJ = EGF \text{ ist;}$$

so wird offenbar das mittlere Stück EGKH durch sein eigenes Gewicht nach keinem der beiden äussern sich hinneigen, sondern zwischen ihnen so zu sagen im Gleichgewicht schwehen und ruhen. Der äussere Theil HKJ liegt aber mit seinem ganzen Gewichte auf dem mittlern, und drängt diesen gegen den andern äussern EGF. Daher wird die Kraft, womit die Summe der Theile

$$HKJ + EGKH,$$

oder der ganze Theil EGJ gegen den Theil EGF gezogen wird, gleich dem Gewicht von HKJ, d. h. gleich dem des Theiles EGF. Die wechselseitigen Gewichte beider Theile EGJ und EGF sind demnach einander gleich; wäre dies nicht der Fall, so müsste die im freien Aether schwimmende Erde dem grössern Gewichte nachgeben und vor ihm fliehend sich in's Unendliche entfernen.

So wie Körper, deren Geschwindigkeiten sich indirect wie die ihnen innewohnenden Kräfte verhalten, beim Zusammenstossen und bei der Zurückwerfung gleich vermögend sind, so vermögen in den mechanischen Instrumenten die bewegenden Kräfte dasselbe, und halten sich bei entgegengesetzten Bestrebungen einander im Gleichgewicht, wenn die Geschwindigkeiten sich indirect wie die Kräfte verhalten. So sind

Gewichte gleich fähig, die Arme einer Wage zu bewegen, wenn sie beim Schwingen der letztern sich indirect wie ihre Geschwindigkeiten auf- und abwärts verhalten, d. h. Gewichte, welche gradlinig auf- und absteigen, sind gleichvermögend, wenn sie sich indirect wie die Abstände ihrer Aufhängepunkte von der Axe verhalten. Steigen sie auf schiefen Ebenen oder andern angebrachten Gegenständen schräg auf und ab, so sind sie gleichvermögend, wenn sie sich indirect wie die vertikalen Auf- und Absteigungen verhalten, und zwar wie die vertikalen, weil diese die Richtung der Schwere angeben. Eben so wird bei der Winde oder der Hebemaschine die Kraft der Hand, welche das Seil geradlinig anzieht, die Last im Gleichgewicht erhalten, wenn sie sich zu der gerade oder schräg ansteigenden Last indirect verhält, wie die Geschwindigkeit der Hand zur Geschwindigkeit der perpendikulär ansteigenden Last. Bei Uhren und ähnlichen Instrumenten, welche aus kleinen Rädern zusammengesetzt sind, halten die Kräfte zur Fortbewegung und Hemmung der Räder sich gegenseitig im Gleichgewicht, wenn sie sich indirect wie die Geschwindigkeiten der Räder verhalten, an denen sie angebracht sind. Die Kraft der Schraube einer Presse verhält sich zur Kraft der Hand, welche die Mutter umdreht, wie die kreisförmige Bewegung der letztern zur fortschreitenden Geschwindigkeit der Presse gegen den Körper. Die Kräfte, mit denen der Keil gegen beide Seiten eines gespaltenen Holzes drückt, verhalten sich zur Kraft des Hammers gegen den Keil, wie die Geschwindigkeit des letztern nach der Richtung, in welcher der Schlag des Hammers erfolgt, zu der Geschwindigkeit, mit welcher die Theile des Holzes, senkrecht gegen die Seiten der Keils, aus einander weichen. Eben so verhält es sich mit allen Maschinen. Die Wirkung und der Gebrauch derselben besteht darin, dass wir durch Verminderung der Geschwindigkeit die Kraft vermehren, und umgekehrt, wodurch in geeigneten Instrumenten jeder Art die Aufgabe gelöst wird: eine gegebene Last durch eine gegebene Kraft zu bewegen, oder irgend einen gegebenen Widerstand durch eine gegebene Kraft zu überwinden.

Werden die Maschinen so gebaut, dass die Geschwindigkeit des wirkenden und des widerstehenden Theiles sich indirect wie die Kräfte verhalten; so wird die wirkende Kraft dem Widerstande das Gleichgewicht halten, und ist erstere grösser, so wird sie den letzteren überwinden. Ist sie so bedeutend grösser, dass auch aller derjenige Widerstand überwunden wird, welcher aus der Reibung der zusammenhängenden und über einander gleitenden Körper, aus der Cohäsion der zusammenhängenden und von einander zu trennenden Körper und endlich aus den zu hebenden Gewichten zu entspringen pflegt: so wird nach Ueberwindung jedes Widerstandes die überflüssige Kraft eine ihr selbst proportionale Beschleunigung der Bewegung theils in den Theilen der Maschine, theils im widerstehenden Körper hervorbringen.

Uebrigens ist es nicht unsere Absicht, die Mechanik hier zu behandeln, wir wollten nur zeigen, wie weit das dritte Gesetz sich erstreckt

und mit welcher Bestimmtheit es stattfindet. Denn wenn die Wirkung nach der wirkenden Ursache, nach der Kraft und Geschwindigkeit vereint abgeschätzt wird, und man die Gegenwirkung nach der Geschwindigkeit der einzelnen Theile und den aus der Reibung, Cohäsion, dem Gewicht und der Beschlennigung hervorgehenden widerstehenden Kräften bestimmt; so werden Wirkung und Gegenwirkung bei jedem Gebrauch von Instrumenten einander stets gleich sein. Wie weit auch die wirkende Ursache vermittelst des Instrumentes fortgepflanzt, und zuletzt an jedem widerstehenden Körper angebracht werde; nach der letzten Bestimmung wird sie immer der Gegenwirkung gleich sein.

Von der Bewegung der Körper.

ERSTES BUCH.

ABSCHNITT I.

Von der Methode der ersten und letzten Verhältnisse, vermittelst deren das Folgende bewiesen wird.

§. 1. Lehnsatz. Grössen, wie auch Verhältnisse von Grössen, welche in einer gegebenen Zeit sich beständig der Gleichheit nähern und einander vor dem Ende jener Zeit näher kommen können, als jede gegebene Grösse, werden endlich einander gleich.

Wollte man dies bestreiten, so sei ihr letzter Unterschied = D. Sie könnten sich daher der Gleichheit nicht weiter nähern, als bis auf den gegebenen Unterschied, was gegen die Voraussetzung ist.

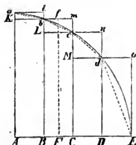


Fig 6.

§. 2. Lehnsatz. Werden in der beliebigen Figur AacE, welche durch die geraden Linien Aa, AE und die Curve acE begrenzt ist, beliebig viel Parallelogramme Ab, Bc, Cd etc. auf gleichen Grundlinien AB, BC, CD, etc. und den Seiten Bb, Cc, Dd, etc. ∓ Aa beschrieben; fügt man hierauf die Parallelogramme

aKbl, bLcm, cMdn, etc.

hinzu; vermindert man ferner die Breite AB = BC = CD etc. dieser Parallelogramme und vermehrt man zugleich ihre Anzahl bis ins unendliche: so wird zuletzt die eingeschriebene Figur gleich der umschriebenen, gleich der krummlinigen Figur, d. h.

AKbLcMdD = AalbmcndoE = AabcdE.

Der Unterschied der eingeschriebenen und umschriebenen Figur ist nämlich

= aKbl + bLcm + cMdn + dDeo

= AalB,

weil AB = BC = CD = DE. AalB wird aber dadurch, dass man seine

Breite AB bis ins Unendliche vermindert, kleiner als jede angebbare Grösse; mithin werden (nach §. 1.) die eingeschriebene und die umschriebene, und noch weit mehr die zwischen beiden liegende krummlinige Figur einander gleich. W. z. b. w.

§. 3. Lehnsatz. Die letzten Verhältnisse dieser drei Figuren werden auch dann einander gleich, wenn die Breiten AB, BC, CD etc. der Parallelogramme ungleich sind und dieselben alle bis ins Unendliche verkleinert werden.

Es sei AF die grösste Breite, und man vollende das Parallelogramm FAKf. Dasselbe wird grösser sein, als der Unterschied zwischen der eingeschriebenen und der umschriebenen Figur, und wenn man seine Breite AF in's Unendliche vermindert, wird es selbst kleiner als jedes angebbare Rechteck. W. z. b. w.

Zusatz 1. Die letzte Summe der verschwindenden Parallelogramme fällt daher in jeder Beziehung mit der krummlinigen Figur zusammen.

Zusatz 2. Noch weit mehr fällt die geradlinige, von den zu den entsprechenden Bogen gehörigen Sehnen ab, bc, cd etc. eingeschlossene Figur zuletzt mit der krummlinigen zusammen.

Zusatz 3. Dasselbe gilt von der geradlinigen Figur, welche durch die, den Sehnen entsprechenden, Tangenten begrenzt ist.

Zusatz 4. Daher sind diese letzten Figuren, was den Umfang acE betrifft, nicht geradlinige, sondern krummlinige Grenzen gerader Linien.

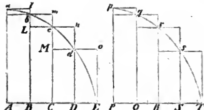


Fig. 7. Fig. 8.

§. 4. Lehnsatz. Wenn in zwei Figuren AacE, PprT wie vorhin zwei Reihen Parallelogramme, deren Anzahl in beiden gleich, eingeschrieben und ihre Breiten ins Unendliche vermindert werden; wenn ferner die letzten Verhältnisse der einzelnen Parallelogramme in der einen Figur zu den einzelnen in der andern dieselben sind: so stehen beide Figuren AacE und PprT zu einander in demselben Verhältniss.

Da nämlich die Summe der einzelnen Parallelogramme sich wie diese verhalten, so stehen beide Figuren in demselben Verhältniss, indem nach §. 3. die Summe der Parallelogramme in jeder Figur zu dieser selbst im Verhältniss der Gleichheit steht.

Zusatz. Theilt man daher zwei Grössen beliebiger Art in dieselbe beliebig grosse Anzahl Theile, und haben diese bei unendlicher Vermehrung ihrer Anzahl und unendlicher Verminderung ihrer Grösse, zu einander, nämlich der erste zum ersten, der zweite zum zweiten, u. s. w. f. ein gegebenes Verhältniss; so stehen die ganzen Grössen zu einander in demselben Verhältniss. Werden nämlich in den Figuren dieses Lehnsatzes die Parallelogramme untereinander als Theile betrachtet, so sind

die Summen der Theile immer als Summen der Parallelogramme anzusehen. Mithin stehen diese Summen, bei unendlicher Vermehrung der Anzahl und unendlicher Verminderung der Grösse der Parallelogramme in demselben Verhältniss wie die Parallelogramme, d. h. nach der Voraussetzung, in dem letzten Verhältniss des einen Theils zum andern.

§. 5. **Lehnsatz.** Alle einander correspondirenden Seiten ähnlicher Figuren sind proportional, sowohl die krumm- als die gradlinigen, und ihr Flächeninhalt verhält sich wie die Quadrate der Seiten.

§. 6. **Lehnsatz.** Wird ein der Lage nach gegebener Bogen ACB durch die Sehne AB unterspannt, und in irgend einem Punkte A, in der Mitte der continuirlichen Krümmung durch die gerade Linie AD berührt; nähern sich hierauf die Punkte A und B einander und treffen sie endlich zusammen: so wird der Winkel BAD, welchen Sehne und Tangente mit einander bilden, in's Unendliche vermindert und verschwindet zuletzt.



Fig. 9.

Verschwände der Winkel nicht, so würde der Bogen ACB mit der Tangente AD einen Winkel einschliessen, welcher einem gradlinigen gleich wäre und es würde die Krümmung im Punkte A nicht stetig sein, was gegen die Voraussetzung ist. Oder auch: Verlängert man AB bis b und AD bis d, so muss, wenn A und B zusammenfallen, und kein Theil AB von Ab mehr innerhalb der Curve liegt, die gerade Linie Ab entweder mit der Tangente Ad zusammenfallen, oder zwischen der Tangente und der Curve gezogen werden. Der letzte Fall ist gegen die Natur der Krümmung, daher findet der erstere statt. W. z. b. w.

§. 7. **Lehnsatz.** Bei denselben Voraussetzungen ist das letzte Verhältniss des Bogens, der Sehne und der Tangente zu einander das der Gleichheit.

Wir verlängern, während B sich A nähert, AB und AD bis nach b und d, und ziehen

$$bd \mp BD,$$

und es sei stets Bogen

$$ACB \sim Acb.$$

Fallen nun die Punkte A und B zusammen, so verschwindet nach §. 6. der Winkel dAb; folglich fallen die geraden Linien Ab, Ad und der zwischenliegende Bogen Acb zusammen und sind daher einander gleich. Daher werden auch die denselben proportionalen, geraden Linien AB, AD und der Bogen ACB, verschwinden und als letztes Verhältniss das der Gleichheit haben. W. z. b. w.

Zusatz 1. Zieht man

$$BF \mp AD,$$

und schneidet BF die beliebige Linie AF in F, so hat BF zum verschwindenden Bogen AB zuletzt das Verhältniss der Gleichheit.



Fig. 10.

Es ist nämlich nach Vollendung des Parallelogrammes AFBD

BF = BD.

Zusatz 2. Werden durch B und A beliebige gerade Linien BD, BE, AF, AG gezogen, welche die Tangente AD und die ihr parallele Linie BF in den Punkten D, E, F, G schneiden; so wird das letzte Verhältniss aller Abscissen AD, AE, BF, BG, der Sehne AB und des Bogens ACB das der Gleichheit.

Zusatz 3. Daher kann bei jedem die letzten Verhältnisse betreffenden Beweise, jede dieser Linien gegenseitig statt der andern gesetzt werden.

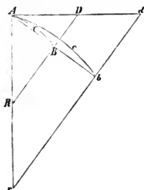


Fig. 11.

§. 8. Lehnsatz. Bilden die gegebenen geraden Linien AB und BR mit dem Bogen ACB, der Sehne AB und der Tangente AD die Dreiecke

ACBR, ABR, ADR,

und nähern sich die Punkte A und B einander gegenseitig; so wird die letzte Form dieser einander ähnlich und ihr letztes Verhältniss das der Gleichheit.

Man verlängere AB, AD, AR bis b, d, r, ziehe

rbd ∥ RBD

und

⌒ Acb ∾ ACB.

Fallen nun die Punkte A und B zusammen, so verschwindet der Winkel bAd, es fallen daher die Dreiecke

Acbr, Abr, Adr

zusammen, und sind einander congruent; folglich werden auch die ihnen ähnlichen Dreiecke

ACBR, ABR, ADR

einander congruent. W. z. b. w.

Zusatz. Diese Dreiecke können mithin überall, wo es sich hier um ihre letzten Verhältnisse handelt, statt einander gesetzt werden.

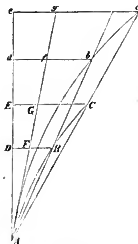


Fig. 12.

§. 9. Lehnsatz. Die ihrer Lage nach gegebene Curve ABC und gerade Linie AE schneiden sich im Punkte A, und zu den Abcissen AD, AE gehören die Ordinaten DB, EC. Lässt man nun die Punkte B und C dem A sich nähern, so stehen die Dreiecke ADB und AEC zuletzt im doppelten Verhältniss der Seiten.

Man nehme nämlich auf der verlängerten Linie AD die Punkte d und e dergestalt an, dass

$$AD : AE = Ad : Ae$$

und die zugehörigen Ordinaten

$$DB : db = EC : ec \text{ seien.}$$

Ferner verlängere man AC bis c, und ziehe

$$Abc \backsim ABC$$

und die Tangente Ag an beiden Curven, welche die Ordinaten in

F, G, f, g

schneidet. Fallen nun die Punkte B und C mit A zusammen, so verschwindet der Winkel cAg, und es fallen die krummlinigen Figuren

Abd, Ace

mit den geradlinigen

Afd, Age

zusammen. Nach §. 5. werden sie sich daher verhalten, wie

$$Ad^2 : Ae^2.$$

Diese Flächen Abd. Ace sind aber stets proportional den Flächen ABD, ACE, und die Seiten Ad, Ae den Seiten AD, AE. Es ergieht sich daher als letztes Verhältniss

$$ABD : ACE = AD^2 : AE^2. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

§. 10. **Lehnsatz.** Die Wege, welche der Körper in Folge der Wirkung irgend einer endlichen regelmässigen Kraft beschreibt, mag diese bestimmt und unveränderlich sein, oder mag sie beständig zu- oder abnehmen, stehen beim Anfange der Bewegung im doppelten Verhältniss der Zeiten.

Werden nämlich die Zeiten durch die Linien AD, AE (vor. Figur) und die erzeugten Geschwindigkeiten durch die Ordinaten DB, EC ausgedrückt; so bezeichnen die Flächen ABD, ACE die mit diesen Geschwindigkeiten oder durch diese Ordinaten beschriebenen Wege, und dieselben stehen beim Anfange der Bewegung (nach §. 9.) im doppelten Verhältniss der Zeiten AD, AE. W. z. b. w.

Zusatz 1. Hieraus kann man leicht Folgendes schliessen: Körper beschreiben ähnliche Theile ähnlicher Figuren in proportionalen Zeiten, und erzeugen vermöge gleicher Kräfte, welche an jenen Theilen auf ähnliche Weise angebracht sind, Abweichungen vom Wege, welche von dem Orte der Figur aus gemessen werden, zu dem diese Körper ohne jene Kräfte in denselben proportionalen Zeiten gelangen würden. Es verhalten sich alsdann diese Abweichungen nahe, wie die Quadrate der Zeiten, in denen sie erzeugt werden.

Zusatz 2. Die Abweichungen aber, welche durch proportionale und ähnlich angebrachte Kräfte erzeugt werden, verhalten sich wie die Kräfte und die Quadrate der Zeiten zusammengenommen.

Zusatz 3. Dasselbe gilt von beliebigen Räumen, welche die Körper, unter der Einwirkung verschiedener Kräfte beschreiben. Diese

Räume verhalten sich, im Anfange der Bewegnng selbst, wie die Kräfte und die Quadrate der Zeiten zusammengenommen.

Zusatz 4. Daher verhalten sich im Anfange der Bewegung die Kräfte direct wie die beschriebenen Wege, und indirect wie die Quadrate der Zeiten.

Zusatz 5. Ferner verhalten sich die Quadrate der Zeiten direct wie die beschriebenen Wege und indirect wie die Kräfte.

§. 10a. Anmerkung. Werden unbestimmte Grössen verschiedener Art mit einander verglieben und sagt man, irgend eine von ihnen verhalte sich direct oder indirect wie eine andere, so hat man diesen Ausspruch so zu verstehen, dass die erstere in demselben Verhältniss zu- oder abnehme, wie die zweite oder deren Reciprokes. Sagt man ferner, eine von ihnen verhalte sich, wie irgend zwei oder mehrere der andern direct oder indirect; so heisst dies, erstere nehme zu oder ab in einem Verhältniss, welches aus den Verhältnissen zusammengesetzt ist, in denen die andern Grössen oder ihre Reciproke zu- oder abnehmen. Wenn also A sich verhält direct wie B, direct wie C und indirect wie D; so nimmt A zu oder ab in demselben Verhältniss wie

$$BC \cdot \frac{1}{D},$$

d. h. A und $\frac{BC}{D}$ stehen zu einander im gegebenen Verhältniss.

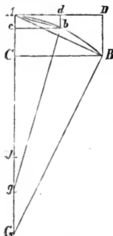


Fig. 13.

§. 11. Lehnsatz. Die Linie AD sei eine Tangente an der Curve AbB und BD beliebig von B nach D gezogen; alsdann steht BD beim Verschwinden zuletzt im doppelten Verhältniss der zugehörigen Sehne AB.

1. Fall. Es sei BD auf AD perpendikulär, und man ziehe BG senkrecht auf AB und AG senkrecht auf AD, so dass beide Perpendikel einander in G schneiden. Hierauf mögen die Punkte D, B, G nach d, b, g rücken und es sei J der letzte Durchschnittspunkt der Linien AG und BG, wenn die Punkte D und B bis nach A gelangt sind. Offenbar kann GJ kleiner sein, als jede angebbare Grösse.

Es ist aber, wenn man sich Kreise durch A, B, G und durch A, b, g gezogen denkt, in denen AG und Ag, wegen der rechten Winkel bei B und b Durchmesser sind,

$$AB^2 = AC \cdot AG = BD \cdot AG$$

$$Ab^2 = Ac \cdot Ag = bd \cdot Ag;$$

mithin

$$\text{A.} \quad AB^2 : Ab^2 = AG \cdot BD : Ag \cdot bd.$$

Da nun JG kleiner als jede angebbare Grösse angenommen werden

kann, so kann man bewirken, dass AG und Ag ebenfalls um weniger, als jeden angebbaren Unterschied von einander abweichen. Demnach wird nach A. das Verhältniss

$$AB^2 : Ab^2$$

von dem einfachen

$$BD : Bd$$

um weniger als jeder anggebbare Unterschied abweichen. Nach §. 1. hat man daher zuletzt:

B. $AB^2 : Ab^2 = Bd : bd.$[2]) W. z. b. w.

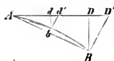


Fig 14.

2. Fall. Gibt man der Linie BD irgend eine beliebige Lage gegen AD, wie etwa die BD', so wird, wenn $bd' \mp BD'$

$$BD' : bd' = BD : bd,$$

und daher auch jetzt

C. $AB^2 : Ab^3 = BD' : bd'$. W. z. b. w.

3. Fall. Ist der Winkel D nicht gegeben, sondern convergirt die Linie BD nach irgend einem gegebenen Punkte hin, oder ist sie nach irgend einem Gesetze gezogen; so nähern sich doch die Winkel D und d immer mehr der Gleichheilt und kommen einander näher, als jeder gegebene Unterschied. Demnach werden sie, nach § 1 zuletzt einander gleich und es verhalten sich BD und bd wie früher. W. z. b. w.

Zusatz 1. Da zuletzt die Tangenten AD und Ad
die Bogen AB und Ab
und die Sinusse BC und bc

den Sehnen AB und Ab gleich werden; so verhalten sich zuletzt auch ihre Quadrate, wie

$$BD : bd.$$

Zusatz 2. Da

$$\triangle\ ADB : Adb = AD.\ DB : Ad . db$$

und zuletzt

$$AD^2 : Ad^2 = DB : db;$$

so haben wir ebenfalls zuletzt

und auch D. $\begin{cases} ADB : Adb = AD^3 : Ad^3 = DB^{3/2} : db^{3/2} \\ ABC : Abc = BC^3 : bc^3. \end{cases}$

Zusatz 3. Da zuletzt

$$DB \mp db \text{ und}$$

$$DB : db = AD^2 : Ad^2,$$

so werden die krummlinigen Figuren ADB und Adb, nach der Natur der Parabeln[3]), $^2/_3$ der geradlinigen Figuren ADB und Adb, und die Segmente AB, Ab $^1/_3$ derselben Dreiecke. Es verhalten sich demnach so wohl diese krummlinigen Figuren, als auch diese Segmente, wie

$$AD^3 : Ad^3 = \frown AB^3 : Ab^3 = \text{Sehne } AB^3 : Ab^3.$$

§. 12. Anmerkung. Bei allen diesen Behauptungen setzen wir übrigens voraus, dass der Berührungswinkel weder unendlich grösser, noch unendlich kleiner sei, als die Berührungswinkel, welche Kreise mit ihren Tangenten bilden, d. h. dass die Krümmung am Punkte A weder

unendlich gross, noch unendlich klein sei und der Abstand AJ eine endliche Grösse habe.

Es kann nämlich DB proportional AD^3 genommen werden, in diesem Falle kann kein Kreis durch den Punkt A zwischen der Tangente AD und der Curve AB gezogen werden und der Berührungswinkel wird unendlich kleiner als bei Kreisen sein. Aus einem ähnlichen Grunde erhält man, wenn man nach und nach DB proportional

$$AD^4,\ AD^5,\ AD^6,\ AD^7,\ \text{etc.}$$

annimmt, eine Reihe von ins Unendliche fortgehenden Berührungswinkeln entstehen, von denen jeder nachfolgende unendlich kleiner als der vorhergehende ist. Macht man dagegen nach und nach DB proportional

$$AD^2,\ AD^{3/2},\ AD^{4/3},\ AD^{5/4},\ AD^{6/5},\ AD^{7/6},\ \text{etc.}$$

so erhält man eine Reihe von Berührungswinkeln, deren erster mit dem beim Kreise identisch, der zweite unendlich grösser und jeder folgende unendlich grösser als der vorhergehende ist. Aber auch zwischen je zwei von diesen Winkeln kann man eine Reihe anderer einfügen, welche nach beiden Seiten ins Unendliche fortgeht, und von denen jeder folgende unendlich grösser als der vorhergehende ist. Z. B. wenn zwischen den Gliedern AD^2 und AD^3 die Reihe

$$AD^{13/6},\ AD^{11/5},\ AD^{9/4},\ AD^{7/3},\ AD^{5/2},\ \text{etc.}$$

eingeschaltet wird. Wiedcrum kann zwischen je zwei Gliedern dieser Reihe eine neue Reihe zwischenliegender Winkel eingeschaltet werden, welche von einander unendlich verschieden sind. Die Natur kennt hierin keine Grenze.

Was von krummen Linien und den durch sie begrenzten Flächen bewiesen worden ist, wird leicht auf die krummen Oberflächen fester Körper und auf diese selbst angewandt. Ich habe diese Lehnsätze vorausgeschickt, um künftig der weitläufigen Beweisführung mittelst des Widerspruchs, nach der Weise der alten Geometer, überhoben zu sein. Die Beweise werden nämlich kürzer durch die Methode der untheilbaren Grössen. Da aber die Methode des Untheilbaren etwas anstössig (durior) ist und daher für weniger geometrisch gehalten wird, so zog ich es vor, die Beweise der folgenden Sätze auf die letzten Summen und Verhältnisse verschwindender und auf die ersten werdender Grössen zu begründen, und desshalb habe ich die Beweise jener Grenzen mit möglichster Kürze vorausgeschickt. Durch sie wird dasselbe geleistet, was man durch die Methode des Untheilbaren erlangt, und wir werden um so sicherer uns der bewiesenen Principien bedienen können.

Wenn ich ferner in der Folge Grössen als aus kleinen Theilen bestehend betrachten, oder statt gerader unendlich kleine krumme Linien annehmen sollte; so wünsche ich, dass man darunter nicht *untheilbare*, sondern *verschwindend kleine theilbare*, nicht Summen und Verhältnisse *bestimmter Theile*, sondern die Grenzen der Summen und Verhältnisse verstehen und dass man den Kern solcher Beweise

immer auf die Methode der hervorgehenden Lehnsätze zurückführen möge.

Man kann den Einwurf machen, dass es kein letztes Verhältniss verschwindender Grössen gebe, indem dasselbe vor dem Verschwinden nicht das letzte sei, nach dem Verschwinden aber überhaupt kein Verhältniss mehr stattfinde. Aus demselben Grunde könnte man aber auch behaupten, dass ein nach einem bestimmten Orte strebender Körper keine letzte Geschwindigkeit habe; diese sei, bevor er den bestimmten Ort erreicht hat, nicht die letzte, nachdem er ihn erreicht hat, existire sie gar nicht mehr. Die Antwort ist leicht. Unter der letzten Geschwindigkeit versteht man diejenige, mit welcher der Körper sich weder bewegt, ehe er den letzten Ort erreicht und die Bewegung aufhört, noch die nachher stattfindende, sondern in dem Augenblick, wo er den Ort erreicht, ist es die letzte Geschwindigkeit selbst, mit welcher der Körper den Ort berührt und mit welcher die Bewegung endigt. Auf gleiche Weise hat man unter dem letzten Verhältniss verschwindender Grössen dasjenige zu verstehen, mit welchem sie verschwinden, nicht aber das vor oder nach dem Verschwinden stattfindende. Eben so ist das erste Verhältniss entstehender Grössen dasjenige, mit welchem sie entstehen; die erste und letzte Summe diejenige, mit welcher sie anfangen oder aufhören zu sein (entweder grösser oder kleiner zu werden). Es existirt eine Grenze, welche die Geschwindigkeit am Ende der Bewegung erreichen, nicht aber überschreiten kann; dies ist die letzte Geschwindigkeit. Dasselbe gilt von der Grenze aller anfangenden und aufhörenden Grössen und Proportionen. Da diese Grenze fest und bestimmt ist, so ist es eine wahrhaft geometrische Aufgabe, sie aufzusuchen. Alles Geometrische wird aber mit Fug und Recht bei andern geometrischen Bestimmungen und Beweisen in Anwendung gebracht.

Es kann auch behauptet werden, wenn die letzten Verhältnisse verschwindender Grössen gegeben sind, werde auch ihre letzte Grösse gegeben und es bestehe so jede Grösse aus untheilbaren Stücken, wovon Euklid im 10. Buche seiner Elemente das Gegentheil erwiesen hat. Dieser Einwurf stützt sich jedoch auf eine falsche Voraussetzung. Jene letzten Verhältnisse, mit denen die Grössen verschwinden, sind in der Wirklichkeit nicht die Verhältnisse der letzten Grössen, sondern die Grenzen, denen die Verhältnisse fortwährend abnehmender Grössen sich beständig nähern, und denen sie näher kommen, als jeder angebbare Unterschied beträgt, welche sie jedoch niemals überschreiten und nicht früher erreichen können, als bis die Grössen ins Unendliche verkleinert sind. Deutlicher ist die Sache bei unendlich grossen Grössen einzusehen. Werden zwei Grössen, deren Unterschied gegeben ist, in's Unendliche vermehrt, so ist ihr letztes Verhältniss gegeben, nämlich das der Gleichheit; jedoch werden damit nicht die letzten oder allergrössten Grössen, deren Verhältniss jenes ist, gegeben.

Wenn ich daher in der Folge, um eine leichte Darstellung der

Dinge zu benutzen, von sehr kleinen, verschwindenden oder letzten Grössen sprechen sollte; so verstehe man darunter nicht Grössen, welche ihrer Grösse nach bestimmt sind, sondern solche, die unbegrenzt verkleinert werden müssen.

ABSCHNITT II.

Von der Bestimmung der Centripetalkräfte.

Fig. 15.

§. 13. **Lehrsatz.** Wenn Körper sich in Bahnen bewegen, deren Radien stets nach dem unbeweglichen Mittelpunkte der Kräfte gerichtet sind; so liegen die von ihnen beschriebenen Flächen in festen Ebenen und sind den Zeiten proportional.

Man theile die Zeit in gleiche Abschnitte, und es beschreibe der Körper, vermöge der ihm beigebrachten Kraft, in dem ersten Zeitabschnitt die gerade Linie AB. Derselbe würde alsdann, wenn nichts ihn verhinderte, (nach 1. Gesetz) in dem zweiten Zeitabschnitt geradlinig nach c fortgehen, dergestalt dass

$$Bc = AB,$$

und indem man die Radien AS, BS, cS nach dem Mittelpunkte S der Kräfte zieht,

$$A. \qquad \triangle ASB = BSc$$

wäre. Ist der Körper aber nach B gekommen, so wirkt die Centripetalkraft mit einem einzigen aber starken Impuls auf ihn und bewirkt, dass er von der geraden Linie Bc abgelenkt wird und längs BC fortgeht. Zieht man nun

$$eC \mathbin{\#} BS,$$

bis eC die Linie BC in C schneidet; so befindet sich der Körper am Ende des zweiten Zeitabschnittes (nach Gesetze, Zusatz 1.) in C und in derselben Ebene mit SAB. Zieht man nun SC, so ist, weil

$$cC \mp BS$$
$$\triangle SBC = SBc,$$

oben (A.) war

$$SBc = ASB,$$

also ist auch

$$B. \quad \triangle SBC = SAB.$$

Aus demselben Grunde wirkt die Centripetalkraft nach und nach in den Punkten C, D, E, etc. dergestalt, dass der Körper in den einzelnen Zeitabschnitten bezüglich die Linie CD, DE, etc. beschreibt. Diese liegen alle in derselben Ebene, und es wird

$$C. \quad \begin{cases} \triangle SCD = SBC. \\ \triangle SDE = SCD. \text{ etc.} \end{cases}$$

In gleichen Zeitabschnitten werden daher gleiche Flächen in der unbewegten Ebene beschrieben, und indem man dieselben zusammensetzt, verhalten sich die Flächen SACS, SAES zu einander, wie die Zeiten, in denen sie beschrieben sind. Vermehrt man nun ins Unendliche die Zahl der Dreiecke und verkleinert man ihre Grundlinien, so wird (nach §. 3., Zusatz 4.) der Umfang ADE eine krumme Linie. Es wirkt daher die Centripetalkraft, durch welche der Körper beständig von der Tangente dieser Curve abgezogen wird, unaufhörlich, und die den Zeiten der Beschreibung proportionalen Flächenräume SABCS und SABCDES werden auch in diesem Falle ihnen proportional bleiben. W. z. b. w.

Zusatz 1. Die Geschwindigkeiten eines, im nicht widerstehenden Mittel gegen einen unbeweglichen Mittelpunkt gezogenen, Körpers verhalten sich umgekehrt wie die Perpendikel von jenem Mittelpunkte auf die geradlinige Tangente der Bahn. Sie verhalten sich nämlich in A, B, C, D wie die Grundlinien AB, BC, CD, DE, und diese umgekehrt wie die Höhen.

Zusatz 2. Ergänzt man die Sehnen AB und BC der, von demselben Körper im nicht widerstehenden Mittel beschriebenen, Bogen zum Parallelogramm ABCV, und verlängert man die Diagonale BV desselben in derjenigen Lage, welche sie zuletzt hat, wo jene Bogen ins Unendliche vermindert werden; so geht sie durch den Mittelpunkt der Kräfte.[4])

Zusatz 3. Werden die Sehnen AB und BC, so wie DE und EF von Bogen, die in gleichen Zeiten beschrieben sind, zu Parallelogrammen ABCV und DEFZ ergänzt, so stehen die Kräfte in B und E zu einander im letzten Verhältniss der Diagonalen BV und EZ, wenn jene Bogen unendlich klein werden. Die Bewegungen BC und EF des Körpers werden nämlich (nach Gesetze, Zusatz 1.) respective aus den Bewegungen Bc und BV, Ef und EZ zusammengesetzt und die Bewegungen BV = Cc und EZ = Ff nach dem Beweise dieses §. durch den Impuls der Centripetalkraft in B und C erzeugt; daher werden sie diesen Impulsen proportional sein.

Zusatz 4. Die Kräfte, durch welche beliebige Körper in nicht widerstehenden Mitteln von der geradlinigen Bewegung abgezogen und in

krumme Bahnen gebracht werden, verhalten sich zu einander, wie die Sinus versus der in gleichen Zeiten beschriebenen Bogen, welche Sinus versus nach dem Mittelpunkte der Kräfte zu convergiren und die Sehnen halbiren, wenn jene Bogen ins Unendliche vermindert werden. Diese Sinus versus sind nämlich die Hälften der Diagonalen, von denen im Zusatz 3 die Rede war.

Zusatz 5. Dieselben Kräfte verhalten sich zur Kraft der Schwere wie diese Sinus versus zu den auf den Horizont perpendikulären Höhen parabolischer Bogen, welche Geschosse in derselben Zeit beschreiben.

Zusatz 6. Alles dieses gilt, nach Gesetze, Zusatz 5., auch dann wenn die Ebenen, in denen die Körper sich bewegen, zugleich mit dem in ihnen befindlichen Centrum nicht ruhen, sondern sich gleichförmig und geradlinig bewegen.

§. 14. Lehrsatz. Jeder Körper, welcher sich in irgend einer Curve bewegt, deren Radien nach einem, entweder ruhenden oder gleichförmig und geradlinig fortschreitenden, Punkte gerichtet sind und um denselben der Zeit proportionale Räume beschreibt, wird durch eine, nach jenem Punkte gerichtete, Centripetalkraft angetrieben.

1. Fall. Jeder Körper, welcher sich in einer Curve bewegt, wird (nach 1. Gesetz) durch irgend eine auf ihn einwirkende Kraft vom geradlinigen Wege abgebracht. Jene Kraft aber, durch welche dies geschieht und der Körper gezwungen wird, die sehr kleinen und in gleichen Zeiten gleiche Dreiecke

SAB, SBC, SCD, SDE, etc.

um den unbeweglichen Punkt S zu beschreiben, wirkt im Punkte B längs einer cC parallelen Linie (nach Elemente, Buch I., Satz 40. und 2. Gesetz), d. h. längs der Linie BS[5]); im Orte C längs einer dD parallelen Linie, d. h. längs der Linie CS u. s. w. Sie wirkt also immer längs solcher Linien, welche nach jenem unbeweglichen Punkte S gerichtet wird. Figur 15. W. z. b. w.

2. Fall. Nach Gesetze, Zusatz 5. ist es gleichgültig, ob die Fläche, in welcher der Körper die krummlinige Figur beschreibt, ruhet oder ob sie zugleich mit dem Körper, der beschriebenen Figur und ihrem Punkte S sich gleichförmig und geradlinig fortbewegt.

Zusatz 1. Sind in nicht widerstehenden Mitteln die beschriebenen Flächenräume den Zeiten nicht proportional, so sind auch die Kräfte nicht nach dem Durchschnittspunkte der Radien gerichtet, und zwar weichen sie nach der Richtung davon ab, wohin die Bewegung geschieht, wenn diese beschleunigt, hingegen rückwärts, wenn sie verzögert wird.

Zusatz 2. In allen auch widerstehenden Mitteln sind die Kräfte wenn die Beschreibung der Flächenräume beschleunigt wird, nicht nach dem Durchschnittspunkte der Radien gerichtet, sondern weichen in einer vorwärtsliegenden Richtung davon ab.

§. 15. Anmerkung. Der Körper kann durch eine Centripetal-

kraft angetrieben werden, die aus mehreren einzelnen Kräften zusammengesetzt ist. In diesem Falle ist der Satz so zu verstehen, dass jene, aus allen einzelnen zusammengesetzte Kraft nach dem Punkte S gerichtet ist.

Wirkt ferner irgend eine Kraft beständig nach einer, auf die beschriebene Oberfläche perpendikulären, Richtung, so wird dieselbe bewirken, dass der Körper aus der Ebene seiner Bahn abgelenkt wird; aber die Grösse der beschriebenen Fläche wird sie weder vermehren noch vermindern und daher bei der Zusammensetzung der Kräfte vernachlässigt werden können.

§. 16. Lehrsatz. Jeder Körper, welcher mit einem, nach dem Mittelpunkte eines andern irgendwie sich bewegenden Körpers gezogenen Radius um jenen Punkt Flächen beschreibt, welche der Zeit proportional sind, wird durch eine Kraft angetrieben, die aus der nach dem andern Körper gerichteten Centripetalkraft, und der ganzen beschleunigenden den andern antreibenden, Kraft zusammengesetzt ist.

Werden nämlich beide Körper L und T durch eine neue Kraft, welche derjenigen gleich und entgegengesetzt ist, durch die der zweite angtrieben wird, nach parallelen Richtungen angetrieben,; so wird (nach Gesetze, Zusatz 6.) der erste Körper L fortfahren, dieselben Flächen wie vorher um den zweiten T zu beschreiben. Die Kraft aber, welche T antrieb, wird jetzt durch die ihr gleiche und entgegengesetzte aufgehoben, und desshalb wird (nach 1. Gesetz) jener zweite Körper T, sich selbst überlassen, entweder ruhen, oder sich gleichförmig und geradlinig fortbewegen, und der erste L, angetrieben durch den Unterschied der Kräfte fortwährend der Zeit proportionale Flächen um den zweiten T beschreiben. Nach §. 14. ist daher der Unterschied der Kräfte nach jenem zweiten Körper T als Centrum gerichtet.

Zusatz 1. Beschreibt ein Körper L mit einem, nach einem zweiten T gezogenen, Radius der Zeit proportionale Flächenräume, und zieht man von der ganzen Kraft (mag sie eine einfache oder nach Gesetze, Zusatz 2. aus mehrern zusammengesetzte sein), welche den ersten Körper L antreibt, nach dem eben erwähnten Zusatze die ganze beschleunigende Kraft ab, welche den zweiten Körper T antreibt; so strebt die ganze übrig bleibende Kraft nach dem letztern als dem Centrum.

Zusatz 2. Sind die Flächen so nahe als möglich der Zeit proportional, so ist die übrigbleibende Kraft auch so nahe als möglich nach dem zweiten Körper T gerichtet.

Zusatz 3. Ist umgekehrt die übrig bleibende Kraft möglichst nahe nach dem zweiten Körper T gerichtet, so sind die beschriebenen Flächenräume möglichst nahe der Zeit proportional.

Zusatz 4. Beschreibt ein Körper L mit einem, nach einem zweiten T gezogenen, Radius Flächen, welche verglichen mit den Zeiten sehr ungleich sind, und ruht entweder der zweite Körper T oder bewegt er sich gleichförmig und geradlinig fort; so ist die Wirkung der nach

dem letztern gerichteten Centripetalkraft entweder = 0, oder vermischt und zusammengesetzt mit sehr starken Wirkungen anderer Kräfte, und die ganze, aus allen (wenn deren mehrere vorhanden sind) zusammengesetzte Kraft ist nach einem andern unbeweglichen oder beweglichen Centrum gerichtet, um welche die Beschreibung der Flächen gleichförmig erfolgt. Dasselbe ist der Fall, wenn der zweite Körper T sich auf eine beliebige Weise bewegt; wofern man nur als Centripetalkraft diejenige Kraft annimmt, welche man nach Abzug der ganzen auf T wirkenden erhält.

§. 17. Anmerkung. Die gleichförmige Beschreibung der Flächen giebt das Centrum an, nach welchem die am stärksten auf den Körper wirkende Kraft gerichtet ist, und man sagt mit Recht, dass jede kreisförmige Bewegung um denjenigen Mittelpunkt stattfinde, durch dessen Kraft der Körper von der geradlinigen Bewegung abgezogen und in seiner Bahn erhalten wird. Warum sollten wir nun nicht in der Folge die gleichförmige Beschreibung der Flächen als Kennzeichen eines Mittelpunktes annehmen, um welchen jede kreisförmige Bewegung im freien Raume stattfindet?

§. 18. Lehrsatz. Die Centripetalkräfte solcher Körper, welche verschiedene Kreise mit gleichförmiger Bewegung beschreiben, sind nach den Mittelpunkten dieser Kreise gerichtet, und verhalten sich zu einander, direct wie die Quadrate gleichförmig beschriebener Bogen und indirect wie die Radien.

Diese Kräfte sind, nach §. 14. und §. 13., Zusatz 2., nach den Mittelpunkten gerichtet und verhalten sich zu einander, wie die Sinus versus der in den kleinsten gleichen Zeiten beschriebenen Bogen (nach §. 13., Zusatz 4.), d. h. wie die Quadrate jener Bogen, dividirt durch die Durchmesser der Kreise (nach §. 7.). Da nun diese Bogen sich wie die in beliebigen gleichen Zeiten beschriebenen Bogen und die Durchmesser sich wie ihre Radien verhalten; so werden die Kräfte den Quadraten beliebiger gleichzeitig beschriebener Bogen, durch die Radien der Kreise dividirt, proportional sein. W. z. b. w.

Zusatz 1. Da die Bogen den Geschwindigkeiten proportional sind, so verhalten sich die Centripetalkräfte, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten, dividirt durch die Radien der Kreise.

Zusatz 2. Da die Umlaufszeiten im zusammengesetzten directen Verhältniss der Radien und indirecten der Geschwindigkeiten stehen, so verhalten sich die Centripetalkräfte indirect wie die Quadrate der Umlaufszeiten und direct wie die Radien[6]).

Zusatz 3. Sind die Umlaufszeiten einander gleich, so verhalten sich sowohl die Centripetalkräfte, als auch die Geschwindigkeiten wie die Radien; und umgekehrt.

Zusatz 4. Verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten und der Geschwindigkeiten wie die Radien, so sind die Centripetalkräfte einander gleich; und umgekehrt.

Zusatz 5. Sind die Umlaufszeiten den Radien proportional, so

verhalten sich die Centripetalkräfte indirect wie die Radien; und umgekehrt.

Zusatz 6. Sind die Quadrate der Umlaufszeiten den Cuben der Radien proportional, so verhalten sich die Centripetalkräfte indirect wie die Quadrate der Radien, die Geschwindigkeiten aber indirect wie die Quadratwurzeln der Radien; und umgekehrt[7]).

Zusatz 7. Ist allgemein die Umlaufszeit proportional

$$R^n,$$

wo n eine beliebige Zahl bezeichnet; so wird die Geschwindigkeit sich indirect verhalten wie

$$R^{n-1},$$

und die Centripetalkraft indirect wie

$$R^{2n-1}$$

Zusatz 8. Alles Bisherige gilt auch von den Zeiten, Geschwindigkeiten und Kräften, womit Körper ähnliche Theile ähnlicher Figuren, deren Mittelpunkte ähnlich liegen, beschreiben, und es folgt dies aus der Anwendung der vorhergehenden Beweise auf diesen Fall. Man macht diese Anwendung, indem man eine sich gleichbleibende Beschreibung der Flächen statt der gleichförmigen Bewegung, und die Abstände der Körper vom Mittelpunkte statt der Radien annimmt.

Zusatz 9. Aus demselben Beweise folgt auch, dass der Bogen, welchen ein Körper in einem, unter Einwirkung einer gegebenen Centripetalkraft gleichförmig beschriebenen, Kreise während einer gegebenen Zeit zurücklegt, die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser des Kreises und der Höhe ist, um welche der Körper während derselben Zeit und vermöge derselben Kraft herunterfallen würde[8]).

§. 19. Anmerkung. Der Fall des Zusatzes 6. findet bei der Bewegung der Himmelskörper statt (wie Wren, Hook und Halley ursprünglich gefunden haben), wesshalb ich dasjenige, was sich auf die Abnahme der Centripetalkräfte im doppelten Verhältniss der Radien bezieht, im Folgenden näher auseineindersetzen werde.

Ferner kann man mittelst des vorhergehenden Lehrsatzes und seiner Zusätze auch auf das Verhältniss der Centripetalkraft zu jeder bekannten Kraft schliessen, wie z. B. zur Kraft der Schwere. Denn wenn der Körper sich auf einem um die Erde concentrischen Kreise vermöge seiner Schwere bewegt, so ist die letztere seine Centripetalkraft. Aus dem Falle der Körper wird aber nach §. 18., Zusatz 9. so wohl die Umlaufszeit, als auch der in jeder Zeit beschriebene Bogen bekannt. Durch derartige Sätze hat Huygens in seinem vortrefflichen Werke über Pendeluhren die Kraft der Schwere mit den Centrifugalkräften umlaufender Körper verglichen.

Das Vorhergehende kann auch auf folgende Weise erwiesen werden. Man denke sich in einem Kreise ein Vieleck von beliebig vielen Seiten beschrieben. Wird nun ein Körper bei seiner Bewegung längs der Seiten an den einzelnen Ecken durch den Kreis zurückgeworfen, so verhält sich

die Kraft, mit welcher er bei den einzelnen Zurückwerfungen auf den Kreis wirkt, wie seine Geschwindigkeit. Die Summe der Kräfte in einer gegebenen Zeit verhält sich daher zusammengesetzt, wie jene Geschwindigkeit und die Anzahl der Zurückwerfungen, d. h. wenn das Polygon seiner Art nach gegeben ist, wie der in der gegebenen Zeit beschriebene Weg und derselbe Weg, dividirt durch den Radius des Kreises. Demnach verhält sich die Summe wie das Quadrat seines Weges, dividirt durch den Radius. Fällt nun das Polygon, durch unendliche Verkleinerung seiner Seiten, mit dem Kreise zusammen, so verhält sich die Summe wie das Quadrat des Bogens, dividirt durch den Radius. Diese Summe ist aber die Kraft, mit welcher der Körper auf den Kreis wirkt, und gleich und entgegengesetzt ist ihr diejenige Kraft, mit welcher der Kreis den Körper beständig gegen den Mittelpunkt zurückstösst.

§. 20. **Aufgabe.** Die Geschwindigkeit, mit welcher ein Körper eine gegebene Figur in Folge von Kräften beschreibt, welche nach einem gemeinschaftlichen Centrum gerichtet sind, ist für beliebige Orte gegeben; man soll das Centrum finden.

Die beschriebene Figur werde durch drei Tangenten pT, TQV und VR in den Punkten P, Q und R berührt, und es mögen sich jene in den Punkten T und V schneiden. Man errichte in den Berührungspunkten Perpendikel PA, QB und RC auf die Tangenten, welche den Geschwindigkeiten in diesen Punkten bezüglich umgekehrt proportional sind. Es verhält sich also, wenn wir die Geschwindigkeit in P, Q, R, respective durch $q(P)$, $q(Q)$, $q(R)$ bezeichnen,

$$q(Q) : q(P) = PA : QB$$
$$q(R) : q(Q) = QB : RC.$$

Durch die Endpunkte A, B und C ziehe man

$$AD \mp PT$$
$$CE \mp RV;$$

alsdann werden die Linien TD und VE verlängert sich in dem gesuchten Centrum schneiden.

Die vom Mittelpunkt S auf die Tangenten PT und QT gefällten Perpendikel verhalten sich nämlich (nach §. 13., Zusatz 1.) indirect wie die Geschwindigkeiten des Körpers in den Punkten P und Q, und daher direct wie $AP : BQ$

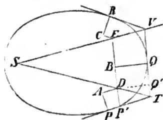


Fig 17.

d. h. wie die vom Punkte D auf die Tangenten gefällten Perpendikel

$$DP^1 : DQ^1.$$

Hieraus schliesst man leicht, dass die Punkte S, D, T in einer geraden Linie liegen.[9]) Ebenso wird bewiesen, dass S, E, V in einer geraden Linie liegen; daher muss das Centrum S sich im Durchschnittspunkte beider Linien befinden. W. z. b. w.

§. 21. Lehrsatz. Ein Körper bewegt sich in nicht widerstehendem Mittel um ein unbewegliches Centrum und in einer beliebigen Bahn; er beschreibt in einer sehr kurzen Zeit irgend einen eben entstehenden Bogen, dessen Pfeil Pv man gezogen hat und welcher letztere die Sehne des Bogens halbirt und verlängert durch das Centrum der Kräfte geht. Alsdann verhält sich die Centripetalkraft in der Mitte des Bogens direct wie jener Pfeil und indirect wie das Quadrat der Zeit. Setzt man also die zur Beschreibung des Bogens QPq erforderliche Zeit = t, so ist jene Kraft proportional

Fig. 18

$$\frac{Pv}{t^2}.$$

Es verhält sich nämlich in einer gegebenen Zeit (nach §. 13., Zusatz 4) Pv wie die Kraft, und es wächst der Bogen in demselbem Verhältniss, in welchem die Zeit zunimmt; hingegen wächst (nach §. 11., Zusatz 2 und 3.) der Pfeil Pv im doppelten Verhältniss der Zeit; er ist also der Kraft und dem Quadrate der Zeit proportional. Umgekehrt verhält sich die Kraft also direct wie der Pfeil Pv und indirect wie das Quadrat der Zeit. Dasselbe wird auch leicht durch den §. 10., Zusatz 4. bewiesen.

Zusatz 1. Ein Körper P beschreibt, indem er sich um das Centrum S bewegt, eine Curve APQ und die gerade Linie ZPR berührt dieselbe im Punkte P. Zieht man nun von einem andern unbestimmten Punkte Q

$$QR \ddagger SP$$

und QT perpendikulär auf SP; so verhält sich die Centripetalkraft indirect wie Körper.

$$\frac{SP^2 . QT^2}{QR},$$

wobei in diesem Körper immer der letzte Werth genommen werden muss, welchen er vor dem Zusammenfallen der Punkte P und Q erlangt.

Es ist nämlich

$$QR = Pv,$$

d. h. dem Pfeile des verdoppelten Bogens PQ, in dessen Mitte P liegt.

Das doppelte Dreieck

$$SQP = SP . QT$$

ist der Zeit proportional, in welcher jener verdoppelte Bogen PQ beschrieben wird und kann daher als die Zeit vertretend betrachtet werden.[10])

Zusatz 2. Ist SY perpendikulär auf die Tangente PR gezogen, so wird die Centripetalkraft sich indirect verhalten wie der Körper

$$\frac{SY^2 . QP^2}{QR};$$

es ist nämlich (für den verschwindenden Bogen)

$$SY . QP = SP . QT$$

Zusatz 3. Ist die Bahn entweder selbst ein Kreis, oder berührt oder schneidet sie denselben concentrisch, d. h. hat sie einen möglichst kleinen Berührungs- oder Durchschnittswinkel mit dem Kreise, dieselbe Krümmung und denselben Krümmungshalbmesser in P; ist PV die Sehne dieses Kreises, welche vom Körper durch das Centrum der Kräfte gezogen ist: so verhält sich die Centripetalkraft indirect wie der Körper

$$SY^2 . PV.$$

Es ist nämlich

$$PV = \frac{QP^2}{QR} \text{ 11)}.$$

Zusatz 4. Unter denselben Voraussetzungen verhält sich die Centripetalkraft direct wie das Quadrat der Geschwindigkeit und indirect wie das Perpendikel SY (nach § 13. Zusatz 1.).

Zusatz 5. Ist irgend eine krummlinige Figur APQ, und in ihr ein Punkt S gegeben, nach welchem die Centripetalkraft beständig gerichtet ist; so kann man das Gesetz der letztern finden, vermöge welches ein Körper P, vom gradlinigen Wege stets abgezogen, auf dem Umfange jener Figur festgehalten wird und sich auf demselben bewegt. Man hat zu diesem Ende den Körper

$$\frac{SP^2 . QT^2}{QR} = SY^2 . PV$$

zu berechnen, welcher dieser Kraft indirect proportional ist. Die folgenden Aufgaben enthalten Beispiele hiervon.

§. 22. Aufgabe. Es bewegt sich ein Körper auf der Peripherie eines Kreises; man sucht das Gesetz der Centripetalkraft, welche nach irgend einem Punkte gerichtet ist.

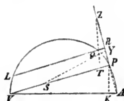


Fig. 19.

Es sei VQPA die Peripherie des Kreises, S das Centrum der Centripetalkraft, in P befinde sich der auf der Peripherie fortschreitende Körper und Q der nächste von ihm zu erreichende Ort desselben. Man ziehe die Tangente PRZ des Kreises in P durch S die Sehne VP, den Durchmesser VA und die Verbindungslinie AP. Fällt man nun

PK perpendikulär auf VA

QT „ „ VP,

zieht man durch Q LR ∦ VP, welche erstere Linie den Kreis in L und die Tangente PR in R schneidet, schneiden sich ferner QT und PR verlängert in Z; so ist

$$\triangle ZQR \sim ZTP \sim VPA,$$

also

$$RP^2 : QT^2 = VA^2 : VP^2.$$

Ferner ist

$$RP^2 = RQ \,.\, RL,$$

daher

$$QT^2 = \frac{RQ \,.\, RL \,.\, VP^2}{VA^2}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung auf beiden Seiten durch

$$\frac{SP^2}{QR},$$

so wird

$$\frac{QT^2 \,.\, SP^2}{QR} = \frac{SP^2 \,.\, VP^2 \,.\, RL}{VA^2},$$

und da beim Zusammenfallen der Punkte P und Q

$$RL = VP$$

wird,

$$\frac{QT^2 \,.\, SP^2}{QR} = \frac{SP^2 \,.\, VP^3}{VA^2}.$$

Nach §. 21., Zusatz 1. und 5. ist daher die Centripetalkraft indirect proportinal

$$\frac{SP^2 \,.\, VP^3}{VA^2}$$

oder, weil der Durchmesser VA constant ist, indirect proportional

$$SP^2 \,.\, VP^3.$$

Zweiter Beweis. Man fälle auf die Tangente PR das Perpendikel SY, alsdann wird, weil

$$\triangle\, SYP \sim ZTP \sim VPA$$
$$AV : VP = SP : SY$$

also

$$SY = \frac{VP \,.\, SP}{AV},$$

und

$$\frac{SP^2 \,.\, VP^3}{AV^2} = SY^2 \,.\, VP.$$

Nach §. 21., Zusatz 3. und 5. ist daher die Centripetalkraft indirect proportional

$\frac{SP^2 \,.\, VP^3}{AV^2}$ oder $SP^2 \,.\, VP^3$, weil AV constant ist.

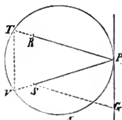


Fig. 20.

Zusatz 1. Fällt der Punkt S nach welchem die Centripetalkraft stets gerichtet ist, auf die Peripherie des Kreises in V, so ist die Centripetalkraft indirect proportional

$$SP^5.$$

Zusatz 2. Die Kraft, vermöge welcher der Körper P sich auf dem Kreise APTV um das Centrum S herumbewegt, verhält sich zu der Kraft, vermöge welcher derselbe Körper auf demselben Kreise und

in derselben Umlaufszeit sich um ein beliebiges anderes Centrum R bewegen kann, wie

$$RP^2 . SP : SG^3,$$

wo SG von S nach der Tangente PG ‡ RP ist.

Nach diesem Paragraph verhält sich nämlich die erste Kraft zur zweiten, wie

$$RP^2 . PT^3 : SP^2 . PV^3$$

d. h. wie

$$SP . PR^2 : \frac{SP^3 . PV^3}{PT^3}.$$

Da aber

$$\triangle\ PGS \sim PTV$$

also

$$PT : PV = PS : SG;$$

so wird

$$\frac{SP^3 . PV^3}{PT^3} = SG^3.$$

Zusatz 3. Die Kraft, vermöge welcher der Körper sich in einer beliebigen Bahn um das Centrum S bewegt, verhält sich zu der, bei derselben Bahn und Verlaufszeit dem Centrum R entsprechenden Kraft, wie

$$SP . PR^2 : SG^3.$$

Es bedeuten dabei SP, PR und SG dasselbe in der beliebigen Bahn, wie hier im Kreise. Die Kräfte in der beliebigen Bahn sind nämlich dieselben, wie in einem Kreise von gleicher Krümmung.

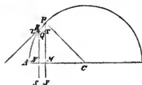


Fig. 21.

§. 23. Aufgabe. Ein Körper bewegt sich auf dem Kreise PQA; man sucht das Gesetz der Centripetalkraft, welche nach einem so entfernten Punkte S gerichtet ist, dass man alle nach demselben gezogenen Linien PS und RS als einander parallele ansehen kann.

Man ziehe vom Mittelpunkte C des Kreises den Halbmesser CA, welcher jene Parallelen senkrecht in M und N schneidet und verbinde C mit P.

Da

$$\triangle\ CPM \sim TPZ$$

nnd nach §. 8.

$$\triangle\ CPM \sim TPQ,$$

so hat man

$$CP^2 : PM^2 = PQ^2 : QT^2$$

nnd nach §. 7.

$$CP^2 : PM^2 = PR^2 : QT^2.$$

Ferner ist auch der Natur des Kreises

$$PR^2 = QR\ (RN + QN).$$

Im Fall, dass die Punkte Q und P zusammenfallen, wird aber

$$RN + QN = 2PM,$$

mithin in diesem Falle

$$CP^2 : PM^2 = 2PM . QR : QT^2$$

und

$$\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$$

endlich

$$\frac{QT^2 . SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 . SP^2}{CP^2}.$$

Nach §. 21., Zusatz 1. und 5. ist daher die Centripetalkraft indirect proportional

$$\frac{2PM^3 \; SP^2}{CP^2} \text{ oder } PM^3,$$

weil $\frac{2SP^2}{CP^2}$ constant ist.

Denselben Schluss zieht man leicht aus §. 22.

§. 24. Anmerkung. Auf wenig verschiedene Weise zeigt man, dass ein Körper sich in einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel bewegt, in Folge einer Centripetalkraft, welche indirect der nach einem sehr entfernten Centrum der Kräfte gerichteten Ordinate proportional ist.

Fig. 22.

§. 25. Aufgabe. Ein Körper bewegt sich auf der Spirallinie PQ, welche alle Radien SP, SQ etc. unter einem constanten Winkel schneidet; man sucht das Gesetz der nach dem Centrum S der Spirallinie gerichteten Centripetalkraft. Ist der unbestimmt kleine Winkel PSQ gegeben, so kennt man wegen der übrigen bekannten Winkel, die Figur SPRQT ihrer Form nach. Das Verhältniss $\frac{QT}{QR}$ ist daher gegeben und, weil jene Figur der Form nach gegeben ist, $\frac{QT^2}{QR}$ proportional QT, d. h. SP.

Verändert man nun den Winkel PSQ, so ändert sich die Linie QR, welche den Berührungswinkel QPR unterspannt, nach §. 11. im doppelten Verhältniss von PR oder QT. Daher ist das Verhältniss

$$\frac{QT^2}{QR}$$

constant und gleich SP, so wie

$$\frac{QT^2 . SP^2}{QR} \text{ proportional } SP^3,$$

d. h. nach §. 21., Zusatz 1. und 5. indirect proportional der Centripetalkraft.

Zweiter Beweis. Das auf die Tangente gefällte Perpendikel SY und die Sehne PV desjenigen Kreises, welcher die Spirale concentrisch schneidet, stehen zum Radius SP im constanten Verhältniss; daher ist

SP^3 proportional $SY^2 . PV$, d. h. nach §. 21., Zusatz 3. und 5. indirect proportional der Centripetalkraft.

§. 26. Lehnsatz. Alle um eine gegebene Ellipse beschriebenen Parallelogramme sind einander gleich. Dasselbe gilt von den Parallelogrammen, welche in der Hyperbel an ihre Durchmesser beschrieben werden. Beides ist aus der Lehre von den Kegelschnitten bekannt.[12])

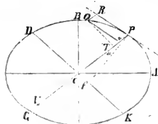


Fig. 23.

§. 27. Aufgabe. Ein Körper bewegt sich in einer Ellipse; man sucht das Gesetz der nach dem Mittelpunkte der Ellipse gerichteten Centripetalkraft.

Es seien CA und CB die halben Axen der Ellipse, GP und DK conjugirte Durchmesser, PF und QT Perpendikel auf die letztere, Qv die Ordinate des Punktes Q in Bezug auf GP als Abscissenaxe. Vollendet man das Parallelogramm QvPR, so ist nach den Lehren der Kegelschnitte

A.

$$Pv . vG : Qv^2 = PC^2 : CD^2 \text{ }^{13)}.$$

Da aber

$$\triangle\ QvT \sim PCF,$$

ist B.

$$Qv^2 : QT^2 = PC^2 : PF^2,$$

und indem man beide Proportionen mit einander verbindet,

C.

$$Pv . vG : QT^2 = PC^2 : CD^2 . PF^2$$

oder D.

$$vG : \frac{QT^2}{Pv} = PC^2 : \frac{CD^2 . PF^2}{PC^2}.$$

Nach §. 26. ist ferner E.

$$\begin{cases} CD . PF = BC . CA \\ Pv = QR, \end{cases}$$

und im Fall die Punkte P und Q zusammenfallen,

F.

$$vG = 2 . PC.$$

Substituirt man diese verschiedenen Werthe E. und F. in D., so erhält man

G.

$$\frac{QT^2 . PC^2}{QR} = \frac{2BC^2 . CA^2}{PC}.$$

Nach §. 21., Zusatz 5. ist daher die Centripetalkraft indirect

$$\frac{2BC^2 . CA^2}{PC},$$

d. h. weil $2BC^2 . CA^2$ constant ist, indirect $\frac{1}{PC}$ oder direct PC proportional.

Zweiter Beweis. Auf der Linie PQ nehme man, auf der T entgegengesetzten Seite einen Punkt u so an, dass

$$Tu = Tv$$

und den Punkt V dergestalt an, dass

$$uV : vG = DC^2 : PC^2$$

sei. Da nun nach der Lehre von den Kegelschnitten

$$Qv^2 : Pv \,.\, vG = DC^2 : PC^2,$$

so wird

$$uV : vG = Qv^2 : Pv \,.\, vG$$

oder

$$Qv^2 = Pv \,.\, uV.$$

Addirt man zur letzten Gleichung auf beiden Seiten

$$uP \,.\, Pv = uP \,.\, Pv,$$

so wird

$$VP \,.\, Pv = PQ^2$$ [14]).

Demnach wird der Kreis, welcher den Kegelschnitt in P berührt, und durch Q geht, auch durch V gehen. Fallen nun P und Q zusammen, so geht das Verhältniss

$uV : vG$, welches $= DC^2 : PC^2$ ist,

über in

$$PV : PG \text{ oder } PV : 2PC$$

Wir erhalten demnach

$$PV : 2PC = DC^2 : CP^2$$

und

$$PV = \frac{2DC^2}{PC}.$$

Die Kraft, vermöge welcher der Körper P sich in der Ellipse bewegt, ist daher (nach §. 21., Zusatz 3.) indirect

$$\frac{2DC^2 \,.\, PF^2}{PC}$$ [15]),

d. h. weil $2DC^2 \,.\, PF^2$ constant ist,

$$PC$$

direct proportional.

Zusatz 1. Es ist daher die Kraft dem Abstande des Körpers vom Mittelpunkte der Ellipse proportional, und eben so wird, wenn die Kraft dem Abstande von ihrem Centrum proportional ist, der Körper sich auf einer Ellipse bewegen, deren Mittelpunkt mit dem Centrum der Kräfte identisch, oder vielleicht auf einem Kreise, in welchen die Ellipse übergehen kann.

Zusatz 2. Es werden die Umlaufszeiten aller um dasselbe Centrum beschriebenen Ellipsen einander gleich sein. Jene Zeiten sind nämlich bei ähnlichen Ellipsen gleich, nach §. 18., Zusatz 3. und 8. Bei Ellipsen aber, welche eine gemeinschaftliche grosse Axe haben, verhalten sich die Umlaufszeiten direct wie die ganzen Flächenräume und indirect wie gleichzeitig beschriebene Theile derselben, d. h. direct wie die kleinen Axen, und indirect wie die Geschwindigkeiten der Körper am Ende der grossen Axen, oder direct wie die kleinen Axen und in-

direct wie die, auf die grosse Axe als Abscissenaxe bezogenen, Ordinaten, mithin wegen der Gleichheit des directen und des indirecten Verhältnisses, wie

$$1:1.^{16)}$$

§. 28. Anmerkung. Wird die Ellipse durch Entfernung ihres Mittelpunktes ins Unendliche in eine Parabel verwandelt, so bewegt sich der Körper auf dieser, und es wird die jetzt nach dem unendlich entfernten Punkt Centrum gerichtete Kraft constant. Dies ist Galilei's Lehrsatz.

Verwandelt sich der parabolische Schnitt (durch Veränderung der Neigung der schneidenden Ebene) in eine Hyperbel, so bewegt sich der Körper auf dem Umfange der letztern, indem die Centripetalkraft in eine Centrifugalkraft übergeht. Sowie in einem Kreise oder einer Ellipse bei denen die Kräfte nach einem, auf einer Abscisse gelegenen Mittelpunkte der Figur gerichtet sind, diese Kräfte, durch Vergrösserung oder Verkleinerung der Ordinaten in irgend einem gegebenen Verhältniss, oder auch durch Aenderung des Neigungswinkels der Ordinaten gegen die Abscisse, immer im Verhältniss der Entfernungen vom Centrum wachsen oder abnehmen, wenn nur die Umlaufszeiten gleich bleiben; werden in allen Figuren, wenn die Ordinaten in irgend einem Verhältniss zu- oder abnehmen, oder der Coordinatenwinkel bei unveränderter Umlaufszeit irgendwie verändert wird, die nach einem beliebigen, auf einer Abscisse gelegenen Centrum, gerichteten Kräfte in den einzelnen Ordinaten im Verhältniss der Abstände vom Centrum zu- oder abnehmen.

ABSCHNITT III.

Von der Bewegung der Körper in excentrischen Kegelschnitten.

§. 29. Aufgabe. Ein Körper bewegt sich in einer Ellipse; man sucht das Gesetz der nach ihrem Brennpunkt gerichteten Centripetalkraft.

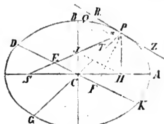


Fig. 24.

Es sei S der Brennpunkt der Ellipse. Man ziehe SP, welche den Durchmesser DK in E und die Ordinate Qv in x schneidet und vollende das Parallelogramm QxPR. Offenbar ist

$$EP = AC.$$

Zieht man nämlich aus dem zweiten Brennpunkte H

$$HJ \mp EC,$$

so wird, weil

$$CH = CS$$

auch

$$EJ = ES,$$

und

$$EP = EJ + JP = \tfrac{1}{2}(2EJ + 2JP)$$
$$= \tfrac{1}{2}(ES + EJ + JP + JP)$$
$$EP = \tfrac{1}{2}(SP + JP).$$

Da aber

$$HJ \mp RP,$$

so wird

$$\angle\ PJH = JPR = HPZ = PHJ,$$

also

$$JP = PH$$

und

$$1.\quad EP = \tfrac{1}{2}(SP + PH) = AC.$$

Fällt man nun auf SP das Perpendikel QT, und setzt man den Parameter der Ellipse

$$2.\quad \frac{2 \,.\, BC^2}{AC} = L,$$

so hat man

$$L \,.\, QR : L \,.\, Pv = PE : PC = AC : PC$$

ferner

$$L \,.\, Pv : Gv \,.\, Pv = L : Gv,$$

also durch Verbindung beider Proportionen

$$3.\quad L \,.\, QR : Gv \,.\, Pv = L \,.\, AC : Gv \,.\, PC.$$

Da aber auch

$$Gv \,.\, Pv : Qv^2 = PC^2 : CD^2$$

so wird

$$4.\quad L \,.\, QR : Qv^2 = L \,.\, AC \,.\, PC : Gv \,.\, CD^2.$$

Nach §. 8. wird beim Zusammenfallen der Punkte Q und P

$$Qv^2 = Qx^2,$$

daher auch

$$5.\quad L \,.\, QR : Qx^2 = L \,.\, AC \,.\, PC : Gv \,.\, CD^2.$$

Ferner ist

$$Qx^2 : QT^2 = PE^2 : PF^2,$$ wo PF auf CK vertikal,

und nach §. 26.

$$PE^2 : PF^2 = DC^2 : CB^2$$

demnach

$$L \,.\, QR : QT^2 = L \,.\, AC \,.\, PC : Gv \,.\, CB^2$$

oder da

$$L \,.\, AC = 2 \,.\, BC^2 \quad (\text{Gl. } 2.)$$

$$6.\quad L \,.\, QR : QT^2 = 2PC : Gv.$$

Fallen die Punkte Q und P zusammen, so wird

$$2 \,.\, PC = Gv,$$

mithin (nach Gl. 6.) in diesem Falle

$$7.\quad L \,.\, QR = QT^2.$$

und indem man auf beiden Seiten mit $\frac{SP^2}{QR}$ multiplicirt.

$$8. \quad \frac{SP^2 . QT^2}{QR} = L . SP^2.$$

Nach §. 21., Zusatz 1. und 5. ist daher die Centripetalkraft

$$\frac{1}{L . SP^2},$$

oder weil L constant ist,

$$\frac{1}{SP^2}$$

indirect proportional.

Zweiter Beweis. Da die nach dem Mittelpunkte der Ellipse gerichtete Kraft, vermöge welcher der Körper P sich auf jener bewegen kann, (nach §. 27., Zusatz 1.) dem Abstande PC des Körpers vom Mittelpunkte proportional ist; so ziehe man CE der Tangente PR parallel. Alsdann wird die Kraft, vermöge welcher derselbe Körper P sich um irgend einen andern Punkt S in der Ellipse bewegen kann, wenn CE und PS sich in E schneiden, (nach §. 22. Zusatz 3.)

$$\frac{PE^3}{PS^2},$$

d. h. wenn S der Brennpunkt der Ellipse, also PE constant ist, indirect

$$PS^2$$

proportional.

Mit derselben Kürze, mit welcher wir §. 27. auf die Parabel und Hyperbel übertragen haben, könnten wir dies auch bei dem vorliegenden §. ausführen; allein wegen der Wichtigkeit der Aufgabe und ihrer häufigen Anwendung in der Folge wird es nicht unpassend sein, diese andern Fälle durch besondere Beweise zu bestätigen.

§. 30. Aufgabe. Ein Körper bewegt sich in einer Hyperbel, man sucht das Gesetz der nach ihrem Brennpunkte gerichteten Centripetalkraft.

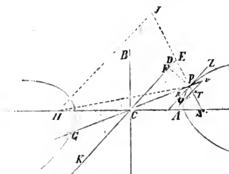


Fig. 25.

Es seien CA und CB die halben Axen der Hyperbel, PG und KD conjugirte Durchmesser, PF ein auf den letzteren gefälltes Perpendikel und Qv die Ordinate des Punktes Q zum Durchmesser GP als Abscissenaxe. Man ziehe SP, welche den Durchmesser DK in E und die Ordi-

nate Qv in x schneidet, und vollende das Parallelogramm QRPx. Offenbar ist.

$$EP = AC.$$

Zieht man nämlich vom andern Brennpunkt H

$$HJ \mathrel{\mp} EC,$$

so wird, weil

$$CS = CH$$

auch

$$ES = EJ\ ;$$

mithin

$$EP = ES - PS = \tfrac{1}{2}(2\,.\,ES - 2\,.\,PS) = \tfrac{1}{2}(EJ + EP - PS - PS)$$
$$= \tfrac{1}{2}(PJ - PS).$$

Da aber

$$HJ \mathrel{\mp} PR,$$

also

$$\angle\ PJH = ZPJ = RPH = PHJ$$
$$JP = PH$$

und so

$$1.\quad EP = \tfrac{1}{2}(PH - PS) = CA.$$

Auf SP fälle man das Perpendikel QT, alsdann ist, wenn man den Haupt-Parameter der Hyperbel

$$2.\quad \frac{2\,.\,BC^2}{CA} = L$$

setzt,

$$L\,.\,QR : L\,.\,Pv = QR : Pv = Px : Pv = PE : PC = AC : PC$$

ferner

$$L\,.\,Pv : Gv\,.\,vP = L : Gv$$

also

$$3.\quad L\,.\,QR : Gv\,.\,Pv = L\,.\,AC : Gv\,.\,PC.$$

Da nun

$$Gv\,.\,Pv : Qv^2 = PC^2 : CD^2$$

so wird

$$4.\quad L\,.\,QR : Qv^2 = L\,.\,AC\,.\,PC : Gv\,.\,CD^2,$$

nnd weil nach §. 8., wenn Q und P zusammenfallen,

$$Qv = Qx,$$

auch

$$5.\quad L\,.\,QR : Qx^2 = L\,.\,AC\,.\,PC : Gv\,.\,CD^2.$$

Ferner ist

$$Qx^2 : QT^2 = EP^2 : PF^2 = CA^2 : PF^2 = CD^2 : CB^2 \text{ (§. 26.)}$$

also

$$L\,.\,QR : QT^2 = L\,.\,AC\,.\,PC : Gv\,.\,CB^2$$

und weil

$$L\,.\,AC = 2\,.\,BC^2 \text{ (Gl. 2.)}$$

$$6.\quad L\,.\,QR : QT^2 = 2\,.\,PC : Gv.$$

Fallen die Punkte P und Q zusammen, so wird

$$2\,.\,PC = Gv,$$

mithin in diesem Falle (nach Gl. 6.)

$$7.\quad QT^2 = L\,.\,QR,$$

und indem man auf beiden Seiten durch $\frac{SP^2}{QR}$ multiplicirt

8. $\frac{QT^2 . SP^2}{QR} = L . SP^2.$

Nach §. 21., Zusasz 1. und 5. ist daher die Centripetalkraft

$$L . SP^2,$$

oder weil L constant ist,

$$SP^2$$

indirect proportional.

Zweiter Beweis. Man suche die Kraft, welche nach dem Mittelpunkte C der Hyperbel gerichtet ist; dieselbe ist dem Abstande CP proportional (§. 27., Zusatz 1.). Alsdann wird (nach §. 22., Zusatz 3.) die nach dem Brennpunkte S gerichtete Kraft

$$\frac{PE^3}{PS^2},$$

d. h. weil PE constant ist,

$$PS^2$$

indirect proportional.

Eben so wird bewiesen, dass, wenn die Centripetalkraft in eine Centrifugalkraft verwandelt ist, der Körper sich in der entgegengesetzten Hyperbel bewege.

§. 31. Lehnsatz. Der Parameter einer Parabel, welcher sich auf einen beliebigen Scheitelpunct bezieht, ist dem vierfachen Abstand jenes Scheitels vom Brennpunkte gleich.

Bekannt aus der Lehre von den Kegelschnitten.[17]).

§. 32. Lehnsatz. Das Perpendikel, welches vom Brennpunkte einer Parabel auf eine Tangente gefällt wird, ist die mittlere Proportinallinie zwischen der Entfernung des Brennpunktes vom Berührungspunkte und der Entfernung des erstern vom Hauptscheitelpunkte.

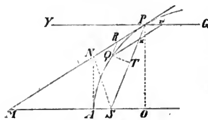


Fig. 26.

Es sei AQP eine Parabel, S ihr Brennpunkt, P ein Berührungspunkt, PO die Ordinate desselben, AO die Axe, PM die Tangente, welche die Axe in M schneidet, endlich SN das Perpendikel von S auf PM. Man ziehe AN. Da nun

$$MS = PS,$$
$$MN = NP,$$

und

$$MA = AO;$$[18])

so ist

$$AN \# PO$$

und

$$\angle SAN = 90^0;$$

also

$$\triangle\ SAN \sim SMN \sim SPN$$

und

$$PS : SN = SN : SA. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Zusatz 1. Es ist

$$PS^2 : SN^2 = PS : SA.$$

Zusatz 2. Da SA constant, so ist SN^2 proportional PS.

Zusatz 3. Der Durchschnittspunkt der beliebigen Tangente PM mit dem aus dem Brennpunkte S auf sie gefällten Perpendikel SN fällt in die gerade Linie AN, welche die Parabel im Hauptscheitelpunkte A berührt.

§. 33. Aufgabe. Ein Körper bewegt sich auf einer Parabel; man sucht das Gesetz der nach dem Brennpunkte gerichteten Centripetalkraft. In der Figur des vorhergehenden Paragraphen sei P der Körper auf dem Umfange der Parabel, und man ziehe vom Punkte Q, wohin er zunächst gelangen wird,

$$QR \mathbin{\#} SP$$

$$QT \text{ senkrecht auf } SP$$

und

$$Qv \mathbin{\#} PM,$$

wobei Qv den Durchmesser YPG in v und den Radius PS in x schneidet. Da nun

$$\triangle\ Pxv \sim MSP$$

und

$$SM = SP,$$

so ist auch

$$1. \quad Pv = Px = RQ.$$

Nach §. 31. ist aber

$$Qv^2 = 4PS \,.\, Pv = 4PS \,.\, QR.$$

Fallen nun die Punkte P und Q zusammen, so wird nach §. 8.

$$Qv = Qx$$

und in diesem Falle

$$2. \quad Qx^2 = 4PS \,.\, QR.$$

Da aber

$$\triangle\ QxT \sim PSN,$$

so haben wir

$$\begin{aligned} Qx^2 : QT^2 &= PS^2 : SN^2 \\ &= PS : AS \ (\text{§. 32., Zusatz 1.}) \\ &= 4PS \,.\, QR : 4AS \,.\, QR \end{aligned}$$

also, da nach Gl. 2.

$$Qx^2 = 4PS \,.\, QR, \text{ auch}$$

$$3. \quad QT^2 = 2PS \,.\, QR.$$

Indem man auf beiden Seiten der Gl. 3. durch $\frac{SP^2}{QR}$ multiplicirt, wird

$$4. \quad \frac{SP^2 \,.\, QT^2}{QR} = 4AS \,.\, PS^2,$$

also nach §. 21., Zusatz 1. und 5. die Centripetalkraft $4AS \,.\, PS^2$ oder weil

$$4AS \text{ constant ist, } PS^2$$

indirect proportional.

Zusatz 1. Aus den drei letzen Aufgaben (§. 29, 30. und 33.) ergiebt sich Folgendes. Geht ein Körper P vom Punkt P aus längs der beliebigen geraden Linie PR mit irgend einer Geschwindigkeit fort, und wirkt auf ihn zugleich eine Centripetalkraft ein, welche dem Quadrat seines Abstandes vom Mittelpunkte der Kräfte indirect proportional ist; so bewegt sich dieser Körper in einem Kegelschnitte, dessen Brennpunkt im Centrum der Kräfte liegt, und umgekehrt. Ist nämlich der Brennpunkt, der Berührungspunkt und die Lage der Tangente gegeben; so kann man einen Kegelschnitt beschreiben, welcher in jenem letztern Punkte eine gegebene Krümmung hat. Die Krümmung wird aber durch die gegebene Centripetalkraft und die Geschwindigkeit des Körpers bekannt und zwei sich wechselseitig berührende Bahnen können nicht vermöge derselben Centripetalkraft und bei derselben Geschwindigkeit beschrieben werden.

Zusatz 2. Ist die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper von seinem Orte P ausgeht, so gross, dass die kleine Linie PR in irgend einem sehr kleinen Zeittheilchen beschrieben werden kann, und die Centripetalkraft vermögend ist, ihn in derselben kleinen Zeit durch den kleinen Raum QR zu bewegen, so beschreibt der Körper einen Kegelschnitt, dessen Parameter

$$= \frac{QT^2}{QR},$$

von QT und QR beide als in's Unendliche verkleinert gedacht werden.

Den Kreis zähle ich hier zur Ellipse, und nehme denjenigen Fall aus, in welchem sich der Körper geradlinig gegen das Centrum der Kräfte bewegt.

§. 34. Lehrsatz. Bewegen sich mehrere Körper um ein gemeinschaftliches Centrum, und nimmt die Centripetalkraft indirect im doppelten Verhältniss der Entfernung vom Centrum ab; so stehen die Parameter der Bahnen im doppelten Verhältniss derjenigen Flächen, welche die Körper mit den nach dem Centrum gezogenen Radien gleichzeitig beschreiben.

Nach §. 33., Zusatz 2. ist nämlich der Parameter

$$L = \frac{QT^2}{QR},$$

wo QT und QR die letzten Werthe beim Zusammenfallen der Punkte P und Q haben. Die sehr kleine Linie QR ist aber, bei gegebener Zeit, der sie erzeugenden Kraft, d. h. nach der Voraussetzung

$$SP^2$$

indirect proportional. Es ist daher

$$\frac{QT^2}{QR} \text{ proportional } QT^2 . SP^2,$$

d. h. der Parameter steht im doppelten Verhältniss der Fläche QT . SP.

Zusatz. Hieraus folgt, dass der ganze Flächeninhalt einer Ellipse und das ihm proportionale Rechteck über beiden Axen im zusammen-

gesetzten Verhältniss der Quadratwurzel aus dem Parameter und der Umlaufszeit stehen[19]). Die ganze Fläche ist nämlich dem Produkt aus der in einer gegebenen Zeit beschriebenen Fläche

$$QT . SP$$

in die Umlaufszeit proportional.

§. 35. **Lehrsatz.** Unter denselben Voraussetzungen wird die Umlaufszeit der $^3/_2$ten Potenz der grossen Axe proportional sein.

Sind 2a und 2b bezüglich die grosse und kleine Axe einer Ellipse, so ist

$$2a : 2b = 2b : L$$

also

$$2b = \sqrt{2aL}$$
$$2a . 2b = (2a)^{3/2} \sqrt{L},$$

also

$4ab$ proportional $(2a)^{3/2} \sqrt{L}$; aber nach §. 34. Zusatz

$4ab$ auch proportional $T \sqrt{L}$,

mithin ist T proportional $(2a)^{3/2}$. W. z. b. w.

Zusatz. Die Umlaufszeiten in Ellipsen sind daher denjenigen in Kreisen gleich, wenn die Durchmesser der letztern den grossen Axen der erstern gleich sind.

§. 36. **Lehrsatz.** Ist wieder dasselbe vorausgesetzt, zieht man ferner durch den Ort der Körper Linien, welche daselbst die Bahn berühren und fällt man endlich Perpendikel vom gemeinschaftlichen Brennpunkte auf diese Tangenten; so sind die Geschwindigkeiten zusammengesetzt

den Perpendikeln **indirect**

und der Quadratwurzel aus dem Parameter

direct proportional.

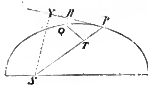


Fig. 27.

Fällt man aus dem Brennpunkt S das Perpendikel SY auf die Tangente PR, so soll die Geschwindigkeit des Körpers

$$\frac{\sqrt{L}}{SY}$$

proportional sein.

Dieselbe ist nämlich dem sehr kleinen, im gegebenen Zeittheilchen beschriebenen, Bogen PQ, d. h. nach §. 7. der Tangente proportional. Da nun

$$PR : QT = PS : SY,$$

so ist jene Geschwindigkeit

$$\frac{QT . PS}{SY} \text{ proportional}$$

und nach §. 34.

$QT . PS$ proportional $\sqrt{L}$. W. z. b. w.

Zusatz 1. Die Parameter stehen im zusammengesetzten doppelten Verhältniss der Perpendikel auf die Tangenten und der Geschwindigkeiten.

Zusatz 2. Die Geschwindigkeiten der Körper in dem grössten und kleinsten Abstande vom gemeinschaftlichen Brennpunkte, sind indirect den Abständen und direct der Quadratwurzel aus dem Parameter proportional. In diesem Falle sind nämlich Entfernung und Perpendikel identisch.

Zusatz 3. Daher verhält sich die Geschwindigkeit auf dem Kegelschnitt, im grössten oder kleinsten Abstande vom Brennpunkte, zu der Geschwindigkeit auf einem Kreise, dessen Halbmesser gleich diesem grössten oder kleinsten Abstande ist, wie die Quadratwurzel aus dem Parameter zur Quadratwurzel aus dem doppelten Abstande.[20])

Zusatz 4. Die Geschwindigkeiten solcher Körper, welche sich in Ellipsen bewegen, sind im mittleren Abstande vom gemeinschaftlichen Brennpunkte dieselben, welche Körper besitzen, die sich in Kreisen von diesem mittlern Abstande als Halbmesser bewegen. Nach §. 18., Zusatz 6. sind sie also den Quadratwurzeln aus diesen Abständen indirect proportional.

Die Perpendikel sind nämlich hier gleich den halben kleinen Axen und diese verhalten sich wie die mittlern Proportionalen zwischen den Parametern und den Abständen. Setzt man dieses Verhältniss indirect mit dem halben Verhältniss der Parameter, direct genommen, zusammen, so entsteht das indirecte Verhältniss der Quadratwurzeln aus den Abständen.[21])

Zusatz 5. In derselben oder in gleichen Figuren, oder auch in ungleichen Figuren, deren Parameter gleich sind, ist die Geschwindigkeit dem vom Brennpunkte auf die Tangente gefällten Perpendikel indirect proportional.

Zusatz 6. In der Parabel verhält sich die Geschwindigkeit indirect, wie die Quadratwurzel aus der Entfernung vom Brennpunkt; in der Ellipse ist das Verhältniss grösser, in der Hyperbel kleiner. Nach §. 32., Zusatz 2. verhält sich nämlich das vom Brennpunkte auf die Tangente gefällte Perpendikel wie die Quadratwurzel aus dem Abstande, in der Hyperbel variirt es weniger, in der Ellipse mehr.

Zusatz 7. In der Parabel verhält sich in einem beliebigen Abstande vom Brennpunkte die Geschwindigkeit eines Körpers zu der in einem Kreise, dessen Halbmesser dem Abstande gleich ist, wie

$$\sqrt{2} : 1.$$

In der Ellipse ist das Verhältniss kleiner und in der Hyperbel grösser. Nach Zusatz 2. steht nämlich die Geschwindigkeit im Scheitel der Parabel in diesem Verhältniss, und nach Zusatz 6., wie auch nach §. 18., Zusatz 6. bleibt das Verhältniss in allen Abständen dasselbe. Daher ist auch die Geschwindigkeit in der Parabel gleich der in einem Kreise, dessen Halbmesser halb so gross als der Abstand in der Parabel ist. In der Ellipse ist sie kleiner, in der Hyperbel grösser.

Zusatz 8. Die Geschwindigkeit in einem beliebigen Kegelschnitt verhält sich zu der in einem Kreise, dessen Halbmesser dem halben

Parameter gleich ist, wie dieser Halbmesser zum Perpendikel vom Brennpunkte auf die Tangente des Kegelschnittes. Dies folgt aus Zusatz 5.

Zusatz 9. Da nach §. 18, Zusatz 6. die Geschwindigkeit in diesem Kreise sich zu der in einem andern Kreise indirect wie die Quadratwurzeln aus den Radien verhält, so wird sich auch die Geschwindigkeit in dem Kegelschnitt verhalten zu der Geschwindigkeit in einem Kreise, dessen Halbmesser gleich dem Abstand in jenem ist, wie die mittlere Proportionale zwischen jenem gemeinschaftlichen Abstande und dem halben Parameter zu dem Perpendikel, welches vom gemeinschaftlichen Brennpunkte auf die Tangente des Kegelschnittes gefällt wird.[22])

§. 37. Aufgabe. Die Centripetalkraft ist indirect dem Quadrate des Abstandes vom Centrum proportional, und man kennt die absolute Grösse jener Kraft; man sucht die Linie, welche ein Körper beschreibt, der von einem gegebenen Orte, mit gegebener Geschwindigkeit und nach gegebener Richtung ausgeht.

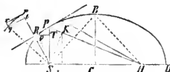


Fig. 28.

Die nach dem Punkte S gerichtete Centripetalkraft sei so beschaffen, dass sie der Körper p in der beliebigen Bahn pq wandern lässt und man kenne seine Geschwindigkeit im Punkte p. Vom Punkte P gehe der Körper längs PR mit gegebener Geschwindigkeit aus, und werde dann durch die Centripetalkraft in den Kegelschnitt PQ gebracht. Die letztere Curve wird daher durch PR im Punkte P berührt. Eben so berühre pr die Curve pq in p. Denkt man sich von S auf beide Tangenten Perpendikel gefällt, so steht nach §. 36, Zusatz 1. der Parameter des Kegelschnittes zu dem der gegebenen Curve in einem Verhältniss, welches aus dem Quadrat der Perpendikel und dem der Geschwindigkeiten zusammengesetzt ist; ersterer ist mithin gegeben und sei $= L$.

Ferner ist der Brennpunkt S des Kegelschnitts gegeben, und setzt man $\angle RPH = 180^0 - RPS$, so ist die Richtung der Linie PH, in welcher der andere Brennpunkt H liegt, bekannt. Zieht man nun SK perpendikulär auf PH, so ist

$$1. \quad SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2$$
$$= (SP + PH)^2 - L(SP + PH)$$
$$= SP^2 + 2SP.PH + PH^2 - L(SP + PH)$$

Da nun auch

$$2. \quad SH^2 = SP^2 + PH^2 - 2PH.PK.$$

so wird

$$-2PH.PK = 2SP.PH - L(SP + PH)$$

oder

$$L.(SP + PH) = 2PH(PS + PK)$$

endlich

$$3. \quad SP + PH : PH = 2(PS + PK) : L.$$

Mithin ist PH der Lage und Grösse nach bekannt. Ist die Geschwindigkeit des Körpers in P so beschaffen, dass

$$L < 2(PS + PK)$$

also auch

$$PH < SP + PH,$$

so liegt PH auf derselben Seite der Tangente PR, auf welcher die Linie PS liegt, die Figur ist eine Ellipse und die grosse Axe $= SP + PH$ bekannt.

Ist die Geschwindigkeit des Körpers der Art, dass

$$L = 2(PS + PK)$$

also auch

$$PH = PH + PS,$$

so wird $PH = \infty$, die Figur eine Parabel, deren Axe

$$SH \ddagger PK$$

und daher bekannt.

Ist endlich

$$L > 2(PS + PK),$$

also auch

$$PH > PH + PS;$$

so muss PH auf der andern Seite der Tangente angenommen werden, und da die letztere zwischen beiden Brennpunkten durchgesetzt, wird die Figur eine Hyperbel, deren Hauptaxe

$$= SP - PH \text{ oder } PH - PS,$$

also bekannt.

Bewegt sich nämlich der Körper in diesen Fällen in einem so gefundenen Kegelschnitte; so ist nach §. 29., 30. und 32. die Centripetalkraft dem Quadrat der Entfernung des Körpers vom Centrum indirect proportional. Es wird daher die Linie PQ, welche er vermöge einer solchen Kraft beschreibt, richtig dargestellt, wenn er vom gegebenen Orte P aus mit gegebener Geschwindigkeit längs der ihrer Lage nach gegebenen geraden Linie PR fortgeht.

Zusatz 1. Hiernach wird man in jedem Kegelschnitte aus dem gegebenen Hauptscheitelpunkte D, dem Parameter L und dem Brennpunkte S den andern Brennpunkt H finden können. Die Proportion 3.

$$SP + PH . PH = 2(PS + PK) : L$$

wird nämlich in diesem Falle

$$SD + DH : DH = 2(DS + DS) : L$$
$$= 4DS : L$$

und hieraus

$$SD : DH = 4DS - L : L,$$

wodurch DH bekannt wird.

Zusatz 2. Ist daher die Geschwindigkeit des Körpers im Hauptscheitelpunkte D gegeben, so findet man leicht die ganze Bahn.

Nimmt man nämlich nach §. 36., Zusatz 3.

$$L : 2DS$$

wie das Quadrat der gegebenen Geschwindigkeit zum Quadrate der Geschwindigkeit in einem Kreise, dessen Halbmesser = DS; so erhält man DS. Hierauf aus

$$SD : DH = 4DS - L : L$$

auch DH.

Zusatz 3. Bewegt sich der Körper in einem beliebigen Kegelschnitte, und wird er durch irgend einen Anstoss aus seiner Bahn gebracht, so kann man diejenige Bahn kennen lernen, in welcher er nachher seinen Lauf fortsetzen wird.

Setzt man nämlich die eigene Bewegung des Körpers mit derjenigen zusammen, welche der Anstoss allein hervorbringen würde, so erhält man die Bewegung, mit welcher der Körper von dem gegebenen Orte des Anstosses aus, nach einer gegebenen geraden Linie fortgehen wird.

Zusatz 4. Wird der Körper durch irgend eine, von aussen her einwirkende Kraft beständig gestört, so wird sein Lauf sehr nahe bekannt, indem man die Aenderungen bestimmt, welche jene Kraft in einigen Punkten hervorbringt und aus der Analogie der Reihe, die fortwährenden Aenderungen in den zwischenliegenden Punkten abschätzt.

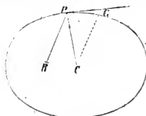


Fig. 29.

§. 37a. Anmerkung. Wenn ein Körper P, vermöge einer nach einem beliebigen Punkte R gerichteten Centripetalkraft, sich auf dem Umfange irgend eines gegebenen Kegelschnittes bewegt, dessen Mittelpunkt in C liegt und man das Gesetz dieser Centripetalkraft sucht; so ziehe man CG dem Radius Vector RP parallel, und verlängere erstere bis sie die in P an der Bahn gezogene Tangente PG in G schneidet. Alsdann ist jene Kraft (nach §. 27., Zusatz 1., §. 28. und §. 22., Zusatz 3.) proportional

$$\frac{CG^3}{RP^2}.$$

ABSCHNITT IV.

Von der Bestimmung der elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Bahnen aus einem gegebenen Brennpunkt.

§. 38. **Lehnsatz.** Von den beiden Brennpunkten S und H einer Ellipse oder Hyperbel werden nach einem dritten Punkte V zwei gerade Linien SV und HV gezogen, deren eine HV gleich der grossen Axe, die andere SV durch das auf sie gefällte Perpendikel TR in T halbirt wird. Alsdann berührt dieses Perpendikel die Curve irgendwo und umgekehrt, wenn es sie berührt, ist VH gleich der Axe der Figur.

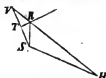


Fig. 30.

Es schneide das Perpendikel die, erforderlicher Weise verlängerte, gerade Linie HV in R und man ziehe SR. Da nun

$$TS = TV,$$

so wird

$$SR = VR$$

und

$$\angle TRS = TRV.$$

Der Punkt R liegt daher auf dem Kegelschnitt und TR berührt ihn, und umgekehrt. W. Z. B. W.

§. 39. **Aufgabe.** Gegeben ist der Brennpunkt und die Hauptaxe; man soll eine Ellipse oder Hyperbel beschreiben, welche durch gegebene Punkte geht und der Lage nach gegebene Linien berührt.

S sei der gemeinschaftliche Brennpunkt, AB die Länge der grossen Axe, P der Punkt, durch welchen die Curve gehen und TN die Linie, welche sie berühren soll.

Aus P beschreibe man mit AB — SP für eine Ellipse

AB + SP „ „ Hyperbel

als Radius den Kreisbogen HG. Man fälle auf TR das Perpendikel ST und verlängere es, bis

$$ST = TS$$

wird, und beschreibe aus V mit AB als Radius den Kreisbogen HF. Auf diese Weise lassen sich stets zwei Kreise schlagen. Es mögen gegeben sein zwei Punkte P und p, zwei Tangenten TR und tr,

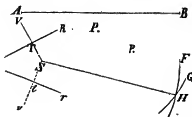


Fig. 31.

Ist H der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der beiden Kreisbogen, so beschreibe man zu S und H als Brennpunkten und AB als grosser Axe die Curve; alsdann wird dieselbe der Bedingung Genüge leisten. Da

$$PH + SP = AB \text{ für die Ellipse}$$

und

$$PH - SP = AB \text{ „ „ Hyperbel;}$$

so geht die Curve durch den Punkt P, und sie berührt nach §. 38. die Linie TR.

Auf dieselbe Weise wird dargethan, dass sie respective durch die beiden Punkte P und p gehen, oder die Linien TR und tr berühren wird.

§. 40. Aufgabe. Um den gegebenen Brennpunkt eine Parabel zu beschreiben, welche durch einen gegebenen Punkt geht und der Lage nach gegebene Linien berührt.

S sei der Brennpunkt, P der gegebene Punkt und TR die ebenfalls gegebene Tangente der zu beschreibenden Curve. Man beschreibe aus P als Mittelpunkt mit PS als Radius den Bogen FG, fälle aus dem Brennpunkte S auf die Tangente das Perpendikel ST und mache dessen Verlängerung

$$TV = ST.$$

Fig. 32.

Auf dieselbe Weise ist ein anderer Bogen fg zu beschreiben, wenn ein anderer Punkt p gegeben, oder ein anderer Punkt v bei einer andern gegebenen Tangente tr zu suchen ist. Hierauf ziehe man JV, welche für zwei gegebene Punkte P und p beide Bogen FG und fg berührt, oder durch die Punkte V und v geht, wenn zwei Tangenten, oder durch V geht und FG berührt, wenn die Tangente TR und der Punkt P gegeben sind.

Auf JF fälle man das Perpendikel SJ, halbire dasselbe in K und beschreibe mit der Hauptaxe KS und zum Hauptscheitelpunkt K eine Parabel; alsdann ist diese die verlangte.

Da nämlich

$$SK = JK$$
$$SP = FP,$$

so geht die Parabel durch P, und da

$$ST = FV$$
$$\angle STR = 90^0,$$

berührt nach §. 32, Zusatz 3. die Parabel die Linie TR.

§. 41. Aufgabe. Um einen gegebenen Brennpunkt irgend eine, ihrer Art nach gegebene, Curve zu beschreiben, welche durch bestimmte Punkte geht und gegebene, gerade Linien berührt.

Fig. 33.

Erster Fall. Der Brennpunkt S ist gegeben, und die Curve soll durch die Punkte B und C gehen. Da die Curve ihrer Art nach gegeben ist, kennt man das Verhältniss der grossen Axe, zum gegenseitigen Abstande beider Brennpunkte, also das

$$1.\quad Aa : SH,$$

wenn H der andere Brennpunkt und Aa die grosse Axe ist. Nun mache man

$$2.\left\{\begin{array}{l} KB : BS = Aa : SH \text{ und} \\ LC : CS = Aa : SH. \end{array}\right.$$

Aus B und C als Mittelpunkten beschreibe man mit BK und CL als Radien Kreisbogen, ziehe an diese die Tangente KL und fälle auf die letztere das Perpendikel SG. In der Richtung des letztern bestimme man die Punkte A und a durch die Proportionen

$$3.\left\{\begin{array}{l} SA : AG = SB : BK \\ Sa : aG = SB : BK. \end{array}\right.$$

Die zu Aa als Axe und den Punkten A und a als Scheitelpunkten beschriebene Figur ist die verlangte.

Ist H der andere Brennpunkt, so folgt aus den Proportionen 3.

$$SA : AG = Sa : aG$$

hieraus

$$Sa - SA : aG - AG = SA : AG$$

oder

$$4.\quad SH : Aa = SA : AG;$$

also steht die gegenseitige Entfernung der Brennpunkte zur grossen Axe in dem verlangten Verhältniss. Da ferner nach 2.

$$KB : BS = Aa : SH \text{ und}$$
$$LC : CS = Aa : SH,$$

so geht die Figur nach der Lehre von den Kegelschnitten durch die Punkte B und C.[23])

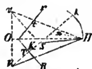


Fig. 34.

Zweiter Fall. Der Brennpunkt S ist gegeben, man soll die Curve construiren, welche die beiden Linien TR und tr irgendwo berührt.

Man fälle aus S auf die Tangenten die Perpendikel ST und St, und mache deren Verlängerungen

$$VT = TS \text{ und } vt = tS.$$

Hierauf halbire man Vv in O, errichte das unbestimmte Perpendikel OH auf Vv, und schneide die unbegrenzte Linie VS in K und k so, dass

$$VK : KS = Vk : kS = a : e,$$

wenn a die Hauptaxe und e der gegenseitige Abstand der Brennpunkte in der zu construirenden Figur sind. Ueber Kk als Durchmesser beschreibe man einen Kreis, welcher OH in H schneidet, und beschreibe dann zu S und H als Brennpunkten und einer grossen Axe = VH die Figur; alsdann ist diese die verlangte.

Man halbire Kk. in X und ziehe HX, HS, HV und Hv. Da

1. $VK : KS = a : e = Vk : kS$,

so ist auch

2. $VK + Vk : KS + kS = a : e$

und

3. $Vk - VK : kS - KS = a : e$.

Aber

4. $VK + Vk = 2\,VK + 2\,KX = 2\,VX$
5. $Vk - VK = 2\,KX = 2\,HX$
6. $KS + kS = 2\,KX = 2\,HX$
7. $kS - KS = kK - 2\,KS = 2\,KX - 2\,KS = 2\,SX$

demnach nach 2., 3., 4. und 6.

$$2\,VX : 2\,HX = 2\,HX : 2\,SX$$

oder

8. $VX : HX = HX : SX$

mithin

$$\triangle\, VXH \sim HXS$$

und so

$$VH : SH = VX : HX = VX - HX : XH - SX \text{ (Gl. 8.)}$$
$$VH : SH = VK : KS$$
$$= a : e. \text{ (Gl. 1.)}.$$

Demnach hat die grosse Axe VH der zu beschreibenden Figur zum Abstande SH ihrer Brennpunkte das verlangte Verhältniss. Da ferner VH und vH den grossen Axen gleich sind, und die Linien VS und vS durch TR und tr rechtwinklig geschnitten und halbirt werden; so sind die letztern nach §. 38. Tangenten der beschriebenen Figur 24.

Dritter Fall. Bei gegebenem Brennpunkt S ist die Curve zu bestimmen, welche TR im gegebenen Punkte R berühre.

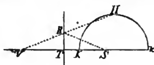


Fig. 35.

Man fälle auf PR das Perpendikel ST, und mache dessen Verlängerung

$$VT = ST$$

Hierauf ziehe man VR und suche auf der unbestimmt verlängerten Linie VS die Punkte K und k so, dass

$$VK : KS = Vk : kS = a : e$$

werde, wo a und e dieselbe Bedeutung, wie im zweiten Falle haben. Ueber Kk als Durchmesser beschreibe man einen Kreis, welcher VR in H schneidet und construire nun zu S und H als Brennpunkten und der Axe HV die Figur; alsdann ist diese die verlangte.

Dass

$$VH : SH = VK : SK = a : e$$

sei, erhellt aus dem Beweise des zweiten Falles, daher ist die zu beschreibende Figur die verlangte. Dass TR, welche den Winkel VRS halbirt, die Curve in R berühre, folgt aus der Lehre von den Kegelschnitten.[24])

Vierter Fall. Um einen gegebenen Brennpunkt S soll die

Curve APR construirt werden, welche TR berühre, durch einen ausserhalb der Tangente liegenden Punkt P gehe und der Curve apb, die zur grossen Axe ab und den Brennpunkten s und h beschrieben ist, ähnlich werde.

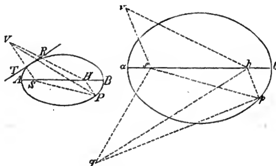


Fig. 36.

Auf die Tangente TR fälle man das Perpendikel ST und mache dessen Verlängerung VT = ST.
Hieranf mache man

$$\angle\ hsq = VSP$$
$$\angle\ shq = SVP,$$

und mit einem Radius r, den man aus der Proportion

$$t\,.\,r : ab = SP : SV$$ [25])

findet, beschreibe man aus q als Mittelpunkt einen Kreisbogen, der die Figur apb in p schneidet. Man ziehe sp, und bestimme aus der Proportion

$$2.\quad sp : SP = sh : SH$$

die Linie SH, wodurch

$$\angle\ PSH = psh$$
$$VSH = psq$$

wird. Zieht man dann VH, und beschreibt zu der Linie VH als grosser Axe, und S und H als Brennpunkten eine Ellipse; so ist diese die verlangte Figur.

Zieht man die Linie sv, deren Länge durch die Proportion

$$3.\quad sv : vp = sh : sq$$

bestimmt wird, so dass

$$\angle\ vsp = hsq$$
$$vsh = psq,$$

so ist

$$\triangle\ svh \sim spq$$

mithin

$$4.\quad vh : pq = sh : sq,$$

d. h. weil

$$\triangle\ VSP \sim hsq$$

$$5. \quad \begin{cases} vh : pq = VS : SP \\ \quad\quad = ab : r \text{ (Prop. 1.).} \\ vh : pq = ab : pq. \end{cases}$$

Es ist daher

$$vh = ab,$$

und da ferner

$$\triangle VSH \sim vsh$$

auch

$$6. \quad VH : SH = vh : sh.$$

Die beschriebene Figur ist mithin der gegebenen ähnlich, weil nach der Construction die grosse Axe und der gegenseitige Abstand der Brennpunkte in beiden proportional sind. Die erhaltene Figur geht durch den gegebenen Punkt P, weil

$$\triangle PSH \sim psh,$$

und da endlich VH gleich der grossen Axe und VS durch TR perpendikulär in zwei gleiche Theile geschnitten wird, berührt TR die Curve.

§. 42. Lehnsatz. Von drei gegebenen Punkten aus soll man nach einem vierten nicht gegebenen drei gerade Linien ziehen, deren Unterschiede entweder gegeben oder gleich Null sind.

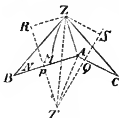


Fig. 37.

Erster Fall. Die drei gegebenen Punkte seien A, B, C, der vierte zu findende Z. Da der Unterschied

$$BZ - AZ = MN$$

gegeben ist, so wird Z auf einer Hyperbel liegen, deren Brennpunkte A und B und deren grosse Axe MN ist. Bestimmt man nun den Punkt P auf AB so, dass

$$1. \quad PM : MA = MN : AB,$$

errichtet man PR perpendikulär auf AB, fällt man das Perpendikel ZR auf PR; so hat man nach den Gesetzen der Hyperbel

$$2. \quad ZR : AZ = MN : AB.$$[26])

Aus demselben Grunde liegt Z auf einer andern Hyperbel, deren Brennpunkte A und C sind und deren grosse Axe dem Unterschiede

$$CZ - AZ$$

gleich ist. Errichtet man QS perpendikulär auf AC, fällt man vom Punkte Z der zweiten Hyperbel das Perpendikel ZS auf QS; so hat man wie vorhin

$$3. \quad ZS : AZ = CZ - AZ : AC.$$

Die Verhältnisse ZR : AZ und ZS : AZ sind demnach bekannt, mithin auch das Verhältniss

$$ZR : ZS.$$

Treffen daher die Linien RP und QS im Punkte T zusammen, und zieht man die Linien TZ und TA, so ist die Figur TRZS ihrer Form und die Linie TZ, auf welcher der Punkt Z irgendwo sich befindet, ihrer

Lage nach gegeben. Man kennt ferner die Linie TA und den Winkel ATZ, und wegen der gegebenen Verhältnisse AZ : ZS und TZ : ZS auch das AZ : TZ. Demnach ist das Dreieck ATZ, in dessen Spitze der zweite Punkt Z liegt, bekannt.

Zweiter Fall. Sind zwei der drei Linien einander gleich, ist etwa

$$AZ = BZ,$$

so liegt der Punkt Z in dem Perpendikel, welches in der Mitte von AB auf dieser Linie errichtet ist; der zweite geradlinige Ort desselben Punktes wird wie vorhin durch $\triangle$ ATZ gefunden.

Dritter Fall. Sind alle drei Linien einander gleich, so liegt Z im Mittelpunkte des durch A, B, C gehenden Kreises.

Die Lösung dieses Lehnsatzes findet man auch in dem, von Vieta restituirten, Werke: Liber Tactionum Appollonii.

§. 43. Aufgabe. Um einen gegebenen Brennpunkt eine Curve zu beschreiben, welche entweder durch gegebene Punkte geht, oder gegebene gerade Linien berührt.

Fig. 38.

S sei der gegebene Brennpunkt, P der gegebene Punkt, TR die Tangente; man sucht den andern Brennpunkt H

Fällt man das Perpendikel ST von S auf TR, macht man die Verlängerung

$$TY = TS$$

ferner

$$YH = 2a,$$

wo 2a die grosse Axe bezeichnet; verbindet man hierauf P mit S und H; so wird

$$SP = 2a - PH.$$

Sind demnach mehrere Tangenten gegeben, so kennt man eben so viele einander gleiche Linien YH, und sind mehrere Punkte P gegeben, so kennt man eben so viele Linien PH, welche um gegebene SP von 2a verschieden sind. Hieraus findet man nach §. 42. den andern Brennpunkt H. Hat man aber die Brennpunkte und zugleich die grosse Axe (welche entweder = YH, oder in der Ellipse = PH + PS und in der Hyperbel = PH — PS ist); so erhält man auch die Curve.

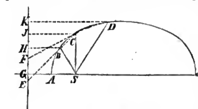


Fig 39.

§. 44. Anmerkung. Der Fall, in welchem drei Punkte gegeben sind, wird folgendermassen kürzer gelöst. Sind B, C, D die drei Punkte, so verbinde man B mit C und C mit D, verlängere beide Linien BC, CD so weit bis E und F, dass

1. EB : EC = SB : SC
2. FC : FD = SC : SD

werde. Hierauf ziehe man die Linie EF und fälle auf sie die Perpendikel SG und BH. Auf der unbestimmt verlängerten Linie SG mache man

3. GA : AS = HB : BS
4. Ga : aS = BH : BS;

alsdann wird A der Scheitelpunkt und Aa die grosse Axe der Curve.

Je nachdem

$$GA \left\{ \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} \right\} SS,$$

wird die Curve eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Der Punkt a liegt im ersten Falle auf derselben Seite wie A von GK, im zweiten in unendlicher Entfernung, im dritten auf der entgegengesetzten Seite.

Fällt man auf GF die Perpendikel CJ und DK, so hat man

5. JC : HB = EC : EB = SC : SB (Prop. 1.)
6. JC : SC = HB : SB = GA : AS (Prop. 3.)

Es liegen daher die Punkte B, C, D in dem, um den Brennpunkt S beschriebenen, Kegelschnitt so (§. 40.), dass die Verbindungslinien derselben mit dem Brennpunkte zu den Perpendikeln auf GK in jenem gegebenen Verhältniss stehen.

Nach einer wenig hiervon verschiedenen Methode hat La Hire eine Auflösung dieser Aufgabe in seiner Lehre von den Kegelschnitten, Buch 8., Satz 25. gegeben.

Ist die Curve eine Hyperbel, so begreife ich unter diesem Namen nur die eine Seite, indem der Körper bei der Fortsetzung seiner Bewegung nicht in den entgegengesetzten Zweig übergehen kann.

ABSCHNITT V.

Bestimmung der Bahnen, wenn keiner von beiden Brennpunkten gegeben ist.

§ 45. Lehnsatz. Werden von einem Punkte P auf einem Kegelschnitte nach den vier Seiten eines, in demselben beschriebenen, Vierecks ABDC vier gerade Linien PQ, PR, PS und PT unter gegebenen Winkeln mit den einzelnen Seiten gezogen; so steht das Rechteck aus den beiden, aus entgegengesetzten Seiten gezogenen, Linien

PQ . PR

zu dem aus den beiden andern Linien

PS . PT

in einem constanten Verhältniss.

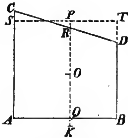


Fig. 40.

Erster Fall. Es sei

$$PQ \mathrel{\#} AC$$

und

$$PR \mathrel{\#} AC,$$

eben so

$$PS \mathrel{\#} AB$$

und

$$PT \mathrel{\#} AB$$

ausserdem

$$AC \mathrel{\#} BD.$$

Die gerade Linie, welche die parallelen Seiten halbirt, wird daher ein Durchmesser des Kegelschnittes sein und auch RQ halbiren. Es sei O dieser Halbirungspunkt, also PO eine Ordinate in Bezug auf jenen Durchmesser als Abscissenaxe. Man verlängere PO bis K, so dass

$$OK = OP$$

werde; alsdann ist OK die Ordinate auf der entgegengesetzten Seite des Durchmessers. Da die Punkte

A, B, P, K

auf dem Umfang des Kegelschnittes liegen und PK die Seite AB unter einem gegebenen Winkel schneidet, so ist (nach Appollonius, Buch III., Satz 17., 19., 21. und 23.).

$$1. \quad \frac{PQ \,.\, QK}{AQ \,.\, QB} = \text{Constans.}$$ [27]

Da aber

$$OP = OK$$

und

$$OR = OQ,$$

so ist

$$PR = KQ$$

und

$$PQ \,.\, QK = PQ \,.\, PR.$$

Da ferner

$$AQ = PS$$

und

$$QB = PT,$$

also

$$AQ \,.\, QB = PS \,.\, PT;$$

so steht das Rechteck PQ . PR zu dem PS . PT in einem gegebenen constanten Verhältniss. W. Z. B. W.

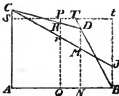


Fig. 41.

Zweiter Fall. Es sei nicht $AC \mathrel{\#} BD$, man ziehe aber

$$Bd \mathrel{\#} AC,$$

ferner schneide Bd die Linie ST in t und den Kegelschnitt in d. Hierauf ziehe man Cd welche PQ in r schneidet, ferner

$$DM \mathrel{\#} PQ,$$

so dass DM die Linie Cd im M, die AB in N schneide. Da nun

$$\triangle\ BTt \sim DNB \text{ und}$$
$$\triangle\ CRr \sim CDM,$$

so haben wir

$$Bt : Tt = DN : BN$$
$$Rr : AQ = DM : AN,$$

also

$$2.\quad Bt\,.\,Rr : Tt\,.\,AQ = DM\,.\,DN : AN\,.\,BN.$$

Da aber

$$Bt = PQ$$
$$AQ = PS;$$

so wird aus 2.

$$3.\quad PQ\,.\,Rr : Tt\,.\,PS = DM\,.\,DN : AN\,.\,BN.$$

Nach dem ersten Falle ist aber, wenn man D als Punkt in der Curve ansieht,

$$4.\quad DM\,.\,DN : AN\,.\,BN = PQ\,.\,Pr : PS\,.\,Pt$$

mithin

$$5.\quad PQ\,.\,Pr : PS\,.\,Pt = PQ\,.\,Rr : Tt\,.\,PS,$$

und hieraus

$$PQ\,.\,(Pr - Rr) : PS\,.\,(Pt - Tt) = PQ\,.\,Rr : Tt\,.\,PS$$

d. h.

$$6.\quad PQ\,.\,PR : PS\,.\,PT = DM\,.\,DN : AN\,.\,BN = \text{Constans.}$$

W. Z. B. W.

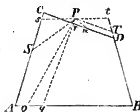


Fig. 42.

Dritter Fall. Gesetzt, die vier Linien

$$PQ,\ PR,\ PS,\ PT$$

seien nicht parallel den Seiten AC und AB, sondern beliebig gegen sie geneigt. Man ziehe nun,

$$Pq \mathbin{\#} AC,\qquad Pr \mathbin{\#} AC,$$
$$Ps \mathbin{\#} AB,\qquad Pt \mathbin{\#} AB;$$

alsdann kennt man, weil die Winkel PQq, PRr, PSs, PTt gegeben sind, die Verhältnisse

$$PQ : Pq,\ PR : Pr,\ PS : Ps,\ PT : Pt.$$

Nach dem vorhergehenden Beweise ist aber das Verhältniss

$$Pq\,.\,Pr : Ps\,.\,PT$$

constant, mithin ist dies auch mit dem Verhältniss

$$PQ\,.\,PR : PS\,.\,PT$$

der Fall. W. Z. B. W.

§. 46. **Lehnsatz.** Unter denselben Voraussetzungen, wie im vorhergehenden Lehnsatze, sei das Verhältniss

$$PQ\,.\,PR : PS\,.\,PT$$

constant; alsdann liegt der Punkt P, von welchem die vier Linien PQ, PR, PS, PT ausgehen, auf dem um das Viereck ABCD beschriebenen Kegelschnitt.

Durch die vier Punkte A, B, C, D und einen der unbestimmten

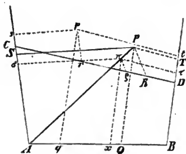


Fig. 43.

Punkte P, etwa p, denke man sich einen Kegelschnitt beschrieben; alsdann wird behauptet, dass auch P auf demselben liege. Wollte man dies nicht zugeben, so ziehe man die Linie AP, welche den Kegelschnitt in einem andern Punkte als P etwa in π schneiden mag. Nun ziehe man ferner von beiden Punkten p und π, unter gegebenen Winkeln, nach den Seiten des Vierecks die Linien

$$pq,\ pr,\ ps,\ pt \text{ und } \pi x,\ \pi\varrho,\ \pi\sigma,\ \pi\tau,$$

alsdann ist nach §. 45.

$$1.\quad \pi x\,.\,\pi\varrho : \pi\sigma\,.\,\pi\tau = pq\,.\,pr : ps\,.\,pt$$

und nach der Voraussetzung

$$2.\quad \pi x\,.\,\pi\varrho : \pi\sigma\,.\,\pi\tau = PQ\,.\,PR : PS\,.\,PT.$$

Da nun

$$\pi x A \sigma \sim PQAS,$$

hat man

$$3.\quad \pi x : \pi\sigma = PQ : PS;$$

es geht mithin die Proportion 2. über in die folgende:

$$4.\quad \pi\varrho : \pi\tau = PR : PT$$

und es ist $D\varrho\pi\tau \sim DRPT$,

wesshalb ihre Diagonalen $D\pi$ und DP zusammenfallen müssen. Es fällt daher π in den Durchschnitt der Linien AP und DP, also in P. Dieser, wo er auch angenommen werde, fällt auf den angegebenen Kegelschnitt.

Zusatz. Werden drei Linien PQ, PR, PS vom gemeinschaftlichen Punkte P nach andern, der Lage nach gegebenen, geraden Linien AB, CD, AC, jede mit jeder unter gegebenem Winkel gezogen, und ist das Verhältniss

$$PQ\,.\,PR : PS^2.$$

constant; so liegt der Punkt P auf demjenigen Kegelschnitt, welcher die Linien AB und CD in A und C berührt, und umgekehrt. Fällt nämlich BD mit AC zusammen, während die Lage der drei Linien AB, CD, AC unverändert bleibt; so fällt auch PT mit PS zusammen und es geht das Rechteck PS.PT in das Quadrat PS^2 über. Die Linien AB und CD, welche die Curve in den Punkten A und B, C und D schnitten, können jetzt dieselbe in den zusammenfallenden Punkten nicht mehr schneiden, sondern nur berühren.

§. 47. Anmerkung. Der Name Kegelschnitt erstreckt sich in diesem Lehnsatze so weit, dass so wohl der geradlinige, durch den Scheitel gehende, als auch der kreisförmige, der Basis parallele Schnitt eingeschlossen werden.

Fällt nämlich der Punkt p anf die gerade Linie, durch welche je zwei der vier Punkte A, B, C, D mit einander verbunden werden, so verwandelt sich der Kegelschnitt in zwei gerade Linien, von denen eine diejenige ist, auf welcher der Punkt p liegt, die andere diejenige, welche die beiden andern Punkte mit einander verbindet.

Sind die gegenüberstehenden Winkel des Vierecks Supplementswinkel, und die Linien PQ, PR, PS, PT entweder senkrecht, oder unter beliebigen aber gleichen Winkeln gezogen und

$$PQ . PR = PS . PT;$$

so ist der Kegelschnitt ein Kreis. Dasselbe findet statt, wenn die vier Linien unter beliebigen Winkeln gezogen werden, und

$$PQ . PR : PS . PT = \sin S . \sin T : \sin Q . \sin R,$$

wo P, Q, R, S die Winkel sind, welche die vier Linien mit den vier Seiten bilden.[28])

In den übrigen Fällen ist der Ort des Punktes P eine der drei Figuren, welche man gewöhnlich Kegelschnitte nennt. Anstatt des Vierecks ABDC kann man auch ein anderes substituiren, dessen zwei gegenüberliegende Seiten sich überzwerch schneiden.

Ferner können von den vier Punkten A, B, C, D einer oder zwei sich in unendlicher Entfernung befinden; alsdann werden diejenigen Seiten, welche nach jenen Punkten hin convergiren, parallel. In diesem Falle geht der Kegelschnitt durch die übrigen Punkte und dehnt sich nach der Seite der Parallelen zu ins Unendliche aus.

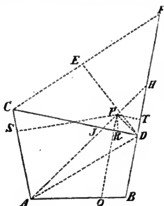


Fig. 44.

§. 48. Lehnsatz. Den Punkt P so zu bestimmen, dass, wenn man von ihm nach den vier, der Lage nach gegebenen, Linien

AB, BD, DC, AC

die vier Linien

PQ, PT, PR, PS

zieht, alsdann das Verhältniss

$$PQ . PR : PS . PT$$

ein gegebenes constantes werde.

Die Linien AB und CD, nach denen die beiden, das eine Rechteck bildenden, PQ und PR gezogen werden, mögen mit den beiden andern gegebenen Linien in den Punkten A, B, C, D zusammentreffen. Von einem derselben, etwa A, ziehe man die beliebige Linie AH, auf welcher der Punkt P gefunden werden soll und sie mag die Linie CD in J, die BD in H schneiden. Da alle Winkel der Figur gegeben sind, kennt man die Verhältnisse

1. PQ : PA und PA : PS,

folglich auch das 2. PQ : PS.

Nimmt man dieses von dem gegebenen Verhältniss

3. $PQ . PR : PS . PT$

fort, so erhält man

4. $PR : PT$,

und verbindet man dieses mit den beiden Verhältnissen

5. $\begin{cases} PJ : PR, \\ PT : PH; \end{cases}$

so erhält man das Verhältniss

6. $PJ : PH$

und so den Punkt P.

Zusatz 1. Hiernach kann man auch an einem der unbestimmten Punkte P, etwa D eine Tangente ziehen; denn die Sehne PD wird, wenn P und D zusammenfallen, d. h. wenn AH durch D gezogen wird, eine Tangente. In diesem Falle findet man das letzte Verhältniss der verschwindenden Linien JP und PH wie oben. Zieht man nun

$$CF \ddagger AD,$$

so dass CF die Linie BD in F schneidet und selbst bei jenem letzten Verhältniss in E geschnitten wird; so wird DE die Tangente, weil

$$CF \ddagger \text{der verschwindenden } JH,$$

und beide in P unter gleichem Verhältniss geschnitten werden.

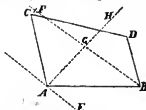


Fig. 45.

Zusatz 2. Man kann auch den Ort aller Punkte P bestimmen. Man ziehe nämlich durch einen der Punkte A, B, C, D, etwa durch A die Tangente AE, und durch einen andern, etwa B

$$BF \ddagger AE,$$

welche erstere den Ort in F trifft. Man findet F nach dem Lehnsatze, halbirt man BF in G und zieht AG, so wird diese die Richtung eines Durchmessers haben, zu welchen BG und AG als Ordinaten gehören. Trifft nun AG den Ort in H, so ist AH die Länge des Durchmessers, dessen Parameter

$$\frac{BG^2}{AG . AH}$$

proportional ist.

Begegnet AG nirgends dem Orte, so ist $AH = \infty$, der Ort eine Parabel, deren Parameter $= \frac{BG^2}{AG}$.

Begegnet sie dem Orte irgendwo so ist der Ort eine Hyperbel, wenn die Punkte A und H auf derselben Seite von G liegen, eine Ellipse, wenn G sich zwischen beiden befindet. Im letztern Falle erhält man einen Kreis, wenn

$$\angle AGB = 90^0 \text{ und ausserdem } BG^2 = AG . GH$$

ist.

Auf diese Weise wird die Aufgabe der Alten, welche mit den vier Linien des Euclid's begann und von Apollonius fortgesetzt ward, nicht durch Rechnung, sondern wie die Alten sie suchten, durch Construction in diesem Zusatze dargestellt.

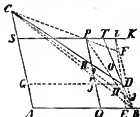


Fig. 46.

§. 49. Lehnsatz. Ein beliebiges Parallelogramm ASPQ berührt in den beiden entgegengesetzten Eckpunkten A und P einen Kegelschnitt, und die unbestimmt verlängerten Schenkel AQ, AS des einen der beiden Winkel begegnen demselben Kegelschnitt in B und C. Ferner werden von irgend einem fünften Punkte D jener Curve die geraden Linien BD und CD gezogen, welche die beiden andern gehörig verlängerten Seiten PS und PQ in T und R schneiden. Alsdann stehen die abgeschnittenen Stücke PR und PT der Seiten zu einander im gegebenen Verhältniss. Umgekehrt, stehen diese Linien im gegebenen Verhältniss zu einander, so liegt D in dem Kegelschnitt, welcher durch die vier Punkte A, B, P, C geht.

Erster Fall. Man ziehe die Linien BP und CP, und von D aus

$$DG \mathrel{\#} AB,\ DE \mathrel{\#} AC,$$

von denen

DG die Linien BP, PQ, AC in H, J, G,
DE „ „ PC, PS, AB in F, K, E

schneidet. Alsdann ist nach §. 45. das Verhältniss

$$1.\quad DE . DF : DG . DH$$

constant, aber ferner

$$PQ : JQ = PB : BH, \text{ oder weil } JQ = DE$$
$$PQ : DE = PB : BH$$
$$= PT : DH$$

oder

$$2.\quad PQ : PT = DE : DH.$$

Ferner haben wir

$$PR : DF = RC : DC$$
$$= JG : DG$$
$$= PS : DG$$

oder

$$3.\quad PR : PS = DF : DG.$$

Verbindet man nun die Proportionen 2. und 3. mit einander, so entsteht

$$4.\quad PQ . PR : PT . PS = DE . DF : DG . DH,$$

also nach 1.

$$PQ . PR : PS . PT \text{ constant,}$$

und da auch

$$PQ \quad : PS \quad \text{constant;}$$

muss dasselbe auch bei dem Verhältniss

$$PR \quad : PT \quad \text{der Fall sein.} \quad \text{W. Z. B. W.}$$

Zweiter Fall. Ist das Verhältniss

$$PR : PT$$

gegeben, so folgt, indem man auf dieselbe Weise rückwärts schliesst, dass auch

$$DE \,.\, DF : DG \,.\, DH$$

ein gegebenes Verhältniss sein, folglich nach §. 46. D in dem durch A, B, P, C gehenden Kegelschnitt liegen muss. W. Z. B. W.

Zusatz 1. Zieht man die Linie BC, welche PQ in r schneidet, und nimmt man auf PT den Punkt t so an, dass

$$Pt : Pr = PT : PR$$

wird, so ist Bt eine Tangente des Kegelschnitts im Punkte B. Denkt man sich nämlich D mit B zusammenfallend, so dass, wann die Sehne BD verschwindet, BT Tangente wird; so werden CD und BT respective mit CB und Bt zusammenfallen.

Zusatz 2. Umgekehrt, ist Bt Tangente, und treffen BC und CD in irgend einem Punkte des Kegelschnittes zusammen; so wird

$$PR : PT = Pr : Pt.$$

Ist ferner ersteres der Fall, und wird zugleich vorausgesetzt, dass

$$PR : PT = Pr : Pt$$

sei; so treffen BC und CD in irgend einem Punkte D des Kegelschnittes zusammen.

Zusatz 3. Ein Kegelschnitt kann einen andern in nicht mehr als 4 Punkten schneiden.

Wollte man nämlich, wenn es möglich wäre, annehmen, dass beide Kegelschnitte durch die 5 Punkte

$$A, B, C, P, O$$

gingen und die gerade Linie BD beide Curven in den Curven D und d schnitte, wie auch, dass die Linie PQ durch Cd im Punkt g getroffen würde; so hätte man

$$PR : PT = P\varrho : PT,$$

also

$$PR = P\varrho,$$

was gegen die Voraussetzung ist.

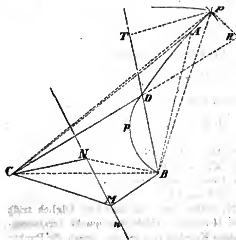


Fig. 47.

§. 50. Lehnsatz. Zwei bewegliche und unbestimmte gerade Linien BM und CM werden um die gegebenen Punkte B und C als Pole geführt und beschreiben so eine dritte, der Lage nach gegebene, gerade Linie MN.

Zwei andere gerade Linien BD und CD, welche mit den beiden ersteren in B und C gegebene Winkel DBM und DCM bilden, werden ebenfalls herumgeführt. Alsdann beschreiben diese letzteren in ihrem Durchschnittspunkte D einen Kegelschnitt, welcher durch die Punkte B, C geht. Umgekehrt, beschreiben die letzteren Linien in ihrem Durchschnittspunkte D einen Kegelschnitt, welcher durch die Punkte B, C und A geht, und ist immer

$$\angle DBM = ABC \text{ und}$$
$$DCM = ACB,$$

so liegt M auf einer, der Lage nach gegebenen, geraden Linie.

Es werde auf der Geraden MN ein Punkt N gegeben, und wenn der bewegliche Punkt M nach N gelangt, möge sich der bewegliche Punkt D im festen Punkte P befinden. Zieht man nun die Linien

$$CN, BN, CP, BP,$$

macht man

$$\angle BPT = BNM$$
$$CPR = CNM$$

und verlängert man BD und CD, bis sie bezüglich mit PT und PR zusammentreffen; so ist nach der Voraussetzung

$$\angle MBD = NBP$$

d. h.

$$MBN + NBD = NBD + DBP$$

also

$$\angle MBN = DBP.$$

Ferner

$$\angle BMN = BPT \text{ ex constructione}$$

mithin

$$1. \quad \triangle MBN \sim BPT.$$

Eben so ist nach der Voraussetzung

$$\angle MCD = NCP$$

d. h.

$$MCN + NCD = NCD + DCP$$

oder

$$\angle MCN = DCP$$

und

$$\angle CMN = CPR$$

also

$$2. \quad \triangle MCN \sim CPR.$$

Nach 1. und 2. ist daher

$$PT : MN = BP : BN$$
$$PR : MN = CP : CN$$

und da B, C, N und P feste Punkte sind, haben also

PT und PR

gegebene Verhältnisse zu MN, mithin auch zu einander; folglich trifft nach §. 49. der Punkt D (der beständige Durchschnittspunkt der beweglichen Linien BT und CB) einen Kegelschnitt, welcher durch die Punkte B, C und P geht. W. Z. B. W.

Wenn umgekehrt der Punkt D den durch die Punkte B, C und A gehenden Kegelschnitt trifft, und stets

$$\angle DBM = ABC$$

wie auch

$$\angle DCM = ACB$$

ist; wenn aber, im Fall D nach und nach zwei beliebige Punkte p und P trifft, M ebenfalls auf die unbeweglichen Punkte N und n fällt: so ziehe man die gerade Linie nN, welche der beständige Ort des beweglichen Punktes M sein wird. Man nehme nun einmal an, M bewege sich auf irgend einer Curve. Alsdann trifft D den durch die Punkte

C, p, P, B und A

gehenden Kegelschnitt, während M sich beständig auf der angenommenen krummen Linie befindet. Nach dem bereits ausgeführten Beweise aber trifft auch D den durch dieselben fünf Punkte gehenden Kegelschnitt, während M eine gerade Linie beschreibt; es würden daher zwei Kegelschnitte durch dieselben fünf Punkte gehen, was §. 49., Zusatz 3. widerspricht. Es ist daher absurd anzunehmen, dass M sich auf einer Curve bewege. W. z. b. w.

§. 51. Aufgabe. Eine Curve durch fünf gegebene Punkte zu beschreiben.

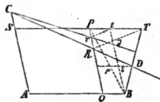


Fig. 48.

Es seien

A, B, C, D, P

die fünf gegebenen Punkte, man ziehe von einem derselben, etwa A, nach zwei andern B und C, welche Pole genannt werden mögen, die geraden Linien AB und AC und diesen parallel die Linien SPT und PRQ durch den vierten Punkt P. Hierauf ziehe man von beiden Polen B und C durch den fünften Punkt D die unbegrenzten Linien BDT und CRD, welche die eben gezogenen Linien SPT und PRQ respective in T und R schneiden. Endlich ziehe man von einem beliebigen Punkte t auf PT

$$tr \mathrel{\#} TR,$$

so dass

$$Pt : Pr = PT : PR$$

wird, und zieht man nun von den Polen nach den Punkten t und r die geraden Linien Bt und Cr; so liegt ihr Durchschnittspunkt d in der gesuchten Curve.

Der Punkt d liegt nämlich nach §. 49. in dem, durch die vier Punkte

A, B, P, C

gehenden, Kegelschnitt, und wenn die Linien Rr und Tt verschwinden, fällt der Punkt d mit dem Punkt D zusammen; folglich geht der Kegelschnitt durch die fünf Punkte

A, B, P, C und D.

W. z. b. w.

Zweite Auflösung derselben Aufgabe. Von den gegebenen Punkten verbinde man drei beliebige, etwa

A, B und C

durch gerade Linien und drehe die, der Grösse nach gegebenen Winkel ABC und ACB dermaassen um B und C als Pole, dass die Schenkel BA und CA zuerst an D, dann an P gelegt werden, und bezeichne die Punkte M und N, in denen in beiden Fällen die andern Schenkel BL und CL sich respective überzwerch schneiden. Zieht man nun die unbegrenzte Linie MN und dreht man die beweglichen Winkel um ihre Pole B und C nach dem Gesetze, dass der Durchschnitt der Schenkel BA und CA oder BD und CD, welcher jetzt d sein möge, die Curve PADdB beschreibt, so ist diese die gesuchte.

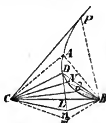


Fig. 49.

Nach §. 50. trifft nämlich d den Kegelschnitt, welcher durch die Punkte B und C geht, und wenn der Punkt m nach

M, L, N

gelangt, kommt d der Construction zufolge zu den Punkten

D, A, P.

Es wird daher auf diese Weise ein Kegelschnitt beschrieben, welcher durch die fünf Punkte

A, B, C, D und P

geht.

Zusatz 1. Hiernach kann leicht eine gerade Linie gezogen werden, welche die gesuchte Curve im gegebenen Punkte B berührt. Lässt man z. B. den Punkt d mit B zusammenfallen, so wird Bd eine der gesuchten Tangenten.

Zusatz 2. Eben so können hier die Mittelpunkte, Durchmesser und Parameter der Curven gefunden werden, wie §. 48. Zusatz 2.

§. 52. Anmerkung. Die erste Construction (§. 51.) wird etwas einfacher, wenn man BP zieht, und auf ihr, oder, wenn es erforderlich ist, ihrer Verlängerung

$$Bp : BP = PR : PT$$

annimmt, hierauf durch den so gefundenen Punkt p

$$p\delta \mathrel{\#} SPT$$
$$p\delta = Pr$$

macht und nun $B\delta$ und Cr zieht, welche einander in d schneiden werden.

Da nämlich

$$Pr : Pt = PR : PT$$
$$= Bp : BP$$

und auch

$$p\delta : Pt = Bp : BP$$

so wird

$$p\delta = Pr.$$

Nach dieser Methode kann man sehr leicht Punkte der Curve

finden, wenn man es nicht vorzieht, wie in der zweiten Auflösnng, die Curve mechanisch zu beschreiben.

§. 53. Aufgabe. Eine Curve zu beschreiben, welche durch vier gegebene Pnnkte geht, nnd eine ihrer Lage nach gegebene gerade Linie berührt.

Erster Fall. HB sei die gegebene Tangente, B der Berührungspunkt, C, D und P die andern drei Punkte.

Fig. 50.

Man ziehe BC, ferner

PS ‡ BH

PQ ‡ BC.

Hierauf ziehe man BD, welche SP in T schneidet und CD, welche PQ in R schneidet und verbinde R mit T. Indem man nun auf SP von einem beliebigen Punkte t

tr ‡ TR

zieht, wodurch also

$$Pr : Pt = PR : PT$$

wird, nnd Bt und Cr zieht, welche einander in d schneiden, wird nach §. 49., Zusatz 2. der letztere Punkt immer in die zu beschreibende Curve fallen.

Zweite Auflösung derselben Aufgabe. Man drehe den, der Grösse nach gegebenen Winkel CBH um den Pol B, nnd den Radius DC nm den Pol C nnd verlängere zugleich DC nach beiden Seiten. Nimmt der Schenkel BH die Lagen BP, BD ein, so befindet sich der andere BC bezüglich in den Lagen BM, BN, nnd es werden die letztern durch die gehörig verlängerten entsprechenden Radien CP, CD, u. s. w. zusammentreffen und der Durchschnittspunkt derselben Radien mit dem Schenkel BH bestimmt einen Punkt der gesnchten Curve.

Fig. 51.

Lässt man nämlich in der Figur der vorhergehenden Aufgabe den Punkt A mit dem Punkte B zusammenfallen, so treffen auch die Linien CA und CB zusammen nnd die Linie AB geht zuletzt in die Tangente BH über. Demnach wird die dort ausgeführte Construction mit der vorliegenden identisch.

Der Durchschnittspunkt des Schenkels BH mit dem Radius CD beschreibt daher einen Kegelschnitt, welcher durch die Pnnkte C, D nnd P geht und die Linie BH als Tangente hat.

Zweiter Fall. Es sind die vier Punkte B, C, D und P ausserhalb der Tangente HJ gegeben.

Man ziehe BD und CP, welche einander in G und die Tangente in H und J schneiden. Hierauf schneide man die Tangente in A so, dass

1. $HA : AJ = \sqrt{BH \cdot HD} \cdot \sqrt{CG \cdot GP} : \sqrt{PJ \cdot JC} \cdot \sqrt{DG \cdot GB}$

sei; alsdann wird A der Berührungspunkt sein.

Zieht man nämlich

$$HX \mathrel{\#} PJ,$$

so dass HX die Curve in den Punkten X und Y schneidet; so ist nach der Lehre von den Kegelschnitten

2. $HA^2 : AJ^2 = (HX \cdot HY)\ (BH \cdot HD) : (BH \cdot HD)\ (PJ \cdot JC)$

oder da

$$HX \cdot YH : BH \cdot HD = CG \cdot GP : DG \cdot GB$$

3. $HA^2 : AJ^2 = (BH \cdot HD)\ (CG \cdot GP) : (PJ \cdot JC)\ (DG \cdot GB).$

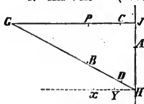


Fig. 52.

Nachdem der Berührungspunkt A gefunden worden ist, wird die Curve wie im ersten Falle beschrieben. Der Punkt A kann zwischen den Punkten H und J oder auch ausserhalb derselben angenommen und daher die Curve auf zweifache Weise beschrieben werden.

§. 54. Aufgabe. Eine Curve zu beschreiben, welche durch drei gegebene Punkte geht, und zwei der Lage nach gegebene Linien berührt.

Gegeben sind die Tangenten HJ und KL, und die Punkte B, C, D. Man ziehe BD, welche die Tangenten in H und K, so wie CD, welche dieselben in J und L schneidet. Die so gezogenen Linien schneide man in R und S so, dass

1. $HR : KR = \sqrt{BH \cdot HD} : \sqrt{BK \cdot KD}$

2. $JS : LS = \sqrt{CJ \cdot JD} : \sqrt{CL \cdot LD}.$

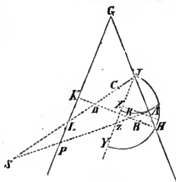


Fig. 53.

Mag der Durchschnittspunkt beliebig zwischen K und H, J und L, oder ausserhalb derselben fallen. Hierauf ziehe man RS, welche die Tangenten in P und A schneidet, letztere sind alsdann die Berührungspunkte.

Nimmt man nun an, A und P seien Berührungspunkte, welche beliebig auf den Tangenten liegen, und zieht man durch einen der vier Punkte H, J, K, L, etwa durch J

$$JY \mathrel{\#} KL,$$

so dass JY die Curve in X und Y schneide und nimmt man auf ihr

$$3.\quad JZ = \sqrt{JX \cdot JY};$$

so ist nach der Lehre von den Kegelschnitten

$$JX \cdot JY : LP^2 = CJ \cdot JD : CL \cdot LD$$

oder nach der Construction

$$JZ^2 : LP^2 = JS^2 : LS^2$$

mithin

$$4.\quad JZ : LP = JS : LS;$$

mithin liegen die Punkte S, P, Z in Einer geraden Linie. Schneiden sich ferner beide Tangenten in G, so ist nach der Lehre von den Kegelschnitten:

$$5.\quad JX \cdot JY : JA^2 = GP^2 : GA^2$$

und da nach Gl. 3.

$$JX \cdot JY = JZ^2$$

$$6.\quad JZ : JA = GP : GA.$$

Es liegen mithin die Punkte P, Z, A in Einer geraden Linie, folglich auch die Punkte S, P, A.

Auf dieselbe Art beweist man, dass die Punkte R, P, A auf Einer geraden Linie liegen; die Berührungspunkte A und P liegen daher auf der geraden Linie SR.

Nachdem diese gefunden ist, beschreibt man die Curve wie §. 53, Erster Fall.

In diesem Paragraphen und im zweiten Falle des vorhergehenden finden dieselben Constructionen statt; mag die Linie XY die Curve in X und Y schneiden, oder nicht. Jene hängen nicht von diesem Durchschnitt ab. Nachdem aber die Construction für den Fall des Schnittes erwiesen ist, kennt man dieselbe auch für den Fall, dass kein Schnitt nicht stattfindet.

Bei der weitern Auseinandersetzung will ich der Kürze halber verweilen.

§. 55. Lehnsatz. Figuren in andere derselben Art zu verwandeln.

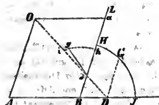


Fig. 54.

Die zu verwandelnde Figur sei etwa die HGJB. Man ziehe beliebig zwei Parallelen AO und BL, welche eine dritte, der Lage nach gegebene Linie AB in A und B schneiden, und ziehe ferner von einem beliebigen Punkte G der Figur

$$GD \ddagger OA$$

bis erstere AB in D schneidet. Hierauf ziehe man von einem auf AO gegebenen Punkte O die Verbindungslinie OD, welche BL in d schneidet; ziehe durch diesen die Linie gd, welche irgend einen gegebenen Winkel mit BL bildet und bestimme den Punkt g so, dass

$$1.\quad gd : Od = GD : OD^{23})$$

sei. Alsdann ist g derjenige Punkt in der neuen Figur hgi, welcher dem

G in der alten entspricht. Auf dieselbe Weise geben die einzelnen Punkte der alten Figur eben so viel Punkte der neuen. Man denke sich daher, dass der Punkt G mit stetiger Bewegung die erste Figur durchlaufe, alsdann wird der Punkt g ebenfalls stetig die neue Figur durchlaufen und beschreiben.

Der Unterscheidung wegen nennen wir

DG die erste Ordinate, dg die neue Ordinate,
AD die erste Abscisse, ad die neue Abscisse,
O den Pol,
OD den abschneidenden Radius
OA den ersten ordinirten Radius, Oa ($\mp$ AB) den neuen ordinirten Radius.

Wenn nun der Punkt G auf einer, der Lage nach gegebenen, geraden Linie liegt, so liegt auch g auf einer, der Lage nach gegebenen Geraden. Trifft G einen Kegelschnitt, so ist dasselbe mit g der Fall, und zwar zähle ich hier den Kreis zu den Kegelschnitten. Trifft ferner G eine Curve dritter Ordnung, so trifft auch g eine Curve derselben Ordnung, und eben so bei Curven höherer Ordnung, so dass G und g immer Curven derselben Ordnung treffen werden.

Wir haben nämlich

$$ad : OA = Od : OD$$
$$= dg : DG \text{ (Prop. 1.)}$$
$$2.\quad ad : OA = AB : AD$$

mithin

$$3.\quad AD = \frac{OA\,.\,AB}{ad} \text{ und } DG = \frac{OA\,.\,dg}{ad}.$$

Trifft nun G eine gerade Linie, steigen also in der Gleichung, welche eine Relation zwischen den unbestimmten Grössen, der Abscisse AD und Ordinate DG aufstellt, die letztern nur zur ersten Dimension auf; so wird man, indem die Werthe von AD und DG in dieser Gleichung substitnirt werden, eine neue Gleichung erhalten, in welcher die neue Abscisse ad und die neue Ordinate dg sich nur zur ersten Dimension erheben, mithin eine gerade Linie bestimmen.

Wenn AD und DG (oder eine von beiden) in der ersten Gleichung zur zweiten Dimension ansteigen, wird dasselbe mit ad und dg in der neuen Gleichung der Fall sein, u. s. w. bei drei und mehr Dimensionen. Die Unbestimmten ad und dg in der neuen, und AD und DG in der ersten Gleichung steigen immer zu derselben Zahl der Dimensionen an, und daher sind die Linien, welche g und G treffen, stets von derselben analytischen Ordnung.

Wenn ferner irgend eine gerade Linie die Curve in der ersten Figur berührt, so wird diese Gerade, nachdem sie übertragen worden ist, auch in der neuen Figur die Curve berühren; und umgekehrt. Denn wenn irgend zwei Punkte der Curve sich in der ersten Figur einander nähern und zusammenfallen, so werden dieselben Punkte, nachdem sie

übertragen worden sind, auch in der neuen Figur zusammenfallen, mithin die Verbindungslinien dieser zwei Punkte in beiden Figuren in Tangenten übergehen.

Die Beweise dieser Behauptungen könnten nach einer mehr geometrischen Weise geführt werden, allein Kürze schien mir rathsam.

Soll daher eine geradlinige Figur in eine andere verwandelt werden, so genügt es, die Durchschnittspunkte der geraden Linien zu übertragen, und durch dieselben in der neuen Figur gerade Linien zu ziehen. Hat man eine krummlinige Figur zu verwandeln, so muss man Punkte, Tangenten und andere gerade Linien übertragen, wodurch die Curve bestimmt wird.

Es dient aber dieser Lehnsatz zur Auflösung schwieriger Aufgaben, indem man die gegebenen Figuren in einfachere verwandelt. Beliebige convergirende gerade Linien werden nämlich in parallele verwandelt, indem man statt des ersten ordinirten Radius AO eine gerade Linie anwendet, welche durch den Durchschnittspunkt der convergirenden Linien geht. Es entfernt sich nämlich auf diese Weise der Durchschnittspunkt ins Unendliche, und Linien sind ja parallel, wenn sie nach einem unendlich entfernten Punkte hin convergiren. Nachdem alsdann die Aufgabe in der neuen Figur gelöst worden ist, verwandelt man diese durch die umgekehrten Operationen in die ursprüngliche und erhält so die gesuchte Auflösung.

Nützlich ist dieser Lehnsatz auch bei Aufgaben, welche Körper betreffen. Sobald nämlich zwei Kegelschnitte einander begegnen, durch deren Schnitt die Aufgabe gelöst werden kann, darf man nur einen von beiden, wenn er eine Hyperbel oder Parabel ist, in eine Ellipse und diese in einen Kreis verwandeln. Die gerade Linie und ein Kegelschnitt werden daher, bei der Construction von Aufgaben in der Ebene, in eine Gerade und einen Kreis verwandelt.

§. 56. Aufgabe. Eine Curve zu beschreiben, welche durch zwei gegebene Punkte gehe und drei, der Lage nach gegebene, gerade Linien berühre.

Durch den Durchschnittspunkt zweier von diesen Tangenten und durch den Punkt, in welchem die Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte die dritte Tangente trifft, ziehe man eine unbestimmte gerade Linie und wende dieselbe als ersten ordinirten Radius an; alsdann wird nach §. 55. die Figur in eine neue verwandelt, in welcher jene zwei Tangenten einander, und die dritte Tangente der Verbindungslinie der zwei gegebenen Punkte parallel wird. Es seien demnach

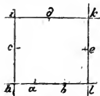


Fig. 55.

hi und kl die beiden parallelen Tangenten,
ik die dritte Tangente,
hl die gerade, dieser dritten Tangente parallele Linie, welche durch die zwei Punkte

a und b, durch die der Kegelschnitt gezogen werden soll, geht; demnach wird hikl ein vollständiges Parallelogramm sein.

Man schneide bi, ik und kl in den Punkten c, d und e so dass

$$hc : \sqrt{ah \cdot hb} = ic : id$$
$$= ke : kd$$

$$1. \quad hc : \sqrt{ah \cdot hb} = hi + kl : ik + \sqrt{ah \cdot hb} + \sqrt{al \cdot lb};$$

alsdann sind c, d und e die Berührungspunkte.

Nach der Lehre von den Kegelschnitten ist nämlich

$$bc^2 : ah \cdot hb = ic^2 : id^2 = ke^2 : kd^2 = el^2 : al \cdot bl,$$

mithin auch

$$2. \quad hc : \sqrt{ah \cdot hb} = ic : id = ke : kd = el : \sqrt{al \cdot lb}$$

oder auch durch Zusammensetzung:

$$hc + ic + ke + el : \sqrt{ab \cdot hb} + id + kd + \sqrt{al \cdot lb} = hc : \sqrt{ah \cdot bb}$$
$$= ic : id$$
$$= ke : kd$$
$$= el : \sqrt{al \cdot lb}$$

d. h. da

$$hc + ic = hi$$
$$ke + el = kl$$
$$id + kd = ik$$

$$hi + kl : ik + \sqrt{ah \cdot hb} + \sqrt{al \cdot lb} = hc : \sqrt{ab \cdot hb}$$
$$= ic : id$$
$$= ke : kd$$
$$= el : \sqrt{al \cdot lb}.$$

Man hat also auf diese Weise die Berührungspunkte c, d, e der neuen Figur. Durch die umgekehrten Operationen des §. 55. übertrage man diese Punkte in die ursprüngliche Figur und beschreibe dort, nach §. 51. Erste Construction, die Curve.

Eben so wie die Punkte a und b innerhalb oder ausserhalb h und l liegen, müssen übrigens auch die Punkte c, d, e respective innerhalb oder ausserhalb h und i, i und k, k und l liegen. Liegt der eine von beiden Punkten a und b innerhalb, der andere ausserhalb h und l, so ist die Aufgabe unmöglich.

§. 57. **Aufgabe.** Eine Curve zu beschreiben, welche durch einen gegebenen Punkt geht und vier, der Lage nach gegebene, gerade Linie berührt.

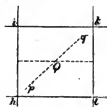


Fig. 56.

Von dem Durchschnittspunkte zweier beliebigen Tangenten ziehe man eine gerade Linie nach dem Durchschnittspunkte der beiden andern, und verwandele, indem man diese so erhaltene Linie als ersten ordinirten Radius annimmt, nach §. 55. die Figur in eine neue. Alsdann werden je zwei Tangenten, welche vorher nach dem ordinirten Radius zu convergirten, parallel. Es seien hi und kl, ik und hl die Tangenten, welche das

Parallelogramm hikl einschliessen. Ferner sei p der Punkt in der neuen Figur, welcher dem in der ursprünglichen Figur gegebenen entspricht. Zieht man von p durch den Mittelpunkt Q der Figur die Linie pO und macht man

$$Qq = Qp,$$

so ist q ein zweiter Punkt in der neuen Figur, durch welchen der Kegelschnitt gehen muss. Durch die umgekehrten Operationen des §. 55. übertrage man diesen Punkt in die ursprüngliche Figur und erhält so in dieser zwei Punkte, durch welche die Curve gehen soll. Nach §. 56. ist alsdann der Kegelschnitt zu beschreiben.

Fig. 57.

§. 58. **Lehnsatz.** Werden zwei ihrer Lage nach gegebene Linien AC und BD in gegebenen Punkten A und B begrenzt und haben sie zu einander ein gegebenes Verhältniss; wird die Verbindungslinie CD beider in K in demselben Verhältniss getheilt; so liegt K in einer der Lage nach gegebenen Linie.

Es mögen AC und AD einander in E schneiden, und man nehme auf BE den Punkt G so an, dass

$$1.\quad BG : AE = BD : AC,$$

und es sei stets

$$FD = EG.$$

Alsdann wird

$$2.\quad AE + AC : BG + BD = AC : BD,$$

d. h. weil

$$AE + AC = CE$$
$$BG + BD = GD = GF + FD = GF + GE = EF$$

also

$$3.\quad CE : EF \text{ gegeben } = AC : BD.$$

Es ist mithin das Dreieck EFC seiner Form nach gegeben. Man schneide nun CF in L so, dass

$$4.\quad CL : CF = CK : CD;$$

alsdann ist auch das Dreieck EFL seiner Form nach gegeben, und es liegt der Punkt L auf der, der Lage nach gegebenen, geraden Linie EL. Man ziehe nun KL, und da FD wie auch das Verhältniss

$$LK : FD$$

gegeben ist, so kennt man auch LK. Macht man endlich

$$EH = LK,$$

so ist ELKH ein Parallelogramm und es liegt der Punkt K auf der, der Lage nach gegebenen, Seite HK des Parallelogrammes. W. z. b. w.

Zusatz. Wegen der ihrer Form nach gegebenen Figur EFLC haben die drei Linien EF, EL und EC oder

GD, HK und ED

gegebene Verhältnisse zu einander.

§. 59. **Lehnsatz.** Wenn drei gerade Linien, von denen zwei einander parallel und der Lage nach gegeben sind, einen beliebigen Kegelschnitt berühren; so ist der, diesen beiden Tangenten parallele Halbmesser des Schnittes die mittlere Proportionale zwischen den Stücken jener, welche zwischen den Berührungspunkten und der dritten Tangente liegen.

Fig. 58.

Es seien AF und BG die beiden parallelen Tangenten, in den Punkten A und B des Kegelschnittes ADBM, EF eine dritte gerade Linie, welche die Curve in J berührt und die beiden Tangenten in F und G schneidet, endlich CD der diesen parallele Halbmesser; alsdann wird behauptet, dass

$$AF : CD = CD : BG.$$

Treffen die conjugirten Durchmesser AB und DM die Tangente FG in E und H, und einander in C und vollendet man das Pallelogramm JKCL; so ist nach der Lehre von den Kegelschnitten

$$1.\quad CA : LC = EC : CA.^{30}$$

Hieraus folgt

$$EC - CA : CA - LC = EC : CA.$$

d. h.

$$2.\quad EA : AL = EC : CA.$$

Ferner

$$EA : EA + AL = EC : EC + CA$$

d. h.

$$3.\quad EA : EL = EC : EB.$$

Da nun

$$\triangle\ EAF \sim ELJ \sim ECH \sim EBG$$

$$4.\quad AF : JL = CH : BG \text{ (mittelst 3.)}$$

ferner nach der Lehre von den Kegelschnitten, wie oben

$$5.\quad CK : CD = CD : CH$$

und durch Verbindung von 4. und 5., weil CK = JL,

$$AF : CD = CD : BG.$$ W. z. b. w.

Zusatz 1. Wenn die beiden Tangenten FG und PQ den parallelen Tangenten AT und BG respective in F und G, so wie in P und Q begegnen, sich selbst aber in O schneiden; so ist

$$AF : CD = CD : BG$$

und eben so

$$BQ : CD = CD : PA$$

mithin

$$6.\quad AF : BQ = PA : BG$$

oder

$$AP - AF : AP = BG - PQ : BG$$

d. h.

$$7.\quad PF : AP = GQ : BG$$

oder

$$8.\quad AF : BQ = PF : GQ = FO : GO.$$

Znsatz 2. Die Verbindnngslinie der Punkte P und G, und die der Punkte F und Q begegnen einander in der Linie ACB, welche durch den Mittelpunkt der Figur und die Berührungspunkte A und B geht.

§. 60. Lehrsatz. Die vier Seiten eines Parallelogramms berühren, unbestimmt verlängert, irgend einen Kegelschnitt und werden durch eine fünfte Tangente geschnitten. Bezieht man nun die begrenzten Abcissen auf entgegengesetzte Winkel des Parallelogrammes als Anfangspunkte; so verhält sich die Abscisse einer Seite zu dieser selbst, wie der Theil der zweiten Seite zwischen dem Berührungspunkte und der dritten

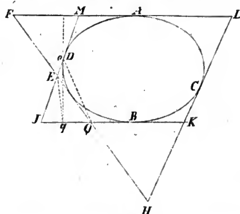


Fig. 59.

Seite zur Abscisse dieser zweiten Seite, vom entgegengesetzten Winkelpunkte aus gerechnet.

Die Seiten ML, JK, KL und MJ des Parallelogramms MLKJ schneiden den Kegelschnitt in den vier Punkten A, B, C und die fünfte Tangente FQ schneidet diese Seiten in den Punkten F, Q, H und E. Die Behauptung ist daher:

$$ME : MJ = BK : KQ$$

und

$$KM : KL = MA : MF.$$

Nach §. 59., Zusatz 1. ist nämlich

$$1.\quad ME : EJ = BK : BQ$$

also

$$ME : ME + EJ = BK : BK + BQ$$

oder

$$2.\quad ME : MJ = BK : KQ.$$

Auf dieselbe Weise wird

3. KH : HL = BK : AF, und da BK = AM

KH : HL — KH = AM : AF — AM

oder

4. KH : KL = AM : MF. W. z. b. w.

Zusatz 1. Ist das Parallelogramm MJKL gegeben, so kennt man auch das Rechteck KQ.ME und das diesem gleiche HK.MF.

Diese Rechtecke sind nämlich einander gleich, weil

△ HKQ ∾ EFM.

Zusatz 2. Wird eine sechste Tangente eq gezogen, welche die frühern Tangenten JK und JM in q und e schneidet; so wird

KQ . EM = Kq . eM

also

5. KQ : eM = Kq : EM

oder

KQ : Kq — KQ = eM : EM — eM

d. h.

6. KQ : eM = Qq : Ee.

Zusatz 3. Zieht man die Linien Eq und eQ, und halbirt man dieselben, so geht die gerade Verbindungslinie der Halbirungspunkte durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts. Da nämlich (Prop. 6).

Qq : Ee = KQ : eM,

so geht dieselbe gerade Linie durch die Mittelpunkte aller Linien Eq, eQ und MK (nach §. 58), und der Mittelpunkt der Linie MK ist mit dem Mittelpunkte des Kegelschnittes identisch.

§. 61. Aufgabe. Eine Curve zu beschreiben, welche fünf der Lage nach gegebene gerade Linien berührt.

Gegeben sind ihrer Lage nach die Tangenten:

ABG, BCF, GCD, FDE, und EA. In dem Viereck ABFE, welches vier dieser Tangenten bilden, halbire man beide Diagonalen AF und BE

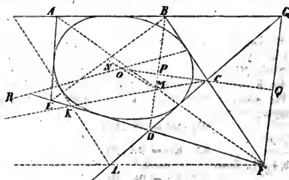


Fig. 60.

in M und N; alsdann wird nach §. 60., Zusatz 3. die Verbindungslinie MN beider Halbirungspunkte durch den Mittelpunkt der Curve gehen.

Hierauf halbire man in dem Viereck BGDF, welches durcb die vier andern Tangenten gebildet wird, wieder die Diagonaleu (wenn man sie so nennen darf) BD und FG in P nnd Q; alsdann wird die Verbindungslinie PQ dieser Halbirungspunkte ebenfalls durch den Mittelpunkt geben und der Durchscbnittspunkt beider so erhaltenen Verbindnngslinien den Mittelpunkt geben, welcher in O liegen mag.

Zieht man bierauf parallel mit der beliebigen Tangente BC nnd in gleicher Entfernung wie diese von O, die Linie KL, so wird die letztere ebenfalls die Cnrve berühren. Es möge nun diese letztere Tangente zwei der übrigen GCD und FDE in L und K schneiden. Durch die Durchschnittspunkte der nicht parallelen Tangenten CL und FK mit den parallelen CF nnd KZ, nämlich

C und K
F „ L

ziehe man die geradeu Linien CK und FL, welche einander in einem Punkte R scbneiden mögen. Zieht man hierauf die Linie OR; so wird diese die Tangenten CF und KL in den Berührungspunkten schneiden, wie aus §. 59., Zusatz 2. erhellt. Nach derselben Methode kann man die andern Berührungspunkte finden nnd dann nach §. 51., erstem Fall die Curve beschreiben.

§. 62. Anmerkung. Aufgaben, bei denen entweder die Mittelpunkte oder die Asymptoten gegeben werden, sind in den vorhergehenden mit eingeschlossen. Sind nämlich Punkte und Tangenten zugleich mit dem Mittelpunkte gegeben, so kennt man eben so viel andere Punkte und Tangenten, welche anf der entgegengesetzten Seite des Mittelpunktes und in gleicher Entfernung von ihm liegen. Asymptoten aber hat man als Tangenten anzusehen, deren nnendlich entfernter Punkt (wenn man so sagen darf) der Berührnngspunkt ist. Man denke sich, dass der Berührungspunkt irgend einer Tangente sich ins Unendliche entferne; alsdann geht sie in eine Asymptote über, und die Constructionen der §. 53. und 51., ersten Falles verwandeln sich in Constructionen von Aufgaben, bei denen die Asymptoten gegeben sind.

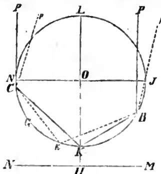


Fig. 61.

Nachdem die Cnrve beschrieben ist, kann man ihre Axen und Brennpunkte nach folgender Methode finden. In der Construction des §. 50. bewirke man, dass die Schenkel BP und CP der beweglichen Winkel PBN und PCN, durch deren Durchschnitt die Curve beschrieben wurde, einander parallel werden, nnd indem sie diese Lage gegeneinander beibehalten lasse man sie um die Pole B nnd C jener Figur sich drehen. Alsdann

beschreiben die andern Schenkel BN und CN jener Winkel in ihren Durchschnittspunkten K oder k den Kreis JBKGC, dessen Mittelpunkt sich in O befinde.

Von diesem fälle man auf die gerade Linie MN, auf welcher die Schenkel CN und BN sich schnitten, während die Curve beschrieben wurde, das Perpendikel OH, welches den Kreis in K und L schneidet. Treffen die beiden Schenkel CK und BK im Punkte K zusammen, welcher der Directrice (MN) am nächsten liegt, so giebt die Lage von BP und CP die Richtung der grossen Axe an, indem die letztere parallel BP, und die kleine Axe auf BP senkrecht ist. Das Umgekehrte findet statt, wenn BK und CK statt in K im entfernten Punkte L zusammentreffen. Ist daher der Mittelpunkt der Curve gegeben, so hat man nun auch ihre Axen, und nachdem diese bekannt sind, kann man die Brennpunkte leicht finden.

Die Quadrate beider Axen verhalten sich zu einander wie

KH : LH,

und es ist daher leicht, eine ihrer Art nach gegebene Curve durch vier bekannte Punkte zu beschreiben. Nimmt man nämlich zwei derselben als Pole C und B, so giebt der dritte die beweglichen Winkel PCK und PBK und man kann hiermit den Kreis BKGC beschreiben. Ferner kennt man, weil die Curve ihrer Art nach gegeben ist, das Verhältniss

OH : OK

und daher OH selbst.

Beschreibt man aus O als Mittelpunkt mit OH als Radius einen andern Kreis, und zieht durch den vierten Punkt eine Tangente an denselben; so erhält man die Directrice MN, durch deren Hülfe die Curve beschrieben wird. Man kann daher auch umgekehrt ein seiner Natur nach gegebenes Viereck (wenn man einige unmögliche Fälle ausnimmt) in einem beliebigen gegebenen Kegelschnitt beschreiben.

Es giebt noch andere Lehnsätze, durch deren Hülfe speciell gegebene Curven, bei gegebenen Punkten und Tangenten, beschrieben werden können. Dieser Art ist derjenige, bei welchem, wenn eine gerade Linie durch einen gegebenen Punkt gezogen wird und einen gegebenen Kegelschnitt in zwei Punkten schneidet, der Halbirungspunkt der so erhaltenen Sehne in einem Kegelschnitt derselben Art als jener liegt, und die Axen beider Curven einander parallel sind. Ich eile jedoch zu nützlicheren Sätzen.

§. 63. Lehnsatz. Man soll die drei Ecken eines, der Form und Grösse nach gegebenen, Dreiecks auf eben so viele, der Lage nach gegebene, gerade Linien, welche nicht alle einander parallel sind, je eine auf je eine legen.

Es sind drei unbestimmte gerade Linien

AB, AC und BC

ihrer Lage nach gegeben. Man soll das Dreieck DEF so legen, dass die Ecke

D in die Linie AB
E „ „ „ AC
F „ „ „ BC

falle. Man beschreibe über DE, DF und EF drei Kreissegmente

DRE, DGF und EMF,

welche die Winkel

BAC, ABC und ABC

respective fassen. Man beschreibe diese Segmente aber nach denjenigen Seiten der Linien DE, DF und EF, dass die Buchstaben

D, R, E, D in derselben Reihefolge wie B, A, C, B
D, G, F, D „ „ „ „ A, B, C, A
E, M, F, E „ „ „ „ A, C, B, A

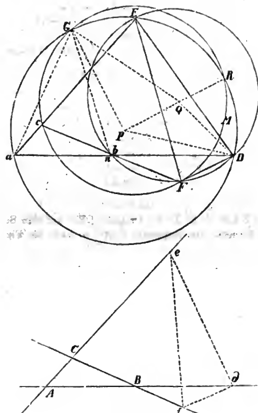


Fig. 62.

stehen; hierauf ergänze man die Segmente zu ganzen Kreisen. Die beiden ersten Kreise mögen einander in G schneiden, ihre Mittelpunkte P

und Q sein. Man ziehe die Linien GP und PQ und bestimme die Linie Ga so, dass

1. Ga : AB = GP : PQ,

und beschreibe aus G als Mittelpunkt mit Ga als Radius einen Kreis, welcher den ersten Kreis DGE in a schneidet. Vollendet man nun die Figur abcDEF, so wird dieselbe ähnlich und gleich ABCdef. Man ziehe die Linie cF, welche aD in n schneidet, ziehe ferner aG, bG, PD, QG und QD, und verlängere PQ nach R; alsdann ist nach der Construction

$$\angle \text{ EaD} = \text{CAB}$$
$$\angle \text{ acF} = \text{ACB}$$

also

$$\triangle \text{ anc} \sim \text{ABC}.$$

Mithin wird

$$\angle \text{ ane} = \text{FnD} = \text{ABC} = \text{FbD}$$

und es fällt der Punkt n mit b zusammen. Ferner ist

$$\angle \text{ GPQ} = {}^1/_2\text{GPD} = \text{GaD}$$
$$\angle \text{ GQR} = {}^1/_2\text{GQD (des erhabenen Winkels)} = \text{GbD}$$

also

$$180^0 - \text{GQR} = 180 - \text{GbD}$$

d. h.

$$\angle \text{ PQG} = \text{abG}$$

und so

$$\triangle \text{ GPQ} \sim \text{abG}.$$

Wir haben mithin die Proportion

2. Ga : ab = GP : PQ.

Nach den Proportionen 1. und 2. ist daher

$$\text{ab} = \text{AB}$$

und

$$\triangle \text{ abc} \cong \text{ABC}.$$

Da nun die Ecken D, E, F des Dreiecks DEF auf den Seiten ab, ac und bc des Dreiecks abc respective liegen, so kann die Figur

$$\text{ABCdef} \cong \text{abcDEF}$$

vollendet und so die Aufgabe gelöst werden.

Zusatz. Hiernach kann eine gerade Linie gezogen werden, deren Theile von gegebener Länge zwischen Linien von gegebener Lage fallen..

Man stelle sich nämlich vor, dass das Dreieck DEF, indem der Punkt D sich EF nähert und die Seiten DE und DF in eine gerade Linie fallen, sich selbst in eine gerade Linie verwandelt, deren gegebener Theil DE zwischen die gegebenen Linien AB und AC, hingegen DF zwischen AB und BC fallen soll. Wendet man die vorhergehende Construction auf diesen Fall an, so hat man die Lösung der Aufgabe.

§. 64. Aufgabe. Eine der Form und Grösse nach gegebene Curve zu beschreiben, deren gegebene Theile zwischen geraden Linien von gegebener Lage zu liegen kommen.

Es sei eine Curve zu beschreiben, welche der DFE congruent, und durch die drei, der Lage nach gegebenen, Linien AB, AC und BC

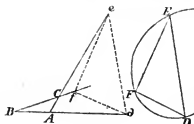


Fig. 63.

in Stücke getheilt werden, die den Theilen DF und FE congruent sind.

Man ziehe die geraden Linien DE, EF und DF, und lege die Ecken dieses Dreiecks DEF nach §. 63. auf die der Lage nach gegebenen geraden Linien. Hierauf beschreibe man um das Dreieck eine der Curve DFE congruente zweite Curve.

§. 65. Lehnsatz. Ein der Form nach gegebenes Viereck zu beschreiben, dessen einzelne vier Eckpunkte auf vier, der Lage nach gegebene Linien, (welche weder alle einander parallel sind, noch alle nach demselben Punkte zu convergiren) je einer auf je eine fallen.

Es seien ABC, AD, BD und CE die vier, ihrer Lage nach gegebenen Linien, von denen die erste die zweite in A, die dritte in B und die vierte in C schneidet; zu construiren ist das Viereck

$$fghi \backsimeq FGHJ,$$

so dass

Eckpunkt f auf ABC
„ g „ AD
„ h „ BD
„ i „ CE

falle. Man ziehe FH, und construire über FG, FH und FJ eben so viele Kreisabschnitte FSG, FTH und FVJ, deren ersterer einen Winkel = BAD, der zweite einen Winkel CBD, der dritte einen Winkel BCE umfasst. Die Abschnitte müssen aber nach derjenigen Seite der Linien FG, FH und FJ beschrieben werden, dass die Reihenfolge der Buchstaben

F, S, G, F dieselbe als B, A, D, B
F, T, H, F „ „ C, B, D, C
F, V, J, F „ „ A, C, E, A

sei. Man ergänze die Abschnitte zu Kreisen, und es sei P der Mittelpunkt des ersten Kreises FSG, Q der des zweiten FTH. Man ziehe PQ, verlängere die Linie nach beiden Seiten und bestimme auf ihr den Punkt R so, dass

$$QR : PQ = BC : AB.$$

Man nehme QR auf der Seite von Q, dass die Reihefolge der Buchstaben

P, Q, R dieselbe als die von A, B, C

sei und beschreibe ans R als Mittelpunkt mit RF als Radius einen vierten Kreis FNc, welcher den dritten FVJ in c schneidet. Hierauf ziehe man Fc, welche den ersten Kreis in a, den zweiten in b schneidet, und construire, indem man aG, bH, cJ zieht, eine Figur

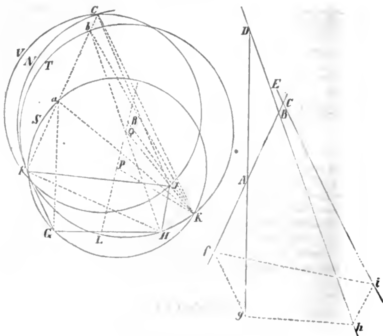


Fig. 64.

ABCihgf $\sim$ abcJHGF;

alsdann wird fghi das verlangte Viereck sein.

Es mögen die beiden ersten Kreise FSG und FTH einander in K schneiden, man ziehe die Linien

PK, QK, RK aK, bK, cK,

und verlängere QP bis L. Alsdann sind die Periphe iewinkel

FaK, FbK, FcK

die Hälften der Mittelpunktswinkel

FPK, FQK, FRK,

mithin gleich

LPK, LQK, LRK.

Daher ist

PQRK $\sim$ abcK,

und so

ab : bc = PQ : QR = AB : AC (nach der Constr.)

Ausserdem sind nach der Construction die Winkel

fAg, fBh, fCi

gleich den Winkeln

FaG, FbH, FcJ;

man kann daher die Figur

ABCfghi $\sim$ abcFGHJ

vollenden, und es wird alsdann

fghi $\sim$ FGHJ,

die vier Ecken

f, g, h, i

liegen mithin respective auf den Linien

ABC, AD, BD, CE.

Zusatz. Man kann hiernach eine Linie ziehen, deren zwischen vier, der Lage nach gegebenen, Linien befindlichen Theile zu einander ein bestimmtes Verhältniss haben. Man vergrössere nämlich die Winkel FGH und GHJ so weit, dass die Linien FG, GH und HJ in Eine gerade Linie fallen, und indem man in diesem Falle die Aufgabe construirt, erhält man eine gerade Linie fghi, deren Theile fg, gh, hi zwischen

AB und AD, AD und BD, BD und CE

liegen und zu einander dasselbe Verhältniss haben, wie FG, GH und HJ, und auch dieselbe Reihenfolge beobachten werden. Dasselbe geschieht kürzer auf folgende Weise.

Man verlängere AB bis K und BD bis L, so dass

1. $BK : AB = HJ : GH$

und

2. $DL : BD = GJ : FG$

und ziehe LK, welche verlängert CE in i schneidet. Man verlängere iL bis M, so dass

3. $LM : iL = GH : HJ$[31])

werde, und ziehe

MQ $\ddagger$ LB,

bis sie AD in g schneidet; alsdann ist gi, welche BD in h und AB in f schneidet, die verlangte Linie.

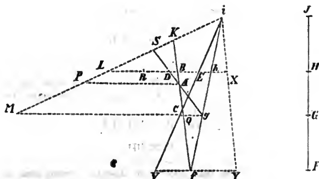


Fig. 65.

Es schneide Mg die Linie AB in Q und AD die Gerade KL in S, man ziehe

AP $\ddagger$ BD,

bis sie iL in P schneidet; alsdann ist

4. $Mg : Lh = Mi : Li = gi : hi = AK : BK = AP : BL.$

Hierauf theile man DL in R so, dass

5. $DL : RL = Mg : Lh =$ etc.;

da nun

$$gS : gM = AS : AP = DS : DL,$$

und

$$gM : Lh = AP : BL = DL : RL,$$

so erhält man aus diesen beiden Proportionen

6. $gS : Lh = AS : BL = DS : RL$

oder

$$BL - RL : Lh - BL = AS - DS : gS - AS$$

d. h.

7. $BR : Bh = AD : gA = BD : gQ$

oder

8. $BR : BD = Bh : gQ = fh : fg.$

Nach der Construction (Prop. 4. und 5.) ist aber

$$DL : RL = AK : BK,$$

woraus folgt

9. $DR : DL = AB : AK = GH : GJ$ (Prop. 1.)

Nun hatten wir (Prop. 2.)

$$DL : BD = GJ : FG,$$

mithin ergiebt sich

10. $DR : BD = GH : FG,$

und hieraus

11. $BR : BD = FH : FG.$

Aus Proportion 8. und 11. folgt also

$$fh : fg = FH : FG,$$

und da nach Prop. 4. und 3.

$$ig : ih = Mi : iL = GJ : HJ;$$

so ergiebt sich, dass die beiden Linien

FJ in G und H
fi „ g „ h

ähnlich getheilt sind.

Man kann auch bei der Construction dieses Zusatzes nachdem LK bis zum Durchschnittspunkt i mit CE verlängert ist, letztere über C hinaus so weit fortführen, dass

$$EV : iE = FH : FJ$$

wird und alsdann

$$Vf \ddagger BD$$

ziehen.

Endlich erreicht man auch noch dasselbe, wenn man aus i als Mittelpunkt mit JH als Radius einen Kreis beschreibt, welcher BD in X schneidet, hierauf iX zieht und bis Y verlängert, so dass

$$iY = JF$$

wird und dann

$$Yf \ddagger BD$$

zieht. Andere Lösungen dieser Aufgaben haben einst Wren und Wallis erdacht.

§. 66. Aufgabe. Eine der Form nach gegebene Curve zu construiren, welche durch vier grade Linien in solche Stücke getheilt wird, die der Reihefolge, Form und dem Verhältniss nach gegeben sind.

Man soll die Curve fghi beschreiben, welche der gegebenen Curve FGHJ ähnlich werde, und deren Theile

fg, gh, hi

den Theilen

FG, GH, HJ

jener, ähnlich und proportional werden, und respective zwischen den Linien

AB und AD, AD und BD, BD und CE

liegen.

Man construire das Viereck FGHJ, beschreibe

fghi ∾ FGHJ,

so dass die Eckpunkte des erstern auf den vier Linien

AB, AD, BD, CE

nach der festgesetzten Reihefolge zu liegen kommen (§. 65.). Hierauf beschreibe man nach §. 64. um dieses Viereck eine Curve, welche der gegebenen FGHJ ähnlich werde.

Fig. 66.

Fig. 67.

§. 67. Anmerkung. Diese Aufgabe kann auch folgendermassen construirt werden.

Man ziehe die Linien

FG, GH, HJ, JF,

verlängere Fg nach V, ziehe FH und JG und mache alsdann

$\angle$ CAK = FGH

DAL = VFH.

Fig. 68.

Es mögen AK und AL die Linie BD in K und L schneiden, und man ziehe die Linien KM und LN, so dass

$$\angle AKM = GHJ$$
$$ALN = FHJ$$

und

$$KM : AK = HJ : GH$$
$$LN : AL = HJ : FH.$$

Man construire aber die Linien

AK, KM, AL, LN

nach den Seiten der Linien

AD, AK, AL,

dass die Buchstaben

C, A, K, M, C; A, L, K, A; D, A, L, N, D

in derselben Ordnung auf einander folgen, wie die

F, G, H, J, F.

Zieht man nun die Linie MN, so möge dieselbe CE in i schneiden und man mache

$$\angle iEP = JGF$$

und

$$PE : Ei = FG : GJ,$$

ziehe durch P die Linie PQf, welche mit ADE den Winkel

$$PQE = FJG$$

bildet und AB in f schneidet; ferner ziehe man fi. PE und PQ müssen aber nach den Seiten der Linien CE und PQ gezogen werden, dass die Buchstaben

P, E, i, P und P, E, Q, P

in derselben Ordnung auf einander folgen, als die

F, G, H, J, F.

Construirt man endlich über fi in derselben Reihenfolge das Viereck

fgbi ∾ FGHJ,

und beschreibt um dasselbe die der Form nach gegebene Curve, so ist die Aufgabe gelöst. —

So weit über die Bestimmung der Bahnen. Es bleibt noch übrig, dass wir die Bewegung der Körper in den bereits gefundenen Bahnen bestimmen.

ABSCHNITT VI.

Von der Bestimmung der Bewegung in gegebenen Bahnen.

§. 68. **Aufgabe.** Ein Körper bewegt sich in einer gegebenen Parabel; man soll seinen Ort zu einer gegebenen Zeit finden. Es sei S der Brennpunkt, und A der Hauptscheitelpunkt der Parabel, so wie der Flächeninhalt des Sectors

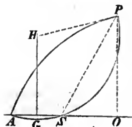


Fig. 69.

$$APS = 4 . AS . M,$$

welche Fläche durch den Radius vector SP entweder nach dem Ausgange vom Scheitel beschrieben worden ist, oder bis zur Auskunft des Körpers im Scheitelpunkte beschrieben werden soll. Die Fläche ist durch die ihr proportionale Zeit bekannt.

Man halbire AS in G, errichte das Perpendikel GH und mache dasselbe

$$= 3M;$$

alsdann wird der aus H als Mittelpunkt, mit HS als Radius, beschriebene Kreis die Parabel in dem gesuchten Punkte P schneiden.

Fällt man nämlich aus P das Perpendikel PO auf die Axe, so ist

$$1.\quad HG^2 + GS^2 = HS^2 = HP^2 = GO^2 + (PO - HG)^2$$
$$= GO^2 + PO^2 - 2PO . HG + HG^2$$

oder

$$2HG . PO = GO^2 + PO^2 - GS^2$$
$$= (GO + GS)(GO - GS) + PO^2$$
$$2.\quad 2HG . PO = AO^2 - 2AG . AO + PO^2.$$

Nach der Gleichung der Parabel

$$3.\quad PO^2 = 4AS . AO$$
$$= 8AG . AO$$

wird

$$AO = \frac{PO^2}{4AS},$$

daher nach 2.

$$2HG . PO = AO . \frac{PO^2}{4AS} - {}^1/_4 PO^2 + PO^2$$
$$= AO . \frac{PO^2}{4AS} + {}^3/_4 PO^2$$

und hieraus

$$4.\quad 8GH . AS = AO . PO + 3PO . AS$$

oder

$$5.\quad {}^4/_3\, GH . AS = \frac{AO + 3AS}{6} . PO.$$

Da nun

$$GH = 3M$$

ferner

$$AO + 3AS = AO + 3(AO - OS) = 4AO - 3 . OS,$$

so wird nach 5.

$$4 . AS . M = \frac{4AO - 3 . OS}{6} . PO$$

oder 6.

$$4 . AS . M = {}^2/_3 AO . PO - {}^1/_2 OS . PO.$$

Da nun aber

$${}^2/_3 AO . PO = \text{der parabolischen Fläche } AOPA$$
$${}^1/_2 OS . PO = \text{dem Dreiecke } SOP,$$

so wird endlich 7.

$$ASP = 4 . AS . M. \quad \text{W. Z. B. W.}$$

Zusatz 1. Es verhält sich daher

$$GH : AS,$$

wie die Zeit, in welcher der Körper den Bogen AP beschreibt, zu derjenigen, in welcher er den Bogen von A bis zu dem, zur Ordinate im Brennpunkte S gehörigen, Punkte zurücklegt.[32])

Zusatz 2. Da der Kreis ASP stets durch den sich bewegenden Körper geht, so verhält sich die Geschwindigkeit des Punktes G zu der Geschwindigkeit, welche der Körper im Scheitelpunkte hatte, wie

$$3 : 8,$$ [33])

und in demselben Verhältniss steht daher auch die Linie GH zu derjenigen geraden Linie, welche der Körper während der Zeit seiner Bewegung von A bis P, mit derjenigen Geschwindigkeit, die er im Scheitel hatte, beschreiben könnte.

Zusatz 3. Man kann auch umgekehrt die Zeit finden, in welcher der Körpar einen gegebenen Bogen AP beschreiben kann. Man ziehe nämlich AP und errichte in deren Mitte ein Perpendikel, welches GH in H schneidet.

§. 69. Lehnsatz. Es existirt keine ovale Figur, deren Flächenraum durch beliebige gerade Linien abgeschnitten, allgemein durch Gleichungen von begrenzter Zahl der Glieder und Dimensionen gefunden werden könnte.

Innerhalb des Ovals sei irgend ein Punkt gegeben, um welchen als Pol eine gerade Linie sich beständig gleichförmig dreht, und es bewege sich inzwischen auf dieser Linie vom Pole aus ein Punkt fortwährend mit einer Geschwindigkeit, welche dem Quadrat jener Linie innerhalb des Ovals proportional ist. Bei dieser Bewegung beschreibt jener Punkt eine Spirale von unzähligen Windungen.

Kann nun die Fläche des durch jene Linie abgeschnittenen Ovals durch eine endliche Gleichung gefunden werden, so wird durch dieselbe Gleichung auch die Entfernung des Punktes vom Pole, welche dieser Fläche proportional ist, folglich jeder Punkt der Spirallinie durch eine

endliche Gleichung gefunden, und daher auch der Durchschnitt einer jeden der Lage nach gegebenen geraden Linie mit derselben Curve durch eine solche Gleichung ausgedrückt werden. Nun schneidet aber jede unbestimmt verlängerte gerade Linie die Spirale in unendlich vielen Punkten und die Gleichung, durch welche irgend ein Durchschnitt zweier Linien bestimmt wird, stellt alle Durchschnittspunkte derselben durch eben so viele Wurzeln dar; sie steigt mithin zu so vielen Dimensionen an, als es Durchschnitte giebt.

Da zwei Kreise sich gegenseitig in zwei Punkten schneiden, wird ein Durchschnitt nur mittelst einer Gleichung von zwei Dimensionen gefunden, und dieselbe Gleichung bestimmt zugleich den zweiten Durchschnittspunkt.

Da zwei Kegelschnitte vier Durchschnittspunkte haben können, kann stets einer von ihnen im Allgemeinen durch eine Gleichung von vier Dimensionen gefunden werden und durch dieselbe erhält man zugleich alle übrigen Punkte. Suchte man nämlich jene Durchschnitte einzeln, so würde, weil bei allen dasselbe Gesetz und dieselbe Bedingung stattfindet, in jedem einzelnen Falle auch dieselbe Rechnung erfolgen. Es gilt daher stets dieselbe Schlussfolge, welche alle Durchschnittspunkte zugleich umfassen und darstellen muss. Desshalb werden auch die Durchschnittspunkte von Kegelschnitten und Curven dritter Ordnung alle zugleich sich durch eine Gleichung von sechs Dimensionen ergeben, weil eben so viele Durchschnitte stattfinden können und eben so bei zwei Curven dritter Ordnung durch eine Gleichung von neun Dimensionen. Wäre dies nicht nothwendig der Fall, so würde man alle Aufgaben im Raume auf Ebenen und noch mehr auf andere im Raume reduciren können. Ich rede hier von Curven, deren Gleichung in Bezug auf ihren Grad nicht zu reduciren ist. Könnte nämlich die Gleichung, welche die Curve bestimmt, auf eine niedrigere Potenz reducirt werden, so würde die Curve nicht einfach, sondern aus zwei oder mehreren zusammengesetzt sein, deren Durchschnittspunkte durch verschiedene Rechnungen einzeln gefunden werden können.

Aus derselben Ursache ergeben sich die zwei Durchschnittspunkte einer geraden Linie und eines Kegelschnittes aus einer Gleichung von zwei Dimensionen, die drei einer Linie und einer unreducirbaren Curve dritter Ordnung aus einer Gleichung von zwei, die vier einer geraden Linie und einer unreducirbaren Curve vierter Ordnung aus einer Gleichung von vier Dimensionen u. s. w. Es erfordern daher die unendlich vielen Durchschnittspunkte einer geraden Linie mit einer Spirale, da diese Curve einfach, nicht auf mehrere zu reduciren ist, und weil bei allen dasselbe Gesetz und dieselbe Rechnung stattfindet, eine Gleichung von unendlich vielen Dimensionen und Wurzeln, wodurch alle zugleich dargestellt werden können.

Wird nun vom Pol auf jene gerade Linie ein Perpendikel gefällt, und dreht sich dieses Perpendikel zugleich mit der schneidenden Linie

um den Pol, so werden die Durchschnittspunkte der Spirallinie wechselweise in einander übergehen und derjenige, welcher der erste und nächste war, wird nach einer Umdrehung der zweite, nach zwei Umdrehungen der dritte werden u. s. w.

Die Gleichung ändert sich inzwischen nicht weiter, als nach Verhältniss der Veränderung derjenigen Grössen, durch welche die Lage der schneidenden Linie bestimmt wird. Da nun jene Grössen nach den einzelnen Umdrehungen zu ihren ersten Werthen zurückkehren, so kehrt auch die Gleichung zu ihrer ersten Form zurück; mithin stellt eine und dieselbe alle Durchschnittspunkte dar und hat desswegen unendlich viele Wurzeln, wodurch alle dargestellt werden können. Es kann daher der Durchschnitt einer geraden Linie mit einer Spirallinie durch seine endliche Gleichung allgemein gefunden werden und folglich existir keine ovale Figur, deren durch gegebene gerade Linien begrenzter Flächeninhalt durch eine solche Gleichung allgemein dargestellt werden könnte.

Auf dieselbe Weise kann man, wenn man den Abstand des Pols von dem Punkte, der die Spirale beschreibt, dem Umfange des abgeschnittenen Ovals proportional annimmt, darthun, dass die Länge des Umfanges durch keine endliche Gleichung dargestellt werden könne Ich rede hier von solchen Ovalen, welche nicht von conjugirten, ins Unendliche fortgehenden Figuren berührt werden.

Zusatz. Es ergiebt sich daher der Flächeninhalt einer Ellipse, welche durch einen, vom Brennpunkte nach dem beweglichen Punkte gezogenen Radius vector beschrieben wird, aus der gegebenen Zeit durch keine endliche Gleichung, und sie kann daher nicht durch die Beschreibung geometrisch-rationaler Figuren dargestellt werden. Geometrisch-rationale Figuren nenne ich solche, deren Punkte alle durch Längen, die mittelst Gleichungen gegeben sind, d, h. durch zusammengesetzte Verhältnisse der Längen bestimmt werden können, die übrigen (wie Spirallinien, Trocholden) nenne ich geometrisch-irrationale. Denn die Längen, welche sich wie eine Zahl zu einer Zahl, oder nicht auf diese Weise verhalten (wie im 10. Buche der Elemente Euklid's,) sind arithmetisch-rational oder irrational, Die der Zeit proportionale Fläche einer Ellipse schneide ich daher durch eine geometrisch-irrationale Curve ab, und zwar auf folgende Weise:

§. 70. Aufgabe. Ein Körper bewegt sich in einer Ellipse; man soll seinen Ort zu einer gegebenen Zeit finden.

In der Ellipse APB sei A der Hauptscheitelpunkt, S der Brennpunkt, O das Centrum und P der zu findende Ort des Körpers. Man verlängere OA bis G, so dass

$$1.\ OG : OA = OA : OS$$

sei, errichte GH auf AG perpendikulär und beschreibe aus O als Mittelpunkt, mit OG als Halbmesser, den Kreis EFG. Auf der geraden Linie GH als Grundlinie lasse man den Kreis EFG sich fortbewegen, indem

er sich zugleich um seine Axe dreht, so dass der Punkt A die Trochoide ALJ beschreibe. Ist dies geschehen, so nehme man GK in dem Verhältniss zur Peripherie GEFG, wie die Zeit, in welcher der Körper den

Fig. 70.

elliptischen Bogen AP zurücklegt, zur ganzen Umlaufszeit in der Ellipse. Errichtet man nun das Perpendikel KL, welches die Trochoide in L schneidet, zieht man

$$LP \ddagger GK,$$

so ist der Durchschnittspnnkt P der erstern Linie mit der Ellipse der verlangte Punkt.

Man beschreibe nämlich aus O als Mittelpunkt, mit O als Radius den Halbkreis AQB, so dass dieser und LP sich in Q schneiden, und ziehe SQ und OQ. Die letzte Linie schneide den Kreis EFG in F und man fälle SR perpendikulär auf OQ. Alsdann ist der elliptische Sector APS dem Kreissector AQS proportional.

Es ist aber

$$AQS = OQA - OQS$$

$$2.\ AQS = {}^1/_2 OQ \,.\, QA - {}^1/_2 OQ \,.\, RS,$$

mithin, da $^1/_2 OQ$ gegeben und constant ist, der Flächeninhalt von APS porportional der Differenz

$$QA - RS.$$

Da nun

$$3.\ SR : \sin AQ = OS : OQ = OS : OA = OA : OG = AQ : GF;$$

so wird anch

$$4.\ AQ - SR : GF - \sin AQ = AQ : GF = OS : OA$$

und

$$QA - SR = \frac{OS}{AO}(GF - \sin AQ);$$

mithin der Sector AQS proportional dem Unterschiede

GF — sin AQ,[34])

das heisst nach der der Gleichung der Trochoide der Linie GK. W. z. b. w.

§. 71. Anmerkung. Wegen der schwierigen Construction dieser Curve ist es vorzuziehen, in der Praxis andere Constructionen anzuwenden, welche der Wahrheit sehr nahe kommen.

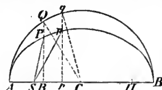


Fig. 71.

Man suche einen bestimmten Winkel B, welcher sich zu dem Winkel = 57°,29578, den ein dem Radius gleicher Bogen unterspannt, verhält wie die Entfernung SH beider Brennpunkte von einander zur grossen Axe AB. Es sei mithin

1. B : 57°,29578 = SH : AB.

Ferner suche man eine Linie L, welche zum Radius im Verhältniss

2. AB : SH

steht. Hat man beide einmal gefunden, so löst man die Aufgabe durch folgende Analyse:

Nach irgend einer Construction oder irgend einer Conjectur, bestimme man den Ort P möglichst nahe dem Orte p. Fällt man von ihm auf die Axe der Ellipse die Ordinate PR, so erhält man die Ordinate QR des um die Ellipse beschriebenen Kreises AQB aus dem Verhältniss beider Axen der Ellipse und es ist alsdann

3. QR = AC . sin ACQ,

woraus man den Winkel ACQ erhält, den man nur nebenbei durch Rechnung zu bestimmen braucht. Man kennt ferner auch den, der Zeit proportionalen Winkel, d. h. denjenigen, welcher sich zu 360° verhält, wie die zur Beschreibung des Bogens, Ap erforderliche Zeit, zur ganzen Umlaufszeit in der Ellipse. Dieser Winkel sei = N, und man nehme hierauf einen Winkel D so an, dass

4. D : B = sin ACQ : Radius

und einen Winkel E, so dass

5. N — ACQ + D = L : L $\mp$ sin (ACQ + D)

$\mp$, je nachdem ACQ $\lesseqgtr$ 90°.[35])

Ferner bestimme man die Winkel F und G, so dass

6. F : B = sin (ACQ + E) : Radius

7. G : N — ACQ — E + F = L : L $\mp$ sin (ACQ + E)

$\mp$, je nachdem ACQ + E $\lesseqgtr$ 90°.

Hierauf H und J, so dass

8. H : B = sin (ACQ + E + G) : Radius

9. J : N — ACQ — E — G + H + L : L $\mp$ sin (ACQ + E + G)

$\mp$, je nachdem ACQ + E + G $\lesseqgtr$ 90°.

Auf diese Weise kann man ins Unendliche fortfahren. Zuletzt nehme man

10. $ACq = ACQ + E + G + J + \text{etc};$

man erhält dann aus seinem Cosinus, welcher

aus $ACq = Cr$

und der aus der Proportion

11. $pr : \sin ACq = \text{Kleine Axe} : \text{Grosse Axe}$

folgenden, Ordinate pr den verbesserten Ort p des Körpers.

Wird in einem bestimmten Falle der Winkel

$$N - ACQ + D$$

negativ, so muss das Zeichen + bei E überall in —, und umgekehrt — in + verwandelt werden. Dasselbe gilt von Zeichen der Winkel G und J, wenn die Winkel

$$N - ACQ - E + F \text{ und } ACQ - E - G + H$$

negativ ausfallen.

Die unendliche Reihe

$$ACQ + E + G + J + \text{etc.}$$

convergirt übrigens sehr schnell, so dass man kaum jemals über das zweite Glied E hinaus zu gehen nöthig haben wird. Die Rechnung gründet sich auf den Satz, dass der Flächenraum APS dem Unterschied zwischen dem Bogen AQ und dem Perpendikel von S auf CQ proportional ist.[36])

Fig. 72.

Durch eine nicht unähnliche Rechnung wird die Aufgabe für die Hyperbel gelöst. Es sei C ihr Mittelpunkt, A der Scheitel-, S der Brennpunkt und CK die Asymptote. Man kennt den Flächeninhalt des Sectors APS, welcher der Zeit proportional ist; er sei = A gesetzt. Man nehme eine Lage von SP an, welche sehr nahe jenen Flächeninhalt abschneidet. Man ziehe CP, ferner von A und P die Linien AJ und PK parallel der andern Asymptote; alsdann kennt man mittelst der Logarithmentafeln den Flächeninhalt von AJPK und den ihm gleichen von CPA,[37]) welcher letztere, vom △ CPS abgezogen, den Flächeninhalt von APS übrig lässt. Fällt man nun auf die Tangente PT vom Brennpunkt S das Perpendikel SN und legt an dieses den halben Unterschied von A und APS, also

$$\tfrac{1}{2}APS - \tfrac{1}{2}A \text{ oder } \tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}APS;$$

so erhält man die Länge von PQ. Man hat PQ zwischen A und P zu nehmen, wenn

$$APS > A,$$

auf der entgegengesetzten Seite von P, wenn

$$APS < A.$$

Der Punkt Q ist dann der verbesserte Ort, und durch fortgesetzte

Wiederholung der Operation wird man denselben immer genauer erhalten. —

Durch diese Rechnungen wird die Aufgabe im allgemeinen analytisch gelöst, für den astronomischen Gebrauch ist aber die folgende besondere Rechnungsweise bequemer. Hat man die halben Axen der Ellipse

AO, BO, OD

und den Parameter L gefunden; so suche man die Winkel Y und Z durch die Proportionen:

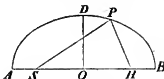


Fig 73.

$$12. \quad \begin{cases} \sin Y : \text{Radius} = D \,.\, (AO + OD) : AB^2 \\ \sin Z : \text{Radius} = 2D \,.\, SH : 3 \,.\, AO^2, \end{cases}$$

wo $D = OD - \frac{1}{2}L$. Nachdem dieselben so bestimmt sind, nehme man den Winkel T proportional der Zeit, in welcher der Bogen BP beschrieben worden ist, oder gleich (der sogenannten) mittleren Bewegung und setze

13. $V : Y = \sin 2T : \text{Radius}$ (wo V die erste Gleichung der mittlern Bewegung, Y die erste grösste Gleichung heisst.

14. $X : Z = \sin T^3 : \text{Radius}^3$ (wo X die zweite Gleichung, Z die zweite grösste Gleichung heisst.)

Hierauf setze man

$$\angle BHP = T + X + V, \text{ wenn } T < 90^0$$
$$= T + X - V, \text{ wenn } T > 90^0 \text{ und } < 180^0.$$

Trifft nun HP die Ellipse in P, so wird die Linie SP den Sector BSP sehr nahe der Zeit proportional abschneiden.

Dieses practische Verfahren erscheint sehr kurz, weil man von den sehr kleinen Winkeln V und X (die, wenn es beliebt, in Secunden angesetzt werden können) nur die zwei oder drei ersten Stellen zu suchen braucht. Allein, es genügt auch für die Theorie der Planeten, indem selbst in der Marsbahn, deren grösste Mittelpunktsgleichung 10^0 gleich ist, der Fehler kaum grösser als 1'' sein wird. Nachdem aber der Winkel BHP der mittlern gleichen Bewegung gefunden worden ist, erhält man den Winkel HSP der wahren Bewegung und den Abstand SP sogleich nach einer wohlbekannten Methode.

So weit über die Bewegung der Körper in krummen Linien. Es kann aber auch geschehen, dass ein Körper geradlinig fällt oder steigt; und ich will jetzt dasjenige auseinandersetzen, was sich auf eine derartige Bewegung bezieht.

ABSCHNITT VII.

Von dem geradlinigen Steigen und Fallen der Körper.

§. 72. **Aufgabe.** Vorausgesetzt dass die Centripetalkraft dem Quadrate der Entfernung des Körpers vom Centrum umgekehrt proportional sei; soll man die Wege bestimmen, welche ein Körper beim geradlinigen Falle in gegebenen Zeiten beschreibt.

Erster Fall. Fällt der Körper nicht perpendikulär, so beschreibt er irgend einen Kegelschnitt, dessen unterer Brennpunkt mit dem Mittelpunkte der Kräfte zusammenfällt. Dies erhellt aus §§. 29., 30., 33. und ihren Zusätzen. Es sei ARPB dieser Kegelschnitt, S sein unterer Brennpunkt. Ist zuerst die Figur eine Ellipse, so beschreibe man über ihrer grossen Axe AB den Halbkreis ADB, und ziehe durch den herabfallenden Körper P die Linie DPC perpendikulär auf die Axe. Zieht man dann DS und PS, so ist die Fläche ASD der Fläche ASP und so auch der Zeit proportional. Bei unveränderter Axe AB vermindere man beständig die Breite der Ellipse, alsdann wird immer die Fläche ASD der Zeit proportional bleiben. Verkleinert man jene Breite ins Unendliche, so fällt die Bahn APB mit der Axe AB, und der Brennpunkt S mit dem Endpunkte B der letztern zusammen. Der Körper wird nun in der geraden Linie AC herabfallen und die Fläche ABD der Zeit proportional sein. Es wird daher der Weg AC, welchen der Körper bei seinem geradlinigen Falle von A in der gegebenen Zeit beschreibt, bekannt, wenn man nur die Fläche ABD der Zeit proportional annimmt und vom Punkte D aus auf AB das Perpendikel DC fällt.

Fig. 74.

Fig. 75.

Zweiter Fall. Ist die vorhergehende Figur RPB eine Hyperbel, so beschreibe man zu derselben Hauptaxe AB eine rechtwinklige Hyperbel BED. Da man nun die gleichen Verhältnisse hat

$$\begin{aligned} CSP : CSD &= CBfP : CBED \\ &= SPfB : SDEB \\ &= CP : CD \end{aligned}$$

und die Fläche SPfB der Zeit proportional ist, in welcher der Körper P sich durch den Bogen PfB bewegt; so wird auch die Fläche SDEB

derselben Zeit proportional sein. Vermindert man nun den Parameter der Hyperbel RPB bis ins Unendliche, während ihre Hauptaxe unverändert bleibt; so fällt der Bogen PB mit der geraden Linie CB, der Brennpunkt S mit dem Scheitelpunkte B und die gerade Linie SD mit BD zusammen. Es ist ferner die Fläche BDEB der Zeit proportional, in welcher der Körper beim geradlinigen Falle die Linie CB beschreibt.

Dritter Fall. Nach derselben Weise beschreibe man, wenn RPB eine Parabel ist, zu demselben Hauptscheitelpunkte eine andere Parabel BED, welche immer unverändert bleibt, während die erstere, auf deren Umfang der Körper P sich bewegt, durch Verminderung ihres Parameters ins Unendliche, mit der Linie CB zusammenfällt. Das parabolische Segment BDEB wird alsdann der Zeit proportional, in welcher der Körper P vom Punkte C bis zum Centrum B fällt.

Fig. 76.

§. 73. Lehrsatz. Nachdem dies gefunden worden ist, behaupte ich, dass die Geschwindigkeit des fallenden Körpers in einem beliebigen Punkte C sich verhalte zur Geschwindigkeit eines andern Körpers, welcher einen Kreis zum Mittelpunkt B und Radius BC beschreibt, wie

$$\sqrt{CA} : \sqrt{\tfrac{1}{2}AB}.$$

Da CD und CP einander proportional sind, ist AB ein beiden Figuren RPB und DEB gemeinschaftlicher Durchmesser. Man halbire denselben in O und ziehe die Linie PT, welche die Curve RPB in P berührt und die Richtung des Durchmessers in T durchschneidet. Ferner ziehe man SY perpendikulär auf PT, BQ perpendikulär auf AB und setze den Parameter der Curve RPB = L.

Fig. 77.

Aus §. 36., Zusatz 9. geht hervor, dass die Geschwindigkeit des Körpers, welcher sich auf der Curve RPB um das Centrum S bewegt, sich zu der Geschwindigkeit eines andern Körpers, der einen Kreis vom Radius SP um S beschreibt, wie

$$1.\quad \sqrt{\tfrac{1}{2}L \,.\, SP} : SY$$

verhält. Nach der Lehre von den Kegelschnitten ist ferner

$$AC \,.\, CB : CP^2 = 2 \,.\, AO : L,$$

oder

$$2.\quad L = \frac{2CP^2 \,.\, AO}{AC \,.\, CB}.$$

Nach 1. und 2. verhalten sich daher jene Geschwindigkeiten wie

$$3.\quad \sqrt{\frac{CP^2 \,.\, AO \,.\, SP}{AC \,.\, CB}} : SY.$$

Ferner ist nach der Lehre von den Kegelschnitten

$$4.\quad CO : BO = BO : TO,$$[38]

woraus
$$BO + CO : BO = BO + TO : TO$$
oder
$$5.\quad BC : BO = BT : TO$$
und
$$6.\quad CO : BO = BC : BT$$
hervorgeht. Aus 6. schliessen wir auf
$$BC - CO : BO = BT - BC : BT$$
oder
$$AC : AO = CT : BT = CP : BQ;$$
mithin
$$7.\quad CP = \frac{AC \cdot BQ}{AO}$$
und
$$\sqrt{\frac{CP^2 \cdot AO \cdot SP}{AC \cdot CB}} = \sqrt{\frac{AC^2 \cdot BQ^2}{AO^2} \cdot \frac{AO \cdot SP}{AC \cdot CB}} = \sqrt{\frac{BQ^2 \cdot AC \cdot SP}{AO \cdot BC}}.$$

Das Verhältniss 3. wird daher jetzt

$$8.\quad \sqrt{\frac{BQ^2 \cdot AC \cdot SP}{AO \cdot BC}} : SY.$$

Vermindert man jetzt die Breite CP der Figur RPB bis ins Unendliche, so dass endlich der Punkt P mit C zusammenfällt, so wird gleichzeitig

S mit B
SP „ BC
SY „ BQ

zusammenfallen, und in diesem Falle, wo der Körper auf der Linie CB herabsteigt, wird obiges Verhältniss 8., indem man

SP gegen BC
und $\sqrt{BQ^2}$ „ SY

aufhebt, übergehen in

$$9.\quad \sqrt{AC} : \sqrt{AO} = \sqrt{AC};\ \sqrt{\tfrac{1}{2}AB}.\quad \text{W. z. h. w.}$$

Zusatz 1. Fallen die Punkte B und S zusammen, so hat man

$$TC : ST = AC : AO.$$

Zusatz 2. Ein Körper, welcher sich in irgend einer Entfernung vom Centrum im Kreise herumbewegt, steigt bei seiner aufwärts gerichteten Bewegung zum doppelten Abstande vom Mittelpunkte auf.

§. 74. **Lehrsatz.** Ist BfP eine Parabel, so behaupte ich, dass die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers in irgend einem Punkte C gleich ist derjenigen Geschwindigkeit, mit welcher der Körper einen Kreis zum Mittelpunkt B und Halbmesser $\frac{1}{2}$ BC gleichförmig beschreiben kann.

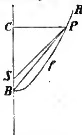


Fig. 78.

Die Geschwindigkeit eines Körpers, welcher die Parabel RPB um den Brennpunkt S als Centrum beschreibt, ist in einem beliebigen Punkte P, nach §. 36., Zusatz 7. gleich der Geschwindigkeit eines Körpers, welcher um S einen Kreis vom Durchmesser SP gleichförmig beschreibt. Vermindert man nun die Breite CP der Parabel bis ins Unendliche, so dass der pa-

rabolische Bogen PfB mit der geraden Linie CB, das Centrum S mit dem Scheitel B und SP mit BP zusammenfällt; so ergiebt sich die Wahrheit des Satzes. W. z. b. w.

§. 75. Lehrsatz. Unter denselben Voraussetzungen behaupte ich, dass der Flächeninhalt der Figur DES, welche mit einem unbestimmten Radius SD beschrieben worden ist, gleich ist der Fläche, welche ein Körper beschreibt, der sich in einem Kreise zum Mittelpunkt S und Halbmesser, gleich dem halben Parameter jener Curve, gleichförmig bewegt.

Fig. 79.

Man denke sich dass der Körper C fallend in einem sehr kleinen Zeittheilchen die kleine Linie Cc beschreibe, und unterdessen ein anderer Körper K, bei gleichförmiger Bewegung in dem um S als Mittelpunkt gezogenen Kreise OKk, durch den Bogen Kk fortgehe. Man errichte die Perpendikel CD und cd, welche die Figur DES in D und d schneiden, ziehe SD, Sd, SK, Sk und Dd, welche letztere die Linie AS in T schneidet und fälle SY auf DT perpendikulär.

Erster Fall. Ist DES ein Kreis oder eine rechtwinklige Hyperbel, so wird ihre grosse Axe AS in O halbirt, und es ist SO die Hälfte des Parameters. Da nun

1. $TC : TD = Cc : Dd$

und

2. $DT : TS = CD : SY$ (weil $\triangle\, SDT = \frac{1}{2} DT \,.\, SY = \frac{1}{2} ST \,.\, CD$)

so wird

3. $TC : TS = CD \,.\, Cc : Dd \,.\, SY.$

Nach §. 73., Zusatz 1. ist aber

$$CT : TS = AC : AO,$$

wenn nämlich beim Zusammenfallen der Punkte D und d die letzten Verhältnisse der Linien genommen werden;

also $AC : AO = CD \,.\, Cc : Dd \,.\, SY$

und weil $AO = SK.$

4. $AC : SK = CD \,.\, Cc : Dd \,.\, SY.$

Ferner verhält sich die Geschwindigkeit des fallenden Körpers in C zu der Geschwindigkeit eines Körpers, der um S einen Kreis vom Radius SC beschreibt, nach §. 73. wie

$$\sqrt{AC} : \sqrt{AO} = \sqrt{AC} : \sqrt{SK}.$$

Die letztere Geschwindigkeit verhält sich zu der eines Körpers, welcher den Kreis OKk beschreibt, nach § 18., Zusatz 6., wie

$$\sqrt{SK} : \sqrt{SC},$$

und so die erste Geschwindigkeit zur letztern, d. h.

$$\text{Linie } Cc : \text{Bogen } Kk = \sqrt{AC} : \sqrt{SC}$$
$$= AC : CD$$

mithin 5. $CD \,.\, Cc = AC \,.\, Kk$,

und nach 4. $AC : SK = AC \,.\, Kk : Dd \,.\, SY$.

Es ist daher $SK \,.\, Kk = SY \,.\, Dd$

oder ${}^4/_2 SK \,.\, Kk = {}^1/_2 SY \,.\, Dd$

d. h. 6. Fläche KSk = Fläche SDd.

Es werden daher in den einzelnen Zeittheilchen Stücke KSk und SDd beider Figuren beschrieben, welche, wenn man ihre Grösse bis ins Unendliche vermindert und ihre Anzahl eben so vermehrt, einander gleich werden; nach § 4. Zusatz werden mithin die ganzen gleichzeitig erzeugten Flächen einander gleich. W. z. b. w.

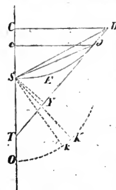


Fig. 80.

Zweiter Fall. Ist die Figur DES eine Parabel, so findet man wie oben Gl. 3.

$$CD \,.\, Cc : SY \,.\, Dd = TC : ST$$
$$= 2 : 1,$$

mithin 7. ${}^1/_4 CD \,.\, Cc = {}^1/_2 SY \,.\, Dd$.

Nach §. 74. ist aber die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers in C gleich derjenigen Geschwindigkeit, mit welcher ein Kreis vom Halbmesser ${}^1/_2 SC$ gleichförmig beschrieben werden könnte. Diese Geschwindigkeit verhält sich aber zu derjenigen, mit welcher der Kreis zum Halbmesser SK beschrieben wird, oder (nach §. 18., Zusatz 6.) wie

$$Cc : Kk = \sqrt{SK} : \sqrt{{}^1/_2 SC}$$

8. $Cc : Kk = SK : {}^1/_2 CD$ (39)

daher ist ${}^1/_2 SK \,.\, Kk = {}^1/_4 CD \,.\, Cc$

9. ${}^1/_2 SK \,.\, Kk = {}^1/_2 SY \,.\, Dd$ (Gl. 7.),

d. h. Fläche KSk = Fläche SDd, wie oben. W. z. b. w.

§. 76. **Aufgabe.** Ein Körper fällt aus einem gegebenen Orte A herab; man soll die Zeit seines Herabfallens bestimmen.

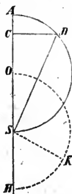


Fig. 81.

Ueber dem Durchmesser (dem anfänglichen Abstande des Körpers vom Mittelpunkte der Kräfte) beschreibe man den Halbkreis ADS und um S als Mittelpunkt den jenem gleichen Halbkreis OKH. In dem beliebigen Orte C des Körpers errichte man die Ordinate CD, ziehe DS und mache

Fläche OSK = Fläche ASD.

Aus §. 75. erhellt, dass ein Körper bei seinem Falle in derselben Zeit den Weg AC zurücklegt, in welcher ein anderer Körper bei gleichförmiger Bewegung um das Centrum S den Bogen OK durchlaufen würde.

§. 77. **Aufgabe.** Ein Körper wird von einem gegebenen Orte auf- oder abwärts geworfen; man soll die Zeit seines Auf- oder Absteigens bestimmen.

Der Körper gehe von dem Orte G längs der Linie GSA mit irgend einer Geschwindigkeit aus. Im doppelten Verhältniss dieser Geschwindigkeit zu derjenigen, mit welcher der Körper im Kreise zum Centrum S und Radius SG sich bewegen könnte, nehme man

$$AG : \tfrac{1}{2}AS.$$

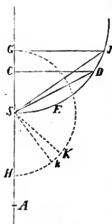


Fig. 82.

Ist dieses Verhältniss $= 2:1$, so fällt der Punkt A in unendliche Entfernung, und man hat in diesem Falle eine Parabel zum Scheitel S, der Axe AS und irgend einem Parameter zu beschreiben. Dies erhellt aus §. 74.

Ist jenes Verhältniss

$$\lesseqgtr 2:1,$$

so muss im ersten Falle ein Kreis, im zweiten eine rechtwinklige Hyperbel über dem Durchmesser AS beschrieben werden. Dies erhellt aus §. 73.

Hierauf beschreibe man aus dem Mittelpunkt S, mit einem dem halben Parameter gleichen Radius, den Kreis HkK und errichte an den beliebigen Orten G und C des auf- und absteigenden Körpers die Perpendikel GJ und CD, welche den Kegelschnitt oder Kreis in J und D schneiden. Nachdem man nun SJ und SD gezogen hat, mache man

Sector HSK = Segment SEJS

Sector HSk = Segment SEDS;

alsdann beschreibt nach §. 75. der Körper G in derselben Zeit den Weg GC, in welcher der Körper K den Bogen Kk durchlaufen kann.

§. 78. **Lehrsatz.** Vorausgesetzt, dass die Centripetalkraft proportional sei der Höhe, oder dem Abstande des Ortes vom Centrum der Kräfte; so behaupte ich, dass die Zeit, Geschwindigkeit und der beschriebene Weg respective proportional sei dem Bogen, Sinus des Bogens und dem Sinus versus des letztern.

Es falle ein Körper von dem beliebigen Orte A aus längs der geraden Linie AS, und man beschreibe aus dem Mittelpunkte S den Kreisquadranten AE. Ist CD der Sinus des beliebigen Bogens AD, so beschreibt der Körper, in der Zeit AD herabfallend, den Weg AC und wird im Punkt C die Geschwindigkeit CD erlangt haben. Dies wird eben so nach §. 27. erwiesen, wie wir §. 72. nach §. 29. erwiesen haben.

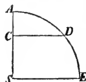


Fig. 83.

Zusatz 1. Hiernach sind die Zeiten gleich, in denen Ein Körper, von A herabfallend, nach dem Mittelpunkte S gelangt, und ein anderer den Bogen ADE des Quadranten beschreibt.

Zusatz 2. Ferner sind alle Zeiten einander gleich, in denen Körper von irgend einem Orte bis zum Mittelpunkte fallen. Denn nach §. 18., Zusatz 3, sind alle periodischen Zeiten sich drehender Körper einander gleich.

§. 79. Aufgabe. Es ist eine Centripetalkraft beliebiger Art gegeben, nnd es wird die Quadratur krummliniger Figuren vorausgesetzt. Man sucht für einen geradlinig auf- oder absteigenden Körper sowohl die Geschwindigkeiten an den einzelnen Orten, als auch die Zeit, in welcher der Körper zu einem beliebigen Orte gelangt.

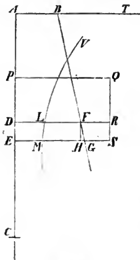


Fig. 84.

Von einem beliebigen Orte A fällt ein Körper längs der geraden Linie ADEC herab, und man errichte in jedem Orte E ein Perpendikel EG, welches der nach dem Mittelpunkte C gerichteten Centripetalkraft proportional ist. BFG sei die Curve, auf welcher der Punkt G beständig liegt. Im Anfange der Bewegung falle EG mit dem Perpendikel AB zusammen, alsdann ist die Geschwindigkeit des Körpers in jedem Punkte E der Seite des Quadrats, dessen Flächeninhalt = ABGE, proportional. Auf EG nehme man EM dieser Quadratseite umgekehrt proportional an nnd es sei VLM die Curve, auf welcher der Punkt M beständig liegt nnd deren Asymptote die verlängerte AB ist. Alsdann verhält sich die Zeit, in welcher der Körper herabfallend die Linie AE beschreibt, wie der Flächeninhalt der krummlinigen Figur

ABTVME.

Man nehme auf der Linie AE das sehr kleine Stück DE von gegebener Länge an, und es sei DLF der Ort der Linie EMG, wenn der Körper sich in D befindet. Ist nun die Centripetalkraft so beschaffen, dass die Seite des der Fläche ABGE gleichen Quadrats sich verhält, wie die Geschwindigkeit des herabfallenden Körpers; so wird die Fläche selbst dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional. Setzt man daher die Geschwindigkeit

$$\text{in } D = V$$
$$\text{„ } E = V + J,$$

so hat man 1. $ABFD : ABGE = V^2 : (V + J)^2$.

Bildet man die Unterschiede des ersten und zweiten, so wie des dritten und vierten Gliedes, so erhält man

$$DFGE : ABFD = (2V + J)\, J : V^2$$

und weil ABFD proportional V^2, also $\frac{ABFD}{V^2}$ = Constans

2. $\frac{DFGE}{DE}$ proportional $\frac{2J(V + \frac{1}{2}J)}{DE}$.

Nimmt man nun die ersten Verhältnisse der entstehenden Grössen in 2. an, so ist die Linie

2. DF proportional $\frac{2J \cdot V}{DE}$ oder auch $\frac{J \cdot V}{DE}$.

Die Zeit t, in welcher der herabfallende Körper die kleine Linie DE beschreibt ist aber

direct der Linie DE
indirect der Geschwindigkeit V } proportional,

daher die Zeit 4. t proportional $\frac{DE}{V}$.

Ferner ist die Kraft
direct dem Increment J der Geschwindigkeit,
indirect der Zeit t proportional;

mithin die Kraft 5. f proportional $\frac{J}{t}$, und mithin für die ersten Verhältnisse:

6. die Kraft proportional der Grösse $\frac{V \cdot J}{DE}$ (4. und 5.), d. h. (nach 3.) der Linie DF.

Die der Linie DF oder EG proportionale Kraft bewirkt daher, dass der Körper mit einer Geschwindigkeit herabfällt, welche der Seite des der Fläche ABGE gleichen, Quadrats, proportional ist. W. z. b. w.

Da ferner die Zeit, in welcher die beliebige kleine Linie DE beschrieben wird, indirect der Geschwindigkeit, also indirect $\sqrt{ABFD}$ proportional ist (4.); da ferner DL, und so auch die entstehende Fläche DLME, derselben $\sqrt{ABFD}$ indirect proportional ist: so ist die Zeit der Fläche DLME, und die Summe dieser Zeiten der Summe aller dieser Flächen proportional. Nach §. 4., Zusatz ist daher die ganze Zeit, in welcher die Linie AE beschrieben wird, der ganzen Fläche ATVME proportional. W. z. b. w.

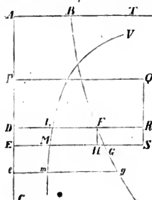


Fig. 85.

Zusatz 1. Ist P der Ort, von welchem ein Körper herabfallen muss, damit er unter der Einwirkung irgend einer bekannten gleichförmigen Centripetalkraft (wie etwa der Schwere)

im Punkte D eine Geschwindigkeit erlange, welche derjenigen gleich ist, die ein anderer, vermöge irgend einer Kraft herabfallender, Körper in D erlangt hat, und nimmt man auf dem Perpendikel DF die Länge DR an, welche sich zu DF verhält, wie jene gleichförmige Kraft zu der andern im Punkte D; so vollende man das Rechteck PDRQ und mache die Fläche ABFD demselben gleich. Alsdann ist A der Ort, von welchem der zweite Körper herabgefallen ist.

Nach Ergänzung des Rechtecks EDRS verhält sich nämlich nach Pr. 1.

7. $ABFD : DFGE = V^2 : 2VJ = \frac{1}{2} V : J$,

d. h. wie die Hälfte der ganzen Geschwindigkeit znm Incremente der Geschwindigkeit des durch ungleichförmige Kraft herabfallenden Körpers.

Eben so verhält sich

8. $PQRD : DRSE$

wie die Hälfte der ganzen Geschwindigkeit des gleichförmig herabfallenden Körpers zn ihrem Incremente. Die Incremente verhalten sich aber (wegen der Gleichheit der entstehenden Zeitmomente) wie die erzeugenden Kräfte, d. h. wie die Ordinaten

9. $DF : DR$;

folglich wie die entstehenden Flächen

10 $DFGE : DRSE$.

Die ganzen Flächen ABFD und PQRD verhalten sich daher zu einander, wie die Hälften der ganzen Geschwindigkeiten und (weil diese letztern einander gleich sind) ist also

11. $ABFD = PQRD$.

Zusatz 2. Wird ein beliebiger Körper vom beliebigen Pnnkte D aus auf- oder abwärts mit gegebener Geschwindigkeit geworfen, und ist das Gesetz der Centripetalkraft bekannt; so findet man seine Geschwindigkeit in irgend einem andern Orte e, indem man die Ordinate eg errichtet und dann setzt:

12. Geschwindigkeit in e : Geschwindigkeit in D $= \sqrt{PQRD \pm DFge} : \sqrt{PQRD}$ $\pm$ je nachdem e unter oder über D liegt.

Zusatz 3. Auch die Zeit wird bekannt, indem man die Ordinate em der Grösse $\sqrt{PQRD \pm DFge}$ umgekehrt proportional errichtet, und alsdann

13. (die Zeit, worin der Körper die Linie De beschreibt) : (Zeit, in welcher der andere Körper, vermöge der gleichförmigen Kraft von P bis D gelangt) $= DLme : 2PD.DL$

setzt. Es verhält sich nämlich die Zeit, in welcher der gleichförmig herabfallende Körper die Linie PD beschreibt, zu derjenigen, in welcher er die Linie PE beschreibt, wie

$$\sqrt{PD} : \sqrt{PE} = \sqrt{PD} : \sqrt{PD + DE} = \sqrt{PD} : \sqrt{PD} + {}^1/_2 \frac{DE}{\sqrt{PD}} + \text{etc.}$$

d. h. (indem die Linie DE als eben entstehend gedacht wird) wie

14. $PD : PD + {}^1/_2 DE = 2PD : 2PD + DE.$

Mithin verhält sich die zur Beschreibung von PD erforderliche Zeit zu der für DE erforderlichen Zeit, wie

16. $2PD : DE = 2PD . DL : DE . DL = 2PD . DL : DL . ME$

Bezeichnen wir ferner die zur Beschreibung einer solchen Linie erforderliche Zeit durch $PD^{(t)}$,

so können wir statt 16. die Proportion setzen

17. $PD^{(t)} : DE^{(t)} = 2PD . DL : DLME$

und wenn wir eben so durch $De^{(t)}$ die Zeit bezeichnen, in welcher der zweite Körper mit ungleichförmiger Bewegung die Linie De beschreibt $De^{(t)} = 2DL$

18. $DE^{(t)} : De^{(t)} = DLME : DLme$

also durch Zusammensetzung von 17. und 18.

$PD^{(t)} : De^{(t)} = 2PD . DL : DLme.$

ABSCHNITT VIII.

Von der Bestimmung der Bahnen, in denen sich Körper bewegen, welche durch beliebige Centripetalkräfte angetrieben werden.

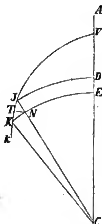


Fig. 86.

§. 80. Lehrsatz. Ein Körper bewegt sich, vermöge irgend einer Centripetalkraft auf beliebige Weise, während ein anderer Körper geradlinig auf- oder absteigt, und ihre Geschwindigkeiten sind in irgend einem Falle bei gleichen Höhen einander gleich. Alsdann sind diese Geschwindigkeiten in allen Höhen einander gleich.

Es falle ein Körper aus A durch D und E zum Mittelpunkte C herab, ein anderer Körper bewege sich von V aus auf der Curve VJKk. Vom Mittelpunkte C aus beschreibe man mit beliebigen Radien die concentrischen Kreise DJ und EK, welche die gerade Linie AC in J und K schneiden. Man ziehe den Radius JC, welcher den Bogen EK in N schneidet und fälle auf JK das Perpendikel NT; der Abstand der Peripherieen DE oder JN sei so klein als möglich und beide Körper haben in D und J gleiche Geschwindigkeiten.

Da $\quad\quad\quad\quad$ 1. $CD = CJ$,

so sind die Centripetalkräfte in D und J einander gleich, und man drücke beide durch die kleinen Linien DE und JN aus. Zerlegt man nun die eine JN nach Gesetze, Zusatz 2. in die beiden Seitenkräfte NT und JT, so ändert die eine NT, da sie senkrecht auf die Richtung JTK des Körpers wirkt, nichts in der Geschwindigkeit seiner Bewegung. Sie wird nur den Körper von der geradlinigen Bewegung abziehen und bewirken, dass er, anstatt längs der Tangente der Bahn sich zu bewegen, beständig längs der letztern JTKk fortschreite. Zu der Hervorbringung dieser Wirkung wird jene ganze Kraft verwandt, die andere Kraft JT aber, welche längs der Richtung des Körpers wirkt, wird diesen allein beschleunigen und in einer gegebenen sehr kleinen Zeit, eine ihr selbst proportionale Beschleunigung erzeugen. Ferner sind die in gleichen Zeiten hervorgebrachten Beschleunigungen der Körper D und J (wenn man die ersten Verhältnisse der entstehenden Linien DE, JN, JK, JT und NT annimmt) den Linien DE und JT proportional; bei ungleichen Zeiten sind sie diesen Linien und den Zeiten zusammengesetzt proportional.

Die Zeiten verhalten sich, wegen der Gleichheit der Geschwindigkeiten, wie die beschriebenen Wege DE und JK; folglich verhalten sich die Beschleunigungen, bei der Bewegung der Körper durch DE und JK, zusammengesetzt wie

$$DE : JT \text{ und } DE : JK,$$

d. h. wie $\quad\quad$ 2. $DE^2 : JT \,.\, KJ.$

Es ist aber $\quad\quad$ 3. $JT \,.\, JK = JN^2 = DE^2;$

daher werden, während die Körper die Wege DE und JK zurücklegen, gleiche Beschleunigungen erzeugt. Desshalb sind auch die Geschwindigkeiten beider Körper in E und K einander gleich, und auf dieselbe Weise werden sie in allen auf einander folgenden gleichen Abständen einander gleich befunden werden. W. z. b. w.

Zusatz 1. Ein Körper oder Pendel befindet sich in Schwingung, oder ersterer wird durch ein polirtes und vollkommen glattes Hinderniss gezwungen, sich in einer krummen Linie zu bewegen, während ein anderer Körper geradlinig auf- oder absteigt. Ferner sind die Geschwindigkeiten beider in derselben beliebigen Höhe einander gleich. Dieselben werden alsdann auch in allen andern gleichen Höhen einander gleich sein. Durch den Pendelfaden oder das Hinderniss des ganz glatten Gefässes wird nämlich dasselbe bewirkt, was vorher durch die Transversalkraft NT geschah; der Körper wird dadurch weder verzögert noch beschleunigt, sondern nur gezwungen, vom geradlinigen Wege abzuweichen.

Zusatz 2. Bezeichnet P den grössten Abstand vom Mittelpunkte, zu welchem ein entweder schwingender oder in einer Curve sich bewegender Körper gelangen kann, wenn er von irgend einem Punkte der letztern mit der ihm daselbst innewohnenden Geschwindigkeit aufwärts

geworfen wird; bezeichnet ferner A den Abstand des Körpers vom Mittelpunkte in irgend einem andern Orte der Bahn, und ist die Centripetalkraft immer irgend einer Potenz von A, etwa A^{n-1} proportional: so ist die Geschwindigkeit in jeder Höhe A

$$\sqrt{nP^n - nA^n}$$

proportional und daher gegeben. Nach §. 79. steht nämlich die Geschwindigkeit eines auf- und absteigenden Körpers in diesem Verhältniss

§. 81. **Aufgabe.** Gegeben ist die Centripetalkraft irgend einer Art, und es wird vorausgesetzt, dass die Quadratur der Curven auszuführen sei; man sucht die Curven, auf denen die Körper sich bewegen und dann die Zeit der Bewegung auf den gefundenen Curven.

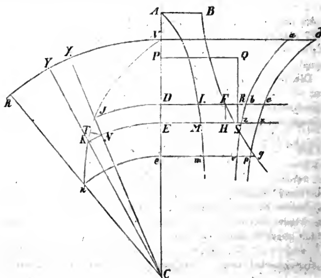


Fig. 87.

Eine beliebige Kraft sei nach dem Mittelpunkte C gerichtet; man sucht die Curve VJTKk. Gegeben ist der Kreis VXYR, welcher aus dem Mittelpunkte C mit irgend beliebigen Radius CV beschrieben worden ist. Aus demselben Punkte beschreibe man die andern beliebigen Kreise JD und KE, welche die Curve in J und K, die gerade Linie CV in D und E schneiden. Man ziehe nun die Linie CNJX, welche die Kreise KE und VY in N und X, und die Linie CKY, welche den Kreis VY in Y schneidet. Die Punkte J und K mögen einander sehr nahe liegen, und der Körper sich von V durch J, T und K nach k hin bewegen. Es sei ferner A die Höhe, aus welcher der andere Körper herabfallen muss, um in D eine Geschwindigkeit zu erlangen, welche

derjenigen des ersten in J gleich ist. Unter denselben Voraussetzungen, wie in §. 79., ist die in sehr kurzer Zeit beschriebene kleine Linie der Geschwindigkeit, also

$$\sqrt{ABFD}$$

proportional.

Das Dreieck JCK ist der Zeit proportional gegeben, folglich ist KN proportional $\frac{1}{JC}$, d. h. wenn irgend eine constante Grösse $= Q$ gegeben ist und die Höhe $JC = A$ gesetzt wird,

$$1.\quad KN \text{ proportional } \frac{Q}{A} = Z.$$

Setzen wir die Grösse Q so an, dass in irgend einem Falle die Proportion

$$2.\quad \sqrt{ABFD} : Z = JK : KN$$

stattfinde, so wird dieselbe immer stattfinden. Mithin haben wir auch

$$ABFD : Z^2 = JK^2 : KN^2,$$

oder $$ABFD - Z^2 : Z^2 = JK^2 - KN^2 : KN^2,$$

d. h. $$3.\quad ABFD - Z^2 : Z^2 = JN^2 : KN^2$$

oder, wenn wir aus allen Gliedern die Wurzel ziehen,

$$\sqrt{ABFD - Z^2} : Z = JN : KN$$

und so $$4.\quad A \,.\, KN = \frac{A \,.\, Z \,.\, JN}{\sqrt{ABFD - Z^2}} = \frac{Q \,.\, JN}{\sqrt{ABFD - Z^2}}$$

Ferner haben wir $YX \,.\, XC : A \,.\, KN = YC^2 : KC^2$

also $$5.\quad YX \,.\, XC = \frac{Q \,.\, JN \,.\, YC^2}{KC^2\sqrt{ABFD - Z^2}} = \frac{Q \,.\, JN \,.\, XC^2}{A^2\sqrt{ABFD - Z^2}}.$$

Nimmt man nun auf dem Perpendikel DF immer

$$6.\quad \begin{cases} Db = \dfrac{Q}{2\sqrt{ABFD - Z^2}} \\[2ex] Dc = \dfrac{Q \,.\, CX^2}{2A^2\sqrt{ABFD - Z^2}} \end{cases}$$

und zieht man durch die einzelnen so erhaltenen Punkte b, c die Curven ab und cd, errichtet man ferner in V auf AC das Perpendikel Vad, welches die krummlinigen Figuren VDba und VDcd abschneidet; zieht man endlich die Ordinaten Ez und Ex: so hat man:

$$7.\quad \begin{cases} Db \,.\, JN = DbzE = \tfrac{1}{2}A \,.\, KN = \triangle\, CKJ \\ Dc \,.\, JN = DcxE = \tfrac{1}{2}YY \,.\, XC = \triangle\, XCY \end{cases}$$

Da nun die entstehenden Theile DbzE von VDba

„ „ „ JCK „ VJC

und eben so „ „ „ DcxE „ VDcd

„ „ „ XCY „ VCX

einander stets gleich sind; so wird auch

die entstandene Fläche $$8.\quad \begin{cases} VDba = VJC \\ VDcd = VCX \end{cases}$$

und die beiden auf der linken Seite stehenden Flächen der Zeit propor-

tional. Ist daher die Zeit gegeben, seitdem der Körper vom Punkte V ausgegangen ist, so kennt man auch die ihr proportionale Fläche VDba und dadurch die Höhe CD oder CJ des Körpers, wie auch die Fläche VDcd und den ihr gleichen Sector VCX zugleich mit seinem Winkel VCJ. Ist hingegen der Winkel VCJ zugleich mit der Höhe CJ gegeben, so kennt man den Ort J, in welchem sich der Körper nach Verlauf jener Zeit befinden wird.

Zusatz 1. Man findet hieraus die grössten und kleinsten Höhen der Körper, d. h. die Apsiden der Bahnen auf leichte Weise. Diese fallen nämlich in diejenigen Punkte, in denen die durch das Centrum gezogene gerade Linie JC auf der Curve VJK senkrecht steht. Dies geschieht, wenn $JK = KN$
also (nach Gl. 2.) $ABFD = Z^2$
ist.

Zusatz 2. Auch den Winkel KJN, unter welchem die Curve in irgend einem andern Punkte jene Linie JC schneidet, findet man leicht aus der gegebenen Höhe JC des Körpers, indem man nämlich die Proportion

$$9. \quad \sin KJN : \text{Radius} = KN : JK = Z : \sqrt{ABFD}$$

aufstellt.

Zusatz 3. Man beschreibe zum Mittelpunkt C und dem Hauptscheitelpunkt V irgend einen Kegelschnitt VRS und ziehe am beliebigen

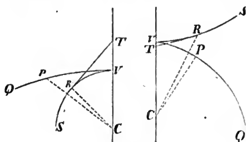


Fig. 88.

Punkte R eine Tangente RT, welche die unbestimmt verlängerte Axe CV in T schneidet. Hierauf ziehe man CR, mache

$$CP = CT$$

und $\angle$ VCP proportional dem Sector VCR,

und es werde vorausgesetzt, dass die nach dem Mittelpunkte C gerichtete Centripetalkraft dem Cubus der Entfernung des Körpers von diesem Punkte umgekehrt proportional sei. Geht nun der Körper vom Punkt V mit der richtigen Geschwindigkeit aus und längs einer auf CP perpendikulären Linie; so schreitet derselbe in einer Curve VPQ fort, in welcher der Punkt P beständig liegt. Ist daher der Kegelschnitt VRS eine Hyperbel, so steigt der Körper zum Mittelpunkte herab; ist er eine El-

lipse, so entfernt er sich von ihm bis ins Unendliche. Umgekehrt, geht der Körper mit irgend einer Geschwindigkeit vom Ort V aus, und beginnt er hierauf, entweder schräg zum Mittelpunkt herabzusteigen, oder sich von demselben zu entfernen; so ist die Figur VRS eine Hyperbel oder Ellipse, und man kann die Bahn finden, indem man den Winkel VCP in einem gegebenen Verhältniss entweder vergrössert oder verkleinert.

Aber auch wenn die Centripetalkraft in eine Centrifugalkraft übergeht, wird der Körper schräg in einer Curve VPQ aufsteigen, welche man findet, indem der Winkel VCP dem elliptischen Sector CVRC proportional und CP = CT angenommen wird. Alles dieses folgt aus dem vorhergehenden Satze mittelst der Quadratur einer jeden Curve, deren Aufsuchung ich der Kürze wegen als hinreichend leicht übergehe.

§. 82. Aufgabe. Das Gesetz der Centripetalkraft ist bekannt; man sucht die Bewegung eines Körpers, welcher von einem gegebenen Orte, mit gegebener Geschwindigkeit und längs einer gegebenen geraden Linie ausgeht.

Unter denselben Voraussetzungen, wie in den drei letzten Sätzen, gehe der Körper vom Orte J längs JK mit derjenigen Geschwindigkeit fort, welche ein anderer Körper, in Folge irgend einer Centripetalkraft aus P herabfallend, in D erlangen könnte und es verhalte sich diese Kraft zu derjenigen, welche anfangs auf den Körper J einwirkt, wie

DR : DF.

Hierauf bewege sich der Körper weiter nach k, und man beschreibe vom Mittelpunkte C aus mit dem Halbmesser Ck den Bogen ke, welcher die Linie PD in e schneidet, und errichte endlich die Ordinaten em, eg, ev, ew. Aus dem gegebenen Rechteck PDRQ und der gegebenen Centripetalkraft, durch welche der erste Körper angetrieben wird, kennt man die Curven BFGg und ALMm aus §. 79. nebst Zusatz 1. Hierauf ergiebt sich aus dem bekannten Winkel CJK das Verhältniss der entstehenden Linien JK und KN und hieraus durch die Construction des §. 81. die Grösse Q, zugleich mit den Curven abzv und dcxw. Nachdem also irgend eine Zeit Dbve verflossen ist, kennt man so wohl die Höhe Ce = Ck des Körpers, als auch die Fläche Dewe = Sector XCy, den Winkel JCk und den Ort k, in welchem der Körper sich alsdann befindet.

In diesen Sätzen nehmen wir an, dass die Centripetalkraft bei der Veränderung des Abstandes vom Centrum nach irgend einem denkbaren Gesetze sich ändere, in gleichen Abständen von ihm aber immer dieselbe sei.

Bis jetzt haben wir die Bewegung der Körper in unbeweglichen Bahnen betrachtet; es ist noch übrig, dass wir über ihre Bewegung in Bahnen, welche sich um das Centrum der Kräfte drehen, etwas hinzufügen.

ABSCHNITT IX.

Von der Bewegung der Körper in beweglichen Bahnen und der Bewegung der Apsiden.

§. 83. Aufgabe. Man soll bewirken, dass ein Körper in einer um das Centrum der Kräfte sich drehenden Bahn sich eben so bewegen könne, wie ein anderer Körper in derselben, aber ruhenden Bahn.

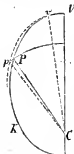


Fig. 89.

In der ihrer Lage nach gegebenen Bahn VPK bewegt sich der Körper P in der Richtung von V nach K. Vom Centrum C aus ziehe man

$$Cp = CP$$

und $\angle$ VCp proportional $\angle$ VCP;

alsdann wird die Fläche, welche Cp beschreibt, sich zu der VCP, welche zugleich CP beschreibt, verhalten wie die Geschwindigkeit der beschreibenden Linie Cp zu der von CP, d. h. wie

$$\angle VCp : VCP;$$

folglich im gegebenen constanten Verhältniss stehen und der Zeit proportional sein. Da die Fläche, welche Cp in der unbewegten Ebene beschreibt, der Zeit proportional ist; so kann offenbar der Körper, in Folge einer auf ihn einwirkenden angemessenen Centripetalkraft, zugleich mit dem Punkte p in jener Curve sich herumdrehen, welche dieser in dem bereits angegebenen Verhältniss in der ruhenden Ebene beschreibt. Man mache

$$\angle VCv = PCp$$
$$Cv = CV$$
$$\text{Figur } vCp = VCP$$

und es wird alsdann der stets in p befindliche Körper sich im Umfange der sich drehenden Figur vCp bewegen und in derselben Zeit den Bogen vp beschreiben, in welcher ein anderer Körper P den Bogen

$$VP \cong vp$$

in der ruhenden Figur VPK beschreiben kann.

Man suche daher nach §. 21., Zusatz 5. die Centripetalkraft, vermöge welcher der Körper in jener Curve, welche der Punkt p in der unbewegten Ebene beschreibt, sich bewegen könne, und die Aufgabe ist gelöst.

§. 84. Lehrsatz. Der Unterschied der Kräfte, durch deren eine ein Körper in einer ruhenden, durch deren andere ein zweiter Körper in derselben aber bewegten Bahn sich auf gleiche Weise bewegen kann, ist dem Cubus der gemeinschaftlichen Höhe umgekehrt proportional.

Es sei VP in der ruhenden Bahn $\cong$ vp in der bewegten
PK „ „ „ „ $\cong$ pk „ „ „
und dabei PK so klein als möglich

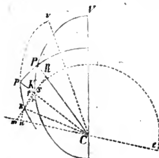


Fig. 90.

Man fälle von k auf pC das Perpendikel kr und verlängere dasselbe bis m, so dass

1. $mr : kr = \angle VCp : VCP.$

Da nun immer

$$PC = pC$$
$$KC = kC$$

also die Incremente oder Decremente von PC und pC einander gleich sind, so kann man (nach Gesetze, Zusatz 2.) die Bewegungen der Körper in P und p in zwei zerlegen, von denen die eine nach dem Centrum, also längs PC und pC, die andere nach den auf diese senkrechten Linien gerichtet ist. Die Bewegungen gegen das Centrum sind einander gleich, dagegen verhält sich

die transversale Bewegung von p : transversalen Bewegung von P $= \angle$ VCp : VCP, d. h. wie die Winkelbewegung von pC zu der von PC.

In derselben Zeit also, in welcher der Körper P, in Folge seiner beiden Bewegungen nach K gelangt, bewegt sich der Körper p mit gleicher Bewegung gegen das Centrum C, und befindet sich nach Verlauf jener Zeit irgendwo auf der Linie mkr, welche durch k geht und auf pC perpendikulär steht. Durch seine Transversal-Bewegung erreicht er einen Abstand von pC, welcher sich zu dem erreichten Abstande des Körpers P von PC verhält, wie die Transversal-Bewegung des erstern zu derjenigen des zweiten Körpers. Der Körper P befindet sich alsdann am Ende der Zeit im Abstande kr von pC, und da

$$mr : kr = \angle VCp : VCP$$

d. h. wie die Transversalbewegung von p zu derjenigen von P; so wird offenbar am Ende der Zeit p sich in m befinden. Dies verhält sich so, wenn P und p sich längs PC und pC bewegen und daher durch gleiche Kräfte längs dieser Linien angetrieben werden.

Man nehme nun

2. $\angle pCn : pCk = VCp : VCP$

und 3. $nC = kC;$

alsdann befindet sich der Körper p am Ende jener Zeit wirklich in n und wird durch eine **grössere** Kraft als P angetrieben, wenn nur

$$\angle nCp > kCp,$$

d. h. wenn die Bahn vpk sich vorwärts bewegt, oder sich rückwärts mit einer Geschwindigkeit, welche doppelt so gross als diejenige ist, mit welcher CP sich vorwärts bewegt; dagegen wird p durch eine **kleinere**

Kraft angetrieben, wenn die Bahn langsamer rückwärts schreitet. Der Unterschied der Kräfte ist nun Abstand mn der Orte, durch welchen der Körper p, vermöge jener Wirkung in jener Zeit sich fortbewegen muss, proportional.

Aus dem Centrum C denke man sich mit dem Radius

$$Cn = Ck$$

einen Kreis beschrieben, welcher die verlängerten Linien mr und mn in s und t schneidet; alsdann ist

$$4. \quad mn \,.\, mt = mk \,.\, ms, \text{ also } mn = \frac{mk \,.\, ms}{mt}.$$

Da die Dreiecke pCk und pCn bei gegebener Zeit der Grösse nach gegeben sind, so sind kr und mr oder auch ihre Summe ms und ihre Differenz mk umgekehrt der Höhe pC, also

mk . ms umgekehrt pC^2 proportional.

Ferner ist mt direct $\frac{1}{2}$ mt, d. h. pC proportional. Hier sind die ersten Verhältnisse der entstehenden Linien zu verstehen, und es ist daher

$$\frac{mk \,.\, ms}{mt} = mn$$

und der der letztern proportionale Unterschied der Kräfte umgekehrt proportional pC^3.

W. z. b. w.

Zusatz 1. Hiernach verhält sich der Unterschied der Kräfte in P und p oder in K und k zu der Kraft, vermöge welcher sich der Körper im Kreise von R nach k in derselben Zeit bewegen würde, in der der Körper P in der festen Bahn den Bogen PK beschreibt, wie

$$5. \quad mn : \sin.\text{vers}.\, RK = \frac{mk \,.\, ms}{mt} : \frac{rk^2}{2 \,.\, kC} = mk \,.\, ms : rk^2.$$

d. h. wenn man annimmt, wie $6. \quad F : G = \angle VCP : VCp$

$G^2 - F^2 : F^2$.[40])

Beschreibt man daher aus dem Centrum C mit irgend einem Radius

$$CP = Cp$$

einen Kreissector gleich der Fläche VPC, die der Körper P in irgend einer Zeit in der unbeweglichen Bahn beschrieben hat, so verhält sich der Unterschied der Kräfte, vermöge deren P in der festen und p in der beweglichen Bahn sich bewegen, zu derjenigen Centripetalkraft, vermöge welcher ein Körper jenen Sector gleichförmig in derselben Zeit beschreiben könnte, wie $G^2 - F^2 : F^2$.

Jener Sector und die Fläche pCk verhalten sich nämlich wie die Zeiten in denen sie beschrieben werden.

Zusatz 2. Ist VPK eine Ellipse deren Brennpunkt in C, obere Apside sich in V befindet, und ist die Ellipse

$$6. \quad vpk \cong VPK,$$

dergestalt, dass stets

$$7. \text{ und } \begin{cases} pC = PC \\ \angle VCp : VCP = G : F; \end{cases}$$

so setze man $PC = pC = A$, den Parameter der Ellipse $= 2R$, und es ist alsdann die Kraft, durch welche der Körper in der beweglichen Ellipse sich bewegen kann, proportional

$$\frac{F^2}{A^2} + \frac{R.G^2 - R.F^2}{A^3},$$

nnd nmgekehrt.

Drückt man nämlich die Kraft, vermöge welcher der Körper in der festen Ellipse sich bewegen kann, durch

$$8. \quad \frac{F^2}{A^2}$$

ans, so ist dieselbe im Pnnkte V

$$9. \quad = \frac{F^2}{CV^2}.$$

Die Kraft aber, vermöge welcher der Körper im Kreise vom Halbmesser CV mit derselben Geschwindigkeit, welche der in der Ellipse fortschreitende Körper in V hat, sich bewegen kann, verhält sich zu der Kraft, welche auf den letztern in der Apside V wirkt, wie der halbe Parameter der Ellipse zum Halbmesser des Kreises, also wie

$$R : CV;$$

mithin hat die obige Kraft (9.) die Intensität

$$10. \quad \frac{R \,.\, F^2}{CV^3}.$$

Die Kraft, welche sich zu dieser wie

$$G^2 - F^2 : F^2$$

verhält, ist

$$11. \quad = \frac{R \,.\, G^2 - R \,.\, F^2}{CV^3}$$

und dieselbe ist (nach Zusatz 1.) der Unterschied derjenigen Kräfte in V, vermöge welcher der Körper P sich in der festen und p in der beweglichen Ellipse bewegen kann. Nach dem vorliegenden Lehrsatze verhält sich dieser Unterschied in jeder andern Höhe A zu der in der Höhe CV stattfindenden, wie

$$12. \quad \frac{1}{A^3} : \frac{1}{CV^3};$$

also ist jener Unterschied in der Höhe A

$$13. \quad = \frac{R \,.\, G^2 - R \,.\, F^2}{A^3}.$$

Es ist also die ganze Kraft, vermöge welcher der Körper in derselben Zeit die bewegliche Ellipse vpk durchlaufen kann, proportional

$$14. \quad \frac{F^2}{A^2} + \frac{R \,.\, G^2 - R \,.\, F^2}{A^3}.$$

Zusatz 3. VPK hat als Ellipse ihren Mittelpunkt im Centrum C der Kräfte, und es wird vpk derselben congruent und concentrisch angenommen. Setzt man dann den Parameter $= 2R$, die grosse Axe $= 2T$ nnd ist stets (5.)

$$VCp : VCP = G : F;$$

so kann man auf dieselbe Weise schliessen, dass alsdann die Kräfte, vermöge welcher die Körper in gleichen Zeiten die feste und die bewegliche Ellipse durchlaufen können sich respective zu einander verhalten, wie 15. $\frac{A \cdot F^2}{T^3} : \frac{A \cdot F^2}{T^3} + \frac{R \cdot G^2 - R \cdot F^2}{T^3}$

Zusatz 4. Man bezeichne allgemein die grösste Höhe CV des Körpers durch T und den Krümmungshalbmesser der Bahn VPK in V, d. h. den Radius des gleichgekrümmten Kreises durch R. Die Centripetalkraft, vermöge welcher der Körper in der festen Ellipse VPK sich bewegen kann, bezeichne man im Punkte V durch

$$16. \quad \frac{F^2}{T^2} \cdot V,$$

in andern Orten P hingegen für CP = A, unbestimmt mit X und setze immer wie (Gl. 5.)

$$VCp : VCP = G : F.$$

Alsdann ist die Centripetalkraft, vermöge welcher der Körper in der kreisförmig bewegten Ellipse vpk in derselben Zeit sich bewegen kann, proportional der Summe der Kräfte:

$$17. \quad X + \frac{V \cdot R \cdot G^2 - V \cdot R \cdot F^2}{A^3}.$$

Zusatz 5. Ist daher die Bewegung eines Körpers in einer festen Bahn gegeben, so kann seine Winkelbewegung um das Centrum der Kräfte in einem gegebenen Verhältniss vergrössert oder verkleinert werden, und man kann so feste Bahnen finden, in denen die Körper vermöge neuer Centripetalkräfte sich bewegen.

Zusatz 6. Errichtet man auf der, der Lage nach gegebenen, geraden Linie CV das Perpendikel VP von unbestimmter Länge, zieht man PC und pC = PC, wie auch $\angle$ VCp : VCP in einem constanten Verhältniss; so ist die Kraft, vermöge welcher der Körper in jener Curve Vpk, worin p sich bewegt, sich bewegen kann, umgekehrt proportional

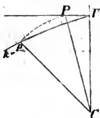


Fig. 91.

$$Cp^3.$$

Der Körper P kann nämlich vermöge der Kraft der Trägheit, wenn keine andere Kraft auf ihn wirkt, gleichförmig auf der geraden Linie VP fortschreiten. Fügt man im Centrum C eine Kraft hinzu, welche dem Cubus von CP oder Cp umgekehrt proportional ist; so wird (nach früherem Beweise) die geradlinige Bewegung in die krummlinige Vpk verändert. Diese letztere ist aber identisch mit jener Curve VPK, in §. 81., Zusatz 3., in welcher sich, wie wir ausgesprochen haben, Körper bewegen, die durch derartige Kräfte angezogen werden.

§. 85. Aufgabe. Man sucht die Bewegung der Apsiden von Bahnen, welche sehr nahe kreisförmig sind.

Die Aufgabe wird arithmetisch gelöst, indem man bewirkt, dass die Bahn, welche der Körper bei seiner Bewegung in der beweglichen Ellipse wie in Zusatz 2. und 3. des §. 84. in der festen Ebene beschreibt, der Form nach sich derjenigen Bahn nähere, deren Apsiden man sucht, und alsdann die Apsiden der Bahn bestimmt, welche der Körper in der festen Ebene beschreibt. Bahnen erhalten aber dieselbe Form, wenn die Centripetalkräfte, vermöge welcher sie beschrieben werden, unter einander verglichen, in gleichen Abständen proportional gemacht werden.

Es sei V die obere Apside und man setze

$$CV = T$$

einen andern Abstand $CP = Cp = A$

und den Unterschied der Abstände

$$1. \quad CV - CP = T - A = X.$$

Die Kraft, vermöge welcher ein Körper in der Ellipse um den Brennpunkt C (wie in §. 84., Zusatz 2.,) sich bewegt, ist proportional

$$2. \quad \frac{F^2}{A^2} + \frac{R.G^2 - R.F^2}{A^3} = \frac{A.F^2 + R.G^2 - R.F^2}{A^3}.$$

Setzt man nun im Zähler, nach Gl. 1.

$$A = T - X,$$

so wird die Centripetalkraft proportional

$$3. \quad \frac{R.G^2 - R.F^2 + T.F^2 - X.F^2}{A^3}.$$

Man reducire auf gleiche Weise jede andere Centripetalkraft auf einen Bruch, dessen Nenner A^3 ist, und setze, durch Vergleichung der homologen Glieder, die Zähler identisch gleich.

Beispiele werden die Sache klarer machen.

Beispiel 1. Gesetzt, die Centripetalkraft sei gleichförmig, also proportional

$$\frac{A^3}{A^3},$$

oder indem man im Zähler $A = T - X$ setzt,

$$\frac{T^3 - 3T^2X + 3TX^2 - X^3}{A^3};$$

alsdann erhält man, indem man die homologen Glieder, d. h. gegebene mit gegebenen und unbekannte mit unbekannten (in 3.) vergleicht:

$$\frac{R.G^2 - R.F^2 + T.F^2}{T^3} = \frac{-X.F^2}{-3X.T^2 + 3T.X^2 - X^3}$$ [41]

oder $$4. \quad \frac{R\ G^2 - R.F^2 + T.F^2}{T^3} + \frac{-F^2}{-3T^2 + 3T.X - X^2}.$$

Setzt man nun die Bahn sehr nahe kreisförmig, so wird

$$R = T \text{ und } X \text{ unendlich klein;}$$

die letzten Verhältnisse werden in diesem Falle:

$$R.G^2 : T^3 = -F^2 : -3T^2$$

oder $$G^2 : T^2 = F^2 : 3T^2$$

d. h. $$5. \quad G^2 : F^2 = 1 : 3.$$

Da nun $G : F = \angle VCp : VCP$, so wird

6. $\angle VCp : VCP = 1 : \sqrt{3}$.

Während also der Körper in der festen Ellipse, von der obern zur untern Apside herabsteigend, den Winkel

$$VCP = 180^0$$

zurücklegen würde, legt der zweite Körper in der beweglichen Ellipse, also auch in der festen, von der wir reden, den Winkel

$$VCP = \frac{180^0}{\sqrt{3}}$$

zurück. Dies geschieht, weil die Bahn, welche der Körper in Folge der gleichförmig wirkenden Centripetalkraft beschreibt, derjenigen Bahn ähnlich ist, welche er während seiner Bewegung in der sich drehenden Ellipse in der ruhenden Ebene beschreibt. Durch die obige Vergleichung der einzelnen Glieder werden diese Bahnen einander ähnlich gemacht, nicht im Allgemeinen, sondern nur, wenn sie sich der Kreisform nähern. Der Körper, welcher sich bei gleichförmiger Centripetalkraft in einer nahe kreisförmigen Bahn bewegt, beschreibt während des Weges von der obern zur untern Apside einen Winkel

$$\frac{180^0}{\sqrt{3}} = 103^0\ 55'\ 23''$$

am Mittelpunkte der Kräfte. Indem er nun von der untern zur obern Apside zurückkehrt, beschreibt er wiederum denselben Winkel u. s. w. f. in's Unendliche.

Beispiel 2. Setzen wir, dass die Centrifugalkraft irgend einer Potenz des Abstandes A, etwa

$$A^{n-3} = \frac{A^n}{A^3}$$

proportional sei, wo $n - 3$ und n irgend welche ganze oder gebrochene, rationale oder irretionale, positive oder negative Zahlen bezeichnen. Der Zähler $A^n = (T - X)^n$ wird nach unserer Methode der convergirenden Reihen.

7. $A^n = T^n - nXT^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} X^2 T^{n-2}$ etc.

Vergleicht man die Glieder dieses Zählers mit denen (3.) des andern

$$R.\ G^2 - R.\ F^2 + T.\ F^2 - F^2 X,$$

so erhält man

8. $(R.\ G^2 - R.\ F^2 + TF^2) : T^n = - F^2 : (- nT^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} X.\ T^{n-2}$ etc.)

Nimmt man die letzten Verhältnisse für den Fall, dass die Bahnen mit der Kreisform zusammenfallen, so erhält man:

$$R.\ G^2 : T^n = F^2 : nT^{n-1}$$

oder

$$G^2 : F^2 = T^{n-1} : nT^{n-1}$$

9. $G : F = 1 : \sqrt{n}$.

d. h. wie oben:

10. $\angle VCp : VCP = 1 : \sqrt{n}$.

Da nun der Winkel VCP, welcher während des Herabsteigens des Körpers von der obern zur untern Apside beschrieben wird, $= 180^0$ ist, so wird der Winkel VCp beim Herabsteigen des Körpers von der obern zur untern Apside in einer nahe kreisförmigen Bahn, welche der Körper vermöge einer der Potenz A^{n-3} proportionalen Centripetalkraft beschreibt

$$= \frac{180^0}{\sqrt{n}},$$

und eben so gross wird VCp bei der Rückkehr von der untern zur obern Apside u. s. w. f. in's Unendliche.

Ist die Centripetalkraft etwa dem Abstande des Körpers vom Centrum

$$A = \frac{A^4}{A^3}$$

proportional, so hat $n = 4$, $\sqrt{n} = 2$ und daher

$$VCp = 90^0.$$

Nach Zurücklegung des vierten Theils des ganzen Umlaufes gelangt daher der Körper zur untern Apside, nach Zurücklegung eines zweiten Viertels zur obern, u. s. w. f.

Dies ergieht sich auch aus §. 27. Der Körper bewegt sich nämlich in Folge dieser Centripetalkraft in einer festen Ellipse, deren Mittelpunkt im Centrum der Kräfte liegt. Ist nun die Centripetalkraft indirect der Entfernung, d. h. direct

$$\frac{1}{A} = \frac{A^2}{A^3}$$

proportional, so hat man $n = 2$, und den Winkel zwischen der obern und untern Apside

$$= \frac{180^0}{\sqrt{2}} = 127^0\ 16'\ 45''.$$

Der Körper wird daher, wenn er sich vermöge einer solchen Centripetalkraft herumbewegt, immer nach Zurücklegung dieses Winkels von der obern zur untern und von der untern zur obern Apside, ins Unendliche fort, gelangen.

Ist ferner die Centripetalkraft indirect

$$A^{11/4}, \text{ also}$$

direct

$$\frac{A^{1/4}}{A^3}$$

proportional; so ist $n = 1/4$, $\sqrt{n} = 1/2$, mithin der Winkel

$$VCp = \frac{180^0}{1/2} = 360^0.$$

Der Körper wird daher, wenn er von der obern zur untern Apside gelangt, einen ganzen Umlauf beschrieben haben, und dasselbe ist der Fall nach seiner Rückkehr von der untern zur obern Apside u. s. w. f.

Beispiel 3. Es seien m und n irgend welche Exponenten der Potenzen, b und c gegebene Zahlen, und setzen wir die Centripetalkraft proportional

$$\frac{b \cdot A^m + c \cdot A^n}{A^3} = \frac{b(T-X)^m + c(T-X)^n}{A^3}$$

entwickelt man nach der obigen Methode, so ist die Centripetalkraft proportional:

$$10.\quad \frac{bT^m - mbXT^{m-1} + \frac{m^2-m}{2}bX^2T^{m-2} + \text{etc.} + cT^n - ncXT^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}cX^2T^{n-2}\ \text{etc.}}{A^3}$$

Vergleicht man die Glieder dieser Zahlen mit den in 3. enthaltenen, so ergiebt sich

$$11.\quad (RG^2 - RF^2 + TF^2):(bT^m + cT^n) = -F^2:\left(-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \frac{m^2-m}{2}bXT^{m-2} + \frac{n^2-n}{2}cXT^{n-2}\ldots\right).$$

Nimmt man die letzten Verhältnisse, welche sich ergeben, wenn die Bahnen in die Kreisform übergehen so erhält man

$$12.\quad G^2 : bT^{m-1} + cT^{n-1} = F^2 : (mbT^{m-1} + ncT^{n-1}).$$

Versetzt man die innern Glieder, und bezeichnet nun die grösste Entfernung

$$CV = T$$

arithmetisch durch die Einheit so ergiebt sich

$$13.\quad \angle VCp : VCP = \sqrt{b+c} : \sqrt{mb+nc}.$$

Ist daher der Winkel VCP in der festen Ellipse zwischen der obern und untern Apside $= 180^0$,

so ist der Winkel VCp zwischen denselben Apsiden in derjenigen Bahn, welche der Körper vermöge einer der Zahl $\frac{bA^m + cA^n}{A^3}$ proportionalen Centripetalkraft beschreibt.

$$14.\quad = 180^0 \sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man diesen Winkel für eine, der Zahl

$$\frac{b\,.\,A^m - c\,.\,A^n}{A^3}$$

proportionale Centripetalkraft

$$15.\quad = 180^0 \sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}.$$

Eben so wird die Aufgabe in schwierigeren Fällen gelöst. Die Grösse, welcher die Centripetalkraft proportional ist, muss immer in convergirende Reihen aufgelöst werden, deren Nenner $= A^3$ ist. Hierauf muss man den gegebenen Theil dieses Zählers

$$R\,.\,G^2 - R\,.\,F^2 + T\,.\,F^2 - X\,.\,F^2$$

zu dem nicht gegebenen Theil in dasselbe Verhältniss stellen. Lässt man dann die überflüssigen Glieder fort und setzt man

$$T = 1;$$

so erhält man das Verhältniss

$$G : F.$$

Zusatz 1. Ist daher die Centripetalkraft irgend einer Potenz der Entfernung proportional, so kann man diese Potenz aus der Bewegung

der Apsiden finden, und umgekehrt. Verhält sich nämlich die ganze Winkelbewegung, nach welcher der Körper zu derselben Apside zurückkehrt, zur Winkelbewegung Eines Umlaufes, d. h. 360°, wie

$$m : n$$

und wird der Abstand = A gesetzt; so ist die Centripetalkraft

$$A^{\frac{n^2}{m^2} - 3}$$

proportional. Dies erhellt aus dem Beispiel 2.

Hieraus folgt, dass jene Kraft nicht in einem grössern Verhältniss als dem dreifachen der Entfernung abnehmen kann. Ein Körper, welcher sich vermöge einer solchen Kraft herumbewegte, würde von der obern Apside ausgehend, nie zur untern Apside und dem kleinsten Abstande sondern bis zum Centrum kommen, indem er die (§. 81., Zusatz 3.) besprochene Curve beschriebe. Ginge er hingegen von der untern Apside aus und begänne er ein Weniges aufzusteigen; so würde er nie zur obern Apside gelangen, sondern ins Unendliche fort steigen und die in demselben Zusatz und §. 84., Zusatz 6. besprochene Curve beschreiben.

Wenn ferner die Kraft vom Centrum ab in einem grösseren als dem dreifachen Verhältniss der Entfernung abnimmt, so wird ein Körper, wenn er von der obern Apside ausgehend ein wenig zu fallen anfängt, ins Unendliche fort fallen und umgekehrt ins Unendliche fort ansteigen, wenn er beim Ausgange von der untern Apside ein wenig zu steigen anfängt. Nimmt aber die Kraft in einem kleineren als dem dreifachen Verhältniss der Entfernung ab, oder wächst sie in irgend einem Verhältniss derselben, so wird der Körper niemals bis zum Centrum gelangen, sondern einmal die untere Apside erreichen. Umgekehrt, stösst der Körper beim wechselseitigen Auf- und Absteigen von der einen Apside zur andern niemals auf das Centrum, so wird die Kraft vom Centrum ab entweder wachsen, oder in einem kleinern als dem dreifachen Verhältniss abnehmen, und je schneller der Körper von der einen Apside zur andern gelangt, desto weiter ist das Verhältniss der Kräfte von jenem dreifachen entfernt.

Kehrt etwa der Körper im wechselnden Ab- und Aufsteigen nach

8, 4, 2 oder $1\frac{1}{2}$

Umdrehungen von der obern Apside zur untern Apside zurück, so verhält sich respective

$$m : n = 8 : 1$$
$$= 4 : 1$$
$$= 2 : 1$$
$$= {}^3/_2 : 1.$$

Mithin ist

$$\frac{n^2}{m^2} - 3 = {}^1/_{61} - 3$$
$$= {}^1/_{16} - 3$$
$$= {}^1/_4 - 3$$
$$= {}^4/_9 - 3$$

und die Kraft respective proportional

direct $A^{\frac{1}{64}-3}$, $A^{\frac{1}{16}-3}$, $A^{\frac{1}{4}-3}$, $A^{\frac{4}{9}-3}$ oder

indirect $A^{3-\frac{1}{64}}$, $A^{3-\frac{1}{16}}$, $A^{3-\frac{1}{4}}$, $A^{3-\frac{4}{9}}$.

Kehrt der Körper nach einzelnen Umdrehungen zu derselben festen Apside zurück, so ist

$$m : n = 1 : 1$$

also
$$A^{\frac{n^2}{m^2}-3} = A^{-2} = \frac{1}{A^2};$$

es steht also die Abnahme der Kräfte im doppelten Verhältniss des Abstandes, wie im Vorhergehenden bewiesen worden ist.

Kehrt der Körper nach

$$^3/_4,\ ^2/_3,\ ^1/_3 \text{ oder } ^1/_4$$

Umlauf zu derselben Apside zurück, so erhalten wir die bezüglichen Verhältnisse
$$m : n = {}^3/_4 : 1$$
$$= {}^2/_3 : 1$$
$$= {}^1/_3 : 1$$
$$= {}^1/_4 : 1$$
$$A^{\frac{n^2}{m^2}-3} = A^{\frac{16}{9}-3}$$
$$= A^{\frac{9}{4}-3}$$
$$= A^{9-3}$$
$$= A^{18-3}$$

und die Kraft proportional

indirect $A^{\frac{11}{9}}$, $A^{\frac{3}{4}}$, A^{-6}, A^{-13}

direct $A^{-\frac{11}{9}}$, $A^{-\frac{3}{4}}$, A^{6}, A^{13}.

Hat endlich der Körper, indem er von der obern zur untern Apside zurückkehrt, einen Umlauf und 3^0, die Apside also während Einer Umdrehung direct 3^0 zurückgelegt;[42]) so haben wir

$$m : n = 363 : 360$$

also
$$A^{\frac{n^2}{m^2}-3} = A^{-\frac{265707}{131769}}$$

Die Kraft ist mithin indirect proportional

$$A^{\frac{265707}{131769}} \text{ nahe} = A^{2+\frac{4}{243}};$$

sie nimmt daher in einem wenig grössern als dem zweifachen Verhältnisse des Abstandes ab, welches jedoch dem zweifachen um

$$\frac{4}{239} = \frac{100}{5975}$$

näher kommt, als dem dreifachen Verhältnisse.

Zusatz 2. Bewegt sich ein Körper vermöge einer Centripetalkraft, welche dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional ist,

in einer Ellipse, in deren Brennpuukt sich das Centrum der Kräfte befindet, und wird diese Centripetalkraft von aussen her um eine beliebige Kraft vergrössert oder verkleinert, so kann man (nach Beispiel 3) die Bewegung der Apsiden erkennen, welche durch jene äussere Kraft hervorgebracht wird, und umgekehrt.

Es sei jene Centripetalkraft

$$\frac{1}{A^2},$$

die von aussen her davon genommene Kraft

$$cA$$

proportional; die übrig bleibende also

$$\frac{1}{A^2} - cA = \frac{A - cA^4}{A^3}.$$

Alsdann ist nach Beispiel 3.

$$b = 1,\ m = 1,\ n = 4$$

und der Umdrehungswinkel zwischen beiden Apsiden

$$= 180^0 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}.$$

Setzt man jene äussere Kraft $= \frac{1}{357,45} = \frac{100}{35745}$ der ursprünglichen, d. h

$$c = \frac{100}{35745};$$

so wird $\quad 180^0 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}} = 180^0. \sqrt{\frac{35645}{35345}} = 180^0\ 45'\ 44''$

Der Körper gelangt, wenn er von der obern Apside ausgeht, nach einer Winkelbewegung von $\quad 180^0\ 45'\ 44''$

zur untern und nach einer doppelt so grossen zur obern Apside zurück. Mithin bewegt sich während Eines Umfanges die obere Apside direct um $\quad 1^0\ 31'\ 28''$.

Die Apside des Mondes bewegt sich ungefähr doppelt so geschwind. So weit über die Bewegung von Körpern in Bahnen, deren Ebenen durch das Centrum der Kräfte gehen; wir müssen noch die Bewegung in excentrischen Bahnen bestimmen.

Die Schriftsteller, welche die Bewegung schwerer Körper behandeln, pflegen sowohl das schiefe Auf- und Absteigen derselben zu beliebigen Ebenen, als auch das perpendikuläre zu betrachten. Mit gleichem Rechte betrachten wir die Bewegung der Körper, welche mit irgend einer Kraft nach dem Centrum streben, und derjenigen, welche in excentrischen Bahnen fortschreiten. Die Ebenen setzen wir höchst polirt und glatt voraus, damit die Körper keine Verzögerung erleiden. Wir werden selbst bei diesen Beweisen statt der Ebenen, auf denen die Körper liegen und welche sie aufliegend berühren, diesen parallele Ebenen annehmen, in denen die Mittelpunkte der Körper sich bewegen und während dieser Bewegung Bahnen beschreiben. Nach demselben Gesetze werden wir ferner die Bewegung von Körpern auf krummen Oberflächen bestimmen.

ABSCHNITT X.

Von der Bewegung der Körper auf gegebenen Oberflächen, und der Pendelbewegung.

§. 86. **Aufgabe.** Gegeben ist eine Centripetalkraft beliebiger Art, das Centrum der Kräfte und die Ebene, in welcher der Körper sich bewegt. Vorausgesetzt wird, dass man krummlinige Figuren quadriren könne; man sucht die Bewegung eines Körpers, welcher von einem gegebenen Orte, mit gegebener Geschwindigkeit und längs einer, in jener Ebene gegebenen, geraden Linie ausgeht.

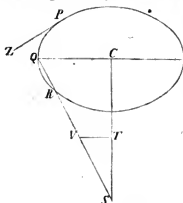


Fig. 92.

Es sei S das Centrum der Kräfte, SC die kleinste Entfernung desselben von der gegebenen Ebene, P der Ort, von welchem der Körper längs PZ ausgeht, Q derselbe in seiner Bahn sich bewegende Körper und PQR jene in der gegebenen Ebene beschriebene Bahn, welche gesucht wird. Man ziehe CQ und QS, und es sei SV der Centripetalkraft proportional, welche den Körper nach dem Centrum S hinzieht. Zieht man

$$VT \mp QC,$$

welche erstere die Linie CS in T schneidet, so wird die Kraft SV (nach Gesetze, Zusatz 2) in die Seitenkräfte ST und TV zerlegt, von denen ST, indem sie den Körper längs der auf die Ebene senkrechten Linie fortzieht, nichts in seiner Bewegung in der Ebene ändert. Die andere Kraft TV aber, welche längs der Ebene wirkt, zieht den Körper in derselben direct gegen den Punkt C und bewirkt, dass jener sich in dieser Ebene ebenso bewegt, als wenn die Kraft ST aufgehoben würde und der Körper, vermöge der Kraft TV allein, um das Centrum C sich im freien Raume bewegte. Ist aber die Centripetalkraft TV gegeben, vermöge welcher der Körper Q sich im freien Raume um das Centrum C bewegt; so erhält man nach §. 82. sowohl die Bahn PQR, welche beschrieben wird, also auch den Ort Q, in welchem der Körper sich zu einer beliebigen gegebenen Zeit befindet, und endlich die Geschwindigkeit desselben in jenem Orte Q, und umgekehrt.

§. 87. **Lehrsatz.** Vorausgesetzt, dass die Centripetalkraft dem Abstande des Körpers vom Centrum proportional sei, werden alle in be-

liebigen Ebenen sich bewegenden Körper Ellipsen beschreiben und dieselben in gleichen Zeiten durchlaufen. Körper aber, welche sich in geraden Linien hin- und her bewegen, werden die einzelnen Perioden eines Hin- und Herganges in gleichen Zeiten vollenden.

Unter denselben Voraussetzungen wie im vorigen §. ist die Kraft, durch welche der in der Ebene PQR sich bewegende Körper Q nach dem Centrum S hingezogen wird, dem Abstande SQ proportional. Da nun

$$SV : SQ = TV : CQ,$$

so ist die Kraft TV, welche den Körper gegen den in der Ebene der Bahn gelegenen Punkt C hinzieht, dem Abstande CQ proportional. Daher sind die Kräfte, durch welche die in der Ebene PQR befindlichen Körper gegen den Punkt C gezogen werden, nach Verhältniss der Abstände, gleich den Kräften, welche dieselben überall gegen das Centrum S hinziehen. Mithin bewegen sich die Körper in derselben Zeit, in denselben in der beliebigen Ebene PQR befindlichen Figuren um den Punkt C, in welcher sie sich im freien Raume um das Centrum S bewegen würden. Sie beschreiben daher (nach §. 27., Zusatz 2. und §. 78., Zusatz 2.) in stets gleichen Zeiten entweder Ellipsen in jener Ebene um das Centrum C, oder periodische geradlinige Bahnen, welche durch das Centrum C in jener Ebene gehen. W. z. b. w.

§. 88. **Anmerkung.** Hiermit verwandt ist das Auf- und Absteigen der Körper auf krummen Oberflächen.

Man denke sich in einer Ebene Curven beschrieben, und lasse dieselben sich um irgend welche durch das Centrum der Kräfte gehende Axen drehen, und so krumme Oberflächen beschreiben. Hierauf mögen die Körper sich so bewegen, dass ihre Mittelpunkte sich beständig auf diesen Oberflächen befinden. Steigen nun jene Körper schräg auf und ab und laufen sie dies- und jenseits, so werden diese Bewegungen in Ebenen ausgeführt, welche stets durch die Axe gehen, mithin auf krummen Linien, durch deren Umdrehung jene krumme Oberflächen erzeugt worden sind. In diesen Fällen genügt es daher, die Bewegung in diesen Curven zu betrachten.

§. 89. **Lehrsatz.** Ein Rad steht ausserhalb einer Kugel unter einem rechten Winkel auf derselben und rollt längs eines grössten Kreises fort. Die Länge des krummlinigen Weges, welche irgend ein auf der Peripherie des Rades gegebener Punkt von der Berührung an beschrieben hat, verhält sich alsdann zum doppelten Sinus versus des halben Bogens am Rade, der in der Zwischenzeit die Kegel berührt hat, wie die Summe der Durchmesser von Kugel und Rad zum Halbmesser der ersteren.

§. 90. **Lehrsatz.** Steht dagegen ein Rad innerhalb der Kugel unter einem rechten Winkel auf ihrem Umfange und beschreibt es beim Fortrollen längs eines grössten Kreises eine Curve, so verhält sich die Länge des Weges, welcher irgend ein auf der Peripherie des Rades gegebener Punkt seit der Berührung beschriebsn hat, zu dem doppelten

Sinus versus des halben entsprechenden Bogens am Rade, wie der Unterschied der Durchmesser von Kugel und Rad zum Halbmesser der ersteren.

Es sei ABL die Kugel, C ihr Mittelpunkt, BPV das auf ihr befindliche Rad, E der Mittelpunkt des letztern, B der Berührungspunkt und

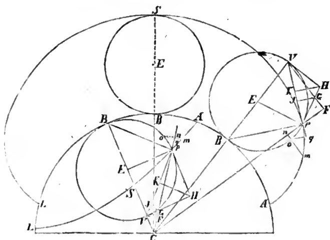


Fig. 93.

P ein auf der Peripherie des Rades gegebener Punkt. Man denke sich das Rad auf dem grössten Kreise ABL fortrollend, und zwar dergestalt, dass

$$\frown AB = BP$$

und jener Punkt P inzwischen den krummlinigen Weg AP beschreibt. Ist demnach der letztere beschrieben, seitdem das Rad die Kugel berührt hat, so soll sein

$$AP : 2 \text{ sin. vers. } {}^1/_2 \, PB = 2 \, CE : CB.$$

Trifft CE (nöthigenfalls verlängert) das Rad in V, so ziehe man

CP, BP, EP, VP

und fälle auf die verlängerte CP das Perpendikel VF. In V und P ziehe man die Tangenten VH und PH, welche sich in H schneiden, während die letztere VF in G begegnet, und fälle dann aus G und H auf PV die Perpendikel GJ und HK. Aus C als Mittelpunkt beschreibe man mit einem beliebigen Radius Co den Kreisbogen nom, welcher respective CP, BP und AP in

n, o und m

schneidet und hierauf aus V als Mittelpunkt mit dem Radius Vo den Bogen oq, welcher die Linie Vp oder deren Verlängerung in q schneidet.

Da das Rad bei seinem Fortrollen sich um den Berührungspunkt B dreht, so ist offenbar BP perpendikulär auf die Curve AP und daher

VP Tangente an der Curve im Punkte P.[43]) Wird der Radius des Bogens noch merklich vergrössert oder verkleinert, so wird er gleich CP, und da die verschwindende Figur

1. $Pn\,omq \sim PFG\,VJ$;

so wird das letzte Verhältniss der verschwindenden Linien

$Pm, Pn, Po, Pq,$

d. h. das Verhältniss der gleichzeitigen Incremente von

AP, CP und $\frown BP$

und das Decrement von VP,

respective identisch mit dem Verhältniss der Linien

$PV, PF, PG, PJ.$

Da aber VF perpendikulär auf CF, und ebenfalls VH senkrecht auf VC und so $\angle HVG = VCF$ ist;

da ferner (weil im Viereck HVEP, $\angle V = P = 90^0$)

$\angle VHP = 180^0 - VEP = CEP$:

so ist 2. $\triangle VHG \sim CEP$.

Wir haben daher die Proportion

$EP : CE = HG : HV = HG : HP = KJ : KP,$

und hieraus, weil $EP = EB$,

$CE - BE : CE = JP : PK$

$CB : CE = JP : KP$

oder auch 3. $CB : 2\,CE = JP : PV = Pq : Pm.$

Es verhält sich daher das Decrement der Linie VP, d. h. das Increment von $BV - VP$,[44]) zum Increment der Curve AP constant wie $CB : 2\,CE$;

deshalb stehen (nach §. 4., Zusatz) die durch dieselben erzeugten Längen $BV - VP$ und AP in demselben Verhältniss. Für BV als Radius ist aber

$VP = \cos BVP = \cos \frac{1}{2} BEP,$

mithin 4. $BV - VP = 1 - \cos \frac{1}{2} BEP = \text{sin vers. } \frac{1}{2} BEP$,

und in dem gegebenen Rade, dessen Radius $= \frac{1}{2} BV$, ist

5. $BV - VP = 2 \text{ sin vers. } \frac{1}{2} BEP.$

Somit ergiebt sich zuletzt die Proportion

$AP : 2 \text{ sin. vers. } \frac{1}{2} BP = 2\,CE : CB.$ W. z. b. w.

Die Linie AP werden wir aber, der Unterscheidung wegen, im ersteren Falle eine Cycloïde ausserhalb, im andern Falle eine Cycloïde innerhalb der Kugel[45]) nennen.

Zusatz 1. Beschreibt man die ganze Cycloïde ASL, und halbirt man dieselbe in S, so verhält sich die Curve PS zur Linie VP (welche letztere, für EB als Radius, gleich 2 sin VBP ist), wie

$2\,CE : CB.$

Das Verhältniss beider ist also constant.

Zusatz 2. Die Länge des halben Umfanges der Cycloïde oder AS verhält sich zum Durchmesser BV des Rades, wie

$2\,CE : CB.$

Zusatz 3. Jene Länge ist daher, wenn man den Halbmesser der Kugel als gegeben ansieht, proportional dem Rechteck

BE. EC.

§. 91. Aufgabe. Man soll bewirken, dass die Linie eines Pendels sich in einer gegebenen Cycloïde bewege.

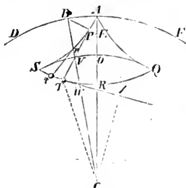


Fig. 94.

Innerhalb der Kugel QVS, deren Mittelpunkt in C liegt, wird die Cycloïde QRS als beschrieben angenommen. Diese wird in R halbirt und schneidet mit ihren Endpunkten Q und S auf beiden Seiten die Oberfläche der Kugel. Man ziehe die Linie CR, welche den Bogen QS in O halbirt, verlängere dieselbe bis A, so dass

1. CA : CO = CO : CR

werde und beschreibe aus C, mit CA als Halbmesser, die äussere Kugel ABD. Innerhalb der letzteren construire man mit einem Rade, dessen Durchmesser = AO, die beiden Halbcycloïden AQ und AS, welche die innere Kugel in Q und S berühren, die äussere in A schneiden. Von diesem Punkte A hänge an einem Faden APT, dessen Länge = AR, der Körper T herab, und schwinge so innerhalb der beiden Halbcycloïden AQ und AS, dass der Faden stets, so oft das Perpendikel von der perpendikulären Richtung abweicht, mit seinem obern Theile AP, sich auf die Halbcycloïde APS aufwickelt, gegen welche die Bewegung stattfindet. Der übrige Theil PT des Fadens, welcher mit der Cycloïde noch nicht in Berührung ist, dehne sich in eine gerade Linie aus; alsdann wird das Gewicht T auf der gegebenen Cycloïde QRS schwingen.

Der Faden PT schneide nämlich die Cycloïde QRS in T und den Kreis QOS in V, man ziehe CV, welche verlängert den Kreis ABD in B schneidet und errichte in den beiden Endpunkten P und T die Perpendikel PB und TW auf den geraden Theil des Fadens, welche Perpendikel CV in B und W schneiden. Aus der Entstehung der Cycloïde geht hervor, dass diese Perpendikel von CV die Längen

2. VB = OA und VW = OR

abschneiden, also B in den Kreis ABD fällt. Man hat daher

TP : VP = BW : BV

= BV + VW : BV

3. TP : VP = OA + OR : OA.

Aus Proportion 1. folgt

CA — CO : CO — CR = AO : OR = CA : CO,

mithin $OA + OR : AO = CA + CO : CA$

4. $OA + OR : AO = 2\,CE : CA$

Nach 3. und 4. wird also

5. $TP : VP = 2\,CE : CA$

wo 6. $VP = 2 \cdot {}^1/_2 BV \sin VBP$.

Ferner ist nach §. 90., Zusatz 1. $PT = PS$

7. $APT = APS$

d. h. nach §. 90., Zusatz 2. $APT = AR$.

Bleibt daher umgekehrt die Länge des Fadens immer $= AR$, so bewegt sich der Punkt T auf der Cycloïde QRS. W. z. b. w.

Zusatz. Der Faden AR ist gleich dem halben cycloïdischen Bogen APS und hat daher zum Radius AC der äussern Kugel dasselbe Verhältniss, welches die ihm ähnliche Cycloïde SR zum Radius CO der innern Kugel hat.

§. 92. Lehrsatz. Wenn die überall nach dem Mittelpunkte C der Kugel gerichtete Centripetalkraft in den einzelnen Orten den Abständen dieser vom Mittelpunkte proportional ist, und der Körper T, lediglich in Folge dieser Kraft, nach der eben beschriebenen Weise auf der Cycloïde QRS schwingt; so sind die Zeiten beliebiger ungleicher Schwingungen einander gleich.

Auf die unbestimmt verlängerte Tangente TW der Cycloïde fälle man das Perpendikel CX und ziehe CT. Da die Centripetalkraft, welche den Körper T gegen C hinzieht, dem Abstande CT proportional ist, so zerlege man erstere (nach Gesetze, Zusatz 2.) in die Seitenkräfte CX und TX. Die erstere von diesen treibt den Körper direct von P fort, und spannt so den Faden an, wird jedoch durch den Widerstand des letztern ganz aufgehoben. Die zweite treibt den Körper transversal gegen X, und beschleunigt direct seine Bewegung in der Cycloïde. Offenbar verhält sich die, dieser beschleunigenden Kraft proportionale, Beschleunigung in den einzelnen Momenten, wie die Länge TX, d. h. weil

$$YX : TW = CV : VW,$$

und $CV = CO$, $VW = OR$, also beide constant, wie TW, oder (nach §. 90, Zusatz 1.) wie der Bogen TR.

Bei zwei Pendeln APT und Apt, welche ungleichweit vom Perpendikel AR entfernt und zugleich losgelassen werden, sind ibre Beschleunigungen stets den zu durchlaufenden Bogen TR und tR proportional. Die im Anfange beschriebenen Theile verhalten sich aber wie die Beschleunigungen, d. h. wie die ganzen im Anfange zu beschreibenden Bogen; deshalb verhalten sich auch die übrig bleibenden Theile und die folgenden, diesen Theilen proportionalen, Beschleunigungen ebenfalls wie die ganzen Wege, u. s. w. f.

Es verhalten sich demnach die Beschleunigungen, also auch die erzeugten Geschwindigkeiten, ferner die mit diesen Geschwindigkeiten beschriebenen Theile und endlich die noch zu beschreibenden Theile stets wie die ganzen Bogen.

Die zu beschreibenden Theile, welche immer dasselbe Verhältniss zu einander behalten, werden daher gleichzeitig verschwinden. d. h. zwei schwingende Körper gelangen gleichzeitig znm Perpendikel AR. Da umgekehrt das Ansteigen der Pendel vom unterstem Orte R, wenn es mit rückwärts gerichteter Bewegung durch denselben cycloïdischen Bogen erfolgt, in den einzelnen Punkten durch dieselben Kräfte verzögert wird, welche das Herabsteigen beschleunigt haben; so leuchtet ein, dass die Geschwindigkeiten des Anf- nnd Absteigens durch dieselben Bogen einander gleich sind und daher letztere in gleichen Zeiten erfolgen.

Da beide Theile RS und RQ der Cycloïde, auf den zwei Seiten des Perpendikels liegend, einander congruent sind, so werden Pendel sowohl ihre ganzen Schwingungen, als anch ihre halben immer in denselben Zeiten znrücklegen. W. z. b. w.

Zusatz. Die den Körper T im beliebigen Orte T auf der Cycloïde beschleunigende oder verzögernde Kraft verhält sich znm ganzen Gewicht desselben Körpers im höchsten Orte S oder Q, wie

$$\sim TR : QR.$$

§. 93. Aufgabe. Man soll die Geschwindigkeit des Pendels in den einzelnen Orten nnd die Zeiten bestimmen, in welchen sowohl die ganzen Schwingungen, als einzelne Theile derselben zurückgelegt werden.

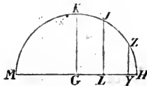


Fig. 95.

1. Aus einem beliebigen Mittelpunkte G beschreibe man mit einem Radius GH, welcher dem Bogen RS der Cycloïde (Fig. 94.) gleich ist, den Halbkreis HKM, der durch GK halbirt wird. Die der Entfernnng vom Centrum proportionale Centripetalkraft sei nach dem Mittelpnnkte G gerichtet nnd auf der Peripherie HJK der anf der Oberfläche der Kngel QOS nach deren Mittelpunkt gerichteten gleich. In derselben Zeit, in welcher das Pendel T von seinem höchsten Punkte S herabfällt, falle ein Körper L von H nach G. Da die Kräfte, welche die Körper im Anfange antreiben, einander gleich und den zu beschreibenden Wegen TR und GL stets proportional, daher wenn

$$TR = LG$$

in den Punkten T nnd L einander gleich sind; so ist es klar, dass jene Körper die gleichen Wege ST und HL im Anfange beschreiben, fortwährend dnrch gleiche Kräfte angetrieben werden nnd endlich stets gleiche Ränme beschreiben.

Nach §. 78. verhält sich daher die Zeit, in welcher der Körper den Bogen ST beschreibt, zu der Zeit einer ganzen Schwingung, wie der Bogen HJ (die Zeit, in welcher der Körper von H nach L gelangt) zum Halbkreis HKM (der Zeit, in welcher der Körper den Weg von H bis M znrücklegt

Ferner verhält sich die Geschwindigkeit des Pendels im Punkte T zu der im untersten Punkte R (d. h. die Geschwindigkeit des Körpers H im Punkte L zu derjenigen, welche er im Punkte G hat, oder das augenblickliche Increment der Linie HL zu dem der Linie HG, wenn die Bogen HJ und HK mit gleicher Geschwindigkeit zunehmen) wie

$$JL : GK, \text{ oder wie } \sqrt{SR^2 - TR^2} : SR. \text{ [46)]}$$

Da nun bei ungleichen Schwingungen in gleichen Zeiten Bogen beschrieben werden, welche den ganzen Schwingungsbogen proportional sind; so erhält man aus den gegebenen Zeiten sowohl die Geschwindigkeiten, als auch die beschriebenen Bogen.

2. Es mögen nun Pendel in ungleichen Cycloïden schwingen, welche zwischen verschiedenen Kugeln beschrieben sind, und ihre absoluten Kräfte ebenfalls verschieden sein. Die absolute Kraft, welche der beliebigen Kugel QOS entspricht, werde V genannt; alsdann wird die beschleunigende Kraft, durch welche das Pendel auf dem Umfange dieser Kugel angetrieben wird, indem es anfängt, sich direct gegen das Centrum zu bewegen, dem Abstande der Linse von jenem Centrum und der absoluten Kraft zusammengenommen, d. h.

$$CO. V$$

proportional sein. Die Linie HY, welche dieser beschleunigenden Kraft

$$CO. V$$

proportional ist, wird daher in der gegebenen Zeit beschrieben, und wenn man das Perpendikel YZ errichtet, welches die Peripherie in Z schneidet; so bezeichnet der entstehende Bogen HZ jene Zeit. Dieser Bogen ist aber proportional

$$\sqrt{GH. HY}, \text{ d. h. } \sqrt{GH. CO. V}. \text{ [47)]}$$

Daher wird die Zeit der ganzen Schwingung in der Cycloïde QRS (da sie direct der halben Peripherie HKM, welche jene ganze Schwingung bezeichnet und indirect dem Bogen HZ, welcher eine gegebene Zeit bezeichnet, proportional ist),

direct dem Halbmesser GH und

indirect $\sqrt{GH . CO . V}$,

d. h. weil $GH = SR$

$$\sqrt{\frac{SR}{CO. V}} \text{ oder (nach §. 91. Zusatz)}$$

$$\sqrt{\frac{AR}{AC. V}}$$

proportional sein.

Die Schwingungen, welche in Kugeln und Cycloïden bei beliebigen absoluten Kräften erfolgen, stehen daher in einem Verhältniss, welches aus dem halben directen der Fadenlänge, dem halben indirecten der Entfernung des Anfangspunktes vom Centrum und dem halben indirecten Verhältniss der absoluten Kraft zusammengesetzt ist.

Zusatz 1. Hiernach können auch die Zeiten der schwingenden, fallenden und sich herumdrehenden Körper mit einander verglichen werden. Setzt man nämlich den Durchmesser des Rades, durch welches die Cycloïde innerhalb der Kugel beschrieben wird, gleich dem Halbmesser der letzteren; so wird die Cycloïde eine gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Die Schwingung in der Cycloïde geht demnach in ein auf einander folgendes Auf- und Absteigen längs dieser geraden Linie über. Hiernach kennt man sowohl die Zeit des Herabsteigens von irgend einem Orte zum Centrum, als auch den ihr gleichen Zeitraum, innerhalb dessen bei gleichförmiger Umdrehung und in beliebigem Abstande ein Körper um den Mittelpunkt der Kugel einen Viertel-Umkreis zurücklegt. Es verhält sich nämlich diese Zeit (nach 2. Fall) zur Zeit der halben Oscillation in irgend einer Cycloïde QRS, wie

$$1 : \sqrt{\frac{AB}{AC}}.$$

Zusatz 2. Hieraus kann man ferner noch diejenigen Resultate ableiten, welche Wren und Huygens für die gewöhnliche Cycloïde gefunden haben. Vergrössert man nämlich den Durchmesser der Kugel bis ins Unendliche, so verwandelt sich ihre sphärische Oberfläche in eine ebene, und es wirkt die Centripetalkraft längs Richtungslinien, welche auf dieser Ebene senkrecht stehen; unsere Cycloïde geht daher in die gewöhnliche über. In diesem Falle wird die Länge des cycloïdischen Bogens zwischen jener Ebene und dem beschreibenden Punkte gleich dem vierfachen Sinus versus der Hälfte des Bogens am Rade zwischen derselben Ebene und dem beschreibenden Punkte, wie Wren gefunden hat. Ferner wird ein Pendel, welches sich zwischen zwei Cycloïden dieser Art befindet, in einer congruenten Cycloïde und in gleichen Zeiten schwingen; dies hat Huygens bewiesen. Auch das Herabfallen schwerer Körper in der Zeit Einer Schwingung wird so erfolgen, wie der Letztere angegeben hat.

Die von uns bewiesenen Sätze werden aber der wahren Beschaffenheit der Erde angepasst, in so fern als Räder, welche auf den grössten Kreisen derselben fortgehen, durch die Bewegung ihrer Felgen Cycloïden ausserhalb der Kugel beschreiben; Pendel aber, welche unterhalb der Erde in Gräben und Höhlen aufgehängt werden, in Cycloïden innerhalb der Kugel schwingen müssen. damit alle Schwingungen isochronisch werden. Denn die Schwere nimmt (wie im dritten Buche gezeigt werden wird) von der Oberfläche der Erde an aufwärts im doppelten Verhältniss des Abstandes vom Mittelpunkte, abwärts im einfachen Verhältniss desselben ab.

§. 94. Aufgabe. Unter der Voraussetzung, dass man Curven quadriren könne, werden die Kräfte gesucht, vermöge welcher Körper auf gegebenen Curven immer isochronisch schwingen.

Es schwinge der Körper T auf der beliebigen Curve STRQ, deren

Axe OR durch das Centrum C der Kräfte geht. Man zieht TX, welche die Curve im beliebigen Punkte T berührt und nehme auf dieser Tangente TY = TR.

Die Länge des Bogens TR kennt man nämlich durch die Quadrate der Curven nach den gewöhnlichen Methoden. In Y errichte man perpendikulär auf TX die Linie YZ und ziehe CT, welche das Perpendikel in Z schneidet; alsdann wird die Centripetalkraft der Linie TZ proportional. Wird nämlich die Kraft, welche den Körper von T gegen C zieht, durch die ihr proportionale Linie TZ ausgedrückt, so kann man sie in die beiden Seitenkräfte TY und YZ zerlegen. Die letztere, welche den Körper längs der Richtung PT des Fadens zieht, ändert nichts in seiner Bewegung, die andere Kraft TY aber beschleunigt oder verzögert direct seine Bewegung in der Curve STRQ. Da nun ferner diese Kraft dem zu beschreibenden Wege TR proportional ist, so verhalten sich die Beschleunigungen oder Verzögerungen in den zu beschreibenden proportionalen Theilen zweier Schwingungen (einer grösseren und einer kleineren) stets wie diese Theile; sie bewirken also, dass jene Theile zugleich beschrieben werden. Körper aber, welche den ganzen Wegen proportionale Theile in derselben Zeit beschreiben, beschreiben auch die ganzen Wege gleichzeitig. W. z. b. w.

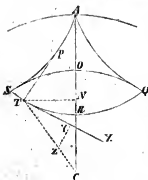


Fig. 96.

Zusatz 1. Hängt der Körper T an einem geradlinigen Faden AT vom Mittelpunkte A herab und beschreibt er so den Kreisbogen STRQ; so werden die Zeiten der einzelnen Schwingungen einander gleich, wenn er durch irgend eine Kraft nach parallelen Richtungslinien so abwärts gezogen wird, dass diese Kraft sich zur gleichförmigen Kraft der Schwere verhält, wie

$$\frown TR : \sin TR \quad (\sin TR = TN).$$

Da nämlich $TZ \mathrel{\#} AR$,
so ist $\triangle ANT \sim TYZ$
mithin $TZ : AT = TY : TN$.

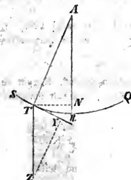


Fig 97.

Zusatz 2. Wenn daher in den Pendeluhren die, von Seiten der Maschine auf das Pendel zur Erhaltung der Bewegung einwirkenden Kräfte so mit der Kraft

der Schwere zusammengesetzt werden können, dass die ganze resultirende abwärts gerichtete Kraft

$$\frac{TR . AR}{\sin TR}$$

proportional wird, so werden alle Schwingungen isochronisch.

§. 95. Aufgabe. Es wird die Quadratur krummliniger Figuren vorausgesetzt; man sucht die Zeiten, in denen die Körper vermöge irgend einer Centripetalkraft auf beliebigen Curven auf- und absteigen, welche letztern in der durch das Centrum der Kräfte gehenden Ebene liegen.

Fig. 98.

Es steige ein Körper vom Punkte S aus längs der beliebigen Curve STtR, welche in der durch das Centrum C der Kräfte gehenden Ebene liegt, herab. Man ziehe CS, theile dieselbe in unzählige gleiche Theile, von denen Dd einer sei. Hierauf schlage man aus C als Mittelpunkt mit den Radien CD und Cd die Kreisbogen DT und dt, wodurch die Curve SR in T und t geschnitten wird. Aus dem bekannten Gesetz der Centripetalkraft und der Höhe CS, aus welcher der Körper gefallen ist, ergibt sich nach §. 79. die Geschwindigkeit desselben in irgend einer Höhe CT. Die Zeit aber, in welcher der Körper die kleine Linie Tt beschreibt, ist direct ihrer Länge d. h. der Secante tTC und indirect der Geschwindigkeit proportional. Dieser Zeit sei die, zur Abscissenaxe CS gehörige Ordinate DN proportional, also auch, weil Dd gegeben ist, die Zeit dem Producte Dd . DN,

d. h. dem Rechteck DNnd ebenfalls proportional. Ist daher PNn, die Curve, in welcher der Punkt N beständig liegt, QS auf CS perpendikulär ihre Asymptote; so wird die Fläche

SQPNDS

derjenigen Zeit proportional, in welcher der herabsteigende Körper die Curve ST beschreibt und bestimmt man jene Fläche, so erhält man auch die Zeit.

§. 96. Lehrsatz. Ein Körper bewegt sich auf einer beliebigen krummen Oberfläche, deren Axe durch das Centrum der Kräfte geht. Fällt man nun vom Körper ein Perpendikel auf die Axe und zieht man von einem andern Punkte derselben eine ihr parallele und gleiche Linie, so beschreibt diese eine der Zeit proportionale Fläche.

Es sei BSKL die krumme Oberfläche, T der auf ihr sich bewegende Körper, STtR der Weg, welchen der Körper auf ihr beschreibt,

Fig. 51.

S der Anfangspunkt dieses Weges, OMNK die Axe der krummen Oberfläche, TN das vom Körper auf die Axe gefällte Perpendikel. Ferner sei

OP ‡ und = TN

von dem auf der Axe gegebenen Punkte O gezogen, AP ein Theil der Bahn, welche der Punkt P in der Ebene AOP der beweglichen Linie OP beschreibt, A der Anfangspunkt dieser Bahn und dem Punkte S entsprechend. TC ist eine vom Körper nach dem Centrum gezogene Linie, TG ein Theil derselben und derjenigen Centripetalkraft proportional, durch welche der Körper nach dem Centrum hingezogen wird. TM ist eine gerade, auf die krumme Oberfläche perpendikulâre Linie, TJ derjenige Theil derselben, welcher dem Drucke, den der Körper auf die Oberfläche und umgekehrt ausübt, proportional ist. PHTF ist eine der Axe parallele und durch den Körper gehende Linie, endlich sind GF und JH Perpendikel, welche von den Punkten G und J auf diese Parallele gefällt sind.

Es soll die Fläche AOP, welche der Radius OP vom Anfang der Bewegung an beschrieben hat, der Zeit proportional sein. Die Kraft TG wird nämlich (nach Gesetze, Zusatz 2.) in die Seitenkräfte TF und FG, ebenso die Kraft TJ in die Seitenkräfte TH und JH zerlegt. Die Kräfte TF und TH wirken nun längs der auf die Ebene AOP senkrechten Wirkungslinie PF, und können die Bewegung des Körpers nur in Bezug auf diese Richtung ändern. Was dagegen die Bewegung des Körpers in dieser Ebene, d. h. die Bewegung des Punktes P, wodurch die Bahn AP beschrieben wird, betrifft; so ist es dasselbe, als ob die Kräfte TF und TH aufgehoben und der Körper nur durch die Kräfte FG und HJ angetrieben würde. Demnach ist dieser Fall identisch mit demjenigen, wo der Körper in der Ebene AOP, angetrieben durch eine nach dem Centrum O gerichtete und der Summe der Kräfte FG und HJ gleiche Centripetalkraft, die Curve AP beschriebe. In Folge einer solchen Kraft wird aber (nach §. 13.) die Fläche AOP der Zeit proportional beschrieben. W. z. b. w.

Zusatz. Auf dieselbe Art wird bewiesen, dass, wenn ein Körper von Kräften angetrieben wird, welche nach zwei oder mehreren Mittelpunkten auf der Linie CO gerichtet sind, und derselbe im freien Raume die Curve ST beschreiben würde, alsdann die Fläche AOP immer der Zeit proportional sein wird.

§. 97. Aufgabe. Vorausgesetzt wird die Quadratur krummliniger Figuren, und gegeben ist sowohl das Gesetz der nach einem be-

stimmten Centrum gerichteten Centripetalkraft, als auch die krumme Oberfläche, deren Axe durch jenes Centrum geht. Man sucht die Curve, welche der Körper auf derselben Fläche beschreiben wird, wenn er von einem gegebenen Punkte, mit gegebener Geschwindigkeit und nach einer bestimmten Richtung auf der Fläche ausgeht.

Bei derselben Construction wie im vorhergehenden §. geht der Körper T vom Orte S auf die zu findende Bahn STQR zu, deren Spur in der Ebene BOL die Curve AP sei. Aus der in der Höhe SC gegebenen Geschwindigkeit erhält man diese für irgend eine andere Höhe TC. Mit dieser Geschwindigkeit beschreibe der Körper in einer gegebenen sehr kleinen Zeit den kleinen Theil Tt seiner Bahn, desssen Spur in der Ebene AOP die Linie Pp sei. Man ziehe Op, und des kleinen, aus T mit Tt als Radius beschriebenen Kreises elliptische Projection auf die Ebene AOP sei die kleine Ellipse pQ. Da der Kreis Tt, sein Abstand TN = PO von der Axe gegeben ist, so kennt man jene Ellipse ihrer Form und Grösse nach, wie auch nach ihrer Lage gegen PO. Da ferner die Fläche POp der Zeit proportional, und folglich bei gegebener Zeit bekannt ist; so kennt man ∠ POp und Op ihrer Lage nach und so den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt p derselben mit der Ellipse, wie auch den Winkel OPp, unter welchem die Bahn APp die Linie OP schneidet. Hiernach findet man jene Bahn APp selbst nach derselben Methode, nach welcher in §. 81. die Curve VJKk aus ähnlichen Daten gefunden wurde. Errichtet man hierauf in den einzelnen Punkten P der Bahn Perpendikel PT auf der Ebene AOP, welche die krumme Oberfläche in T schneiden, so erhält man die einzelnen Punkte T der zu findenden Bahn.

ABSCHNITT XI.

Von der Bewegung kugelförmiger Körper, welche gegenseitig durch Centripetalkräfte zu einander hingezogen werden.

Bis jetzt habe ich die Bewegung solcher Körper auseinander gesetzt, welche nach einem unbeweglichen Centrum hingezogen werden, ein Fall, der kaum in der Natur existirt. Es pflegen nämlich Anziehungen auf Körper stattzufinden, jedoch sind die Wirkungen der ziehenden und der angezogenen Körper nach dem dritten Gesetze stets wechselseitig und einander gleich, so dass weder der anziehende noch der angezogene Körper ruhen kann, sondern, wenn ihrer zwei sind, beide (nach Gesetze, Zusatz 4.) sich gleichsam durch wechselseitige Anziehung um den ge-

meinschaftlichen Schwerpunkt drehen. Sind mehr Körper vorhanden (welche entweder durch einen einzigen angezogen werden oder einander wechselseitig anziehen, so müssen diese sich so bewegen, dass ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt entweder ruhet oder sich gleichförmig längs einer geraden Linie bewegt. Aus diesem Grunde fahre ich fort, die Bewegung von Körpern zu erklären, welche sich wechselseitig anziehen, indem ich die Centripetalkräfte als Anziehungen betrachte, obgleich sie vielleicht, wenn wir uns der Sprache der Physik bedienen wollen, richtiger Anstösse genannt werden müssten. Wir befinden uns nämich jetzt auf dem Gebiete der Mathematik und wir bedienen uns deshalb, indem wir physikalische Streitigkeiten fahren lassen, der uns vertrauten Benennung, damit wir von mathematischen Lesern um so leichter verstanden werden.

§. 98. Lehrsatz. Körper, welche sich gegenseitig anziehen, beschreiben sowohl um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt, als auch wechselweise um einen von beiden ähnliche Figuren.

Die Entfernungen vom gemeinschaftlichen Schwerpunkt verhalten sich nämlich umgekehrt wie die Körper, mithin stehen sowohl diese Entfernungen zu einander, als auch durch Zusammensetzung zur Entfernung beider Körper von einander im constanten Verhältniss. Diese Entfernungen werden nun um ihren gemeinschaftlichen Endpunkt durch eine gleiche Winkelbewegung geführt, weil die in gerader Entfernung von einander liegenden Körper ihre gegenseitige Neigung nicht ändern. Gerade Linien, welche zu einander im gegebenen Verhältniss stehen und durch gleiche Winkelbewegung um ihre Endpunkte geführt werden, beschreiben um dieselben Punkte (in Ebenen, welche zugleich mit diesen Endpunkten ruhen, oder um eine beliebige aber kleine Winkelbewegung ihre Lage verändern) ganz ähnliche Figuren. Mithin sind die Figuren, welche durch Herumführung dieser Abstände beschrieben werden, ähnlich. W. z. b. w.

§. 99. Lehrsatz. Ziehen sich zwei Körper durch irgend welche Kräfte gegenseitig an, und drehen sie sich inzwischen um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt; so kann mit denselben Kräften um den einen



Fig. 100.

als fest angenommenen Körper eine Figur beschrieben werden, die derjenigen congruent ist, welche jene beiden Körper bei der obigen Bewegung um einander beschreiben.

Es bewegen sich die Körper S und P um den gemeinschaftlichen

Schwerpunkt C herum respective in der Richtung von S nach T und von P nach Q. Von dem gegebenen Punkt s ziehe man

$$sp = \text{und} \mp SP$$

$$sq = \text{und} \mp TQ;$$

alsdann wird die Curve pqv, welche der Punkt p bei seiner Umdrehung um den festen Punkt s beschreibt, gleich und ähnlich der Curve, welche die Körper S und P wechselseitig um einander beschreiben. Ferner wird sie (nach §. 98.) ähnlich den Curven ST und PQV, welche dieselben Körper um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt C beschreiben. Diess ist der Fall, weil die Verhältnisse der Linien SC, CP und SP oder sp zu einander gegeben sind. Der gemeinschaftliche Schwerpunkt C wird (nach Gesetze, Zusatz 4.) entweder ruhen oder gleichförmig längs einer geraden Linie fortschreiten. Setzen wir nun als

1. Fall, dass er ruhe. In s und p mögen die zwei Körper aufgestellt werden, der unbewegliche in s, der bewegliche in p, beide den Körpern S und P gleich und ähnlich. PR und pr mögen die Curven PQ und pq in P und p berühren und man verlängere CQ und sq bis nach R und r. Da nun $CPRQ \backsim sprq$

so hat man $RQ : rq = CP : sp;$

folglich stehen die beiden vordern im constanten gegebenen Verhältniss. Wenn ferner die Kraft, durch welche der Körper P gegen den Körper S, also auch gegen den dazwischen liegenden Schwerpunkt C gezogen wird, zu der Kraft, durch welche der Körper p gegen das Centrum s gezogen wird, in demselben gegebenen Verhältniss stände; so würden diese Kräfte in gleichen Zeiten die Körper stets von den Tangenten PR und pr gegen die Bogen PQ und pq durch die ihnen proportionalen Zwischenräume RQ und rq hinziehen. Die zweite Kraft würde mithin bewirken, dass der Körper p auf der Curve pqv fortwanderte, welche der Curve PQV; auf der der Körper P vermöge der ersten Kraft sich bewegt, ähnlich ist, auch würden die Umläufe in denselben Zeiten ausgeführt werden. Allein jene Kräfte stehen zu einander nicht in dem Verhältniss

$$CP : sp,$$

sondern sind (weil $S \cong s$, $P \cong p$ und $SP = sp$) einander gleich; daher werden die Körper in gleichen Zeiten um gleiche Stücke von den Tangenten abgelenkt.

Da der zweite Körper p durch den grösseren Zwischenraum rq gezogen wird, so ist dazu eine grössere Zeit erforderlich, und zwar im halben Verhältniss der Zwischenräume, weil nach §. 10. die im Anfange beschriebenen Wege sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten. Man nehme daher an, dass die Geschwindigkeit des Körpers p zu der des Körpers P sich verhalte, wie $\sqrt{sp} : \sqrt{CP}$;

damit in Zeitintervallen, welche in demselben Verhältniss stehen, die Bogen PQ und pq beschrieben werden, die sich verhalten, wie

$$CP : sp.$$

Alsdann werden die Körper P und p, stets durch gleiche Kräfte ange-

zogen, um die ruhenden Mittelpunkte C und s die ähnlichen Figuren PQV und pqv beschreihen, von denen pqv derjenigen Figur congruent ist, welche der Körper P um den beweglichen Körper S beschreiht. W. z. b. w.

2. Fall. Setzen wir voraus, dass der gemeinschaftliche Schwerpunkt zugleich mit dem Raume, in welchem die Körper sich bewegen, gleichförmig und geradlinig fortschreite; alsdann werden (nach Gesetze, Zusatz 6.) alle Bewegungen in diesem Raume wie früher vollführt; folglich beschreiben die Körper gegenseitig um einander dieselben Figuren wie vorhin, welche daher der Figur pqv congruent sind. W. z. b. w.

Zusatz 1. Hiernach beschreihen zwei Körper, welche sich gegenseitig mit Kräften, die ihrem Abstande von einander proportional sind, anziehen (nach §. 27.) so wohl um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt, als auch gegenseitig um einander concentrische Ellipsen. Umgekehrt, werden solche Figuren beschrieben, so sind die Kräfte dem Abstande proportional.

Zusatz 2. Ferner beschreiben zwei Körper in Folge von Kräften, welche dem Quadrat ihres Abstandes umgekehrt proportional sind (nach §§. 29., 30. und 31.) so wohl um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt, als auch wechselseitig um einander Kegelschnitte, deren Brennpunkt sich in demjenigen Centrum der Kräfte hefindet, um welches die Figuren beschrieben werden. Werden umgekehrt solche Figuren beschrieben, so sind die Centripetalkräfte dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional.

Zusatz 3. Zwei beliebige Körper, welche sich um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt bewegen, beschreiben an den Radien vectoren, welche sowohl nach jenem Schwerpunkte, als auch wechselseitig nach den Körpern gezogen werden, der Zeit proportionale Flächenräume.

§. 100. Lehrsatz. Die Umlaufszeit zweier, um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt C sich herumbewegender, Körper S und P verhält sich zur Umlaufszeit des einen von beiden etwa P, der sich um den andern ruhenden S bewegt und eine Bahn beschreiht, welche denjenigen Figuren congruent ist, die beide Körper wechselseitig um einander beschreiben, wie

$$\sqrt{S} : \sqrt{S + P}.$$

Nach dem oben bewiesenen Satze verhalten sich nämlich die Zeiten, in denen die ähnlichen Bogen PQ und pq beschrieben werden, wie

$$\sqrt{CP} : \sqrt{SP} = \sqrt{CP} : \sqrt{sp}$$

d. h. wie

$$\sqrt{S} : \sqrt{S + P}.$$

Addirt man daher die ersten Verhältnisse, so zeigt sich, dass die Summe der Zeiten, in denen alle ähnliche Bogen PQ und pq, d. h. die Zeiten, in denen die ganzen ähnlichen Figuren beschrieben werden, im letzteren Verhältniss stehen. W. z. b. w.

§. 101. Lehrsatz. Zwei Körper S und P ziehen sich gegenseitig mit Kräften an, welche dem Quadrat ihres Abstandes umgekehrt proportional sind, und bewegen sich um ihren gemeinschaftlichen Schwer-

punkt. Es verhält sich alsdann die grosse Axe derjenigen Ellipse, welche der eine Körper P bei dieser Bewegung um den andern S beschreibt, zur grossen Axe der Ellipse, welche jener Körper P um den **ruhenden** Körper S in derselben Umlaufszeit beschreiben würde, wie

$$\sqrt[3]{S + P} : \sqrt[3]{S}.$$

Wären die beschriebenen Ellipsen einander gleich, so würden nach dem vorhergehenden §. die Umlaufszeiten sich verhalten, wie

$$\sqrt{S} : \sqrt{S + P}.$$

Bezeichnet man diese Zeiten durch T und t, die grossen Axen durch A und a, so wäre also für $A = a$,

$$1.\quad T : t = \sqrt{S} : \sqrt{S + P}.$$

Vermindert man die Umlaufszeit in der zweiten Ellipse in dem Verhältniss $\sqrt{S + P} : \sqrt{S}$,

so dass also, wenn die so zu suchende Umlaufszeit $= t'$ gesetzt wird

$$2.\quad t : t' = \sqrt{S + P} : \sqrt{S}$$

wäre, so wird nach 1. und 2. $T = t'$.

Bezeichnet man nun aber die neue Axe durch a', so ist nach §. 35.

$$a : a' = t^{2/3} : t'^{2/3}$$
$$= (S + P)^{1/3} : S^{1/3}$$

d. h. weil $a' = A$,

$$3.\quad a : A = \sqrt[3]{S + P} : \sqrt[3]{S}.\ \text{W. z. b. w.}$$

§. 103. **Lehrsatz.** Zwei Körper ziehen sich gegenseitig mit irgend welchen Kräften an, und bewegen sich auf beliebige Weise, ohne anderweitig weder angetrieben noch gehindert zu werden. Unter diesen Umständen werden ihre Bewegungen sich so verhalten, als wenn sie **nicht** wechselseitig sich anzögen, sondern beide durch einen dritten, im gemeinschaftlichen Schwerpunkt befindlichen, Körper mit denselben Kräften angezogen würden. Für die anziehenden Kräfte wird ferner dasselbe Gesetz stattfinden, sowohl in Bezug auf den Abstand der Körper vom gemeinschaftlichen Schwerpunkte, als ihren gegenseitigen Abstand von einander.

Jene Kräfte, mit welchen die Körper sich wechselseitig anziehen, sind nach ihnen selbst und daher auch nach dem zwischen ihnen liegenden gemeinschaftlichen Schwerpunkte gerichtet; sie stellen sich daher so dar, als ob sie von einem zwischen liegenden Körper ausgingen.

Ferner ist das Verhältniss des Abstandes eines jeden Körpers von ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte zu ihrem gegenseitigen Abstande gegeben, man kennt daher auch das Verhältniss einer jeden Potenz des ersteren Abstandes zu derselben Potenz des zweiten, wie auch das Verhältniss einer jeden Grösse, welche aus Einem Abstande und gegebenen Grössen auf beliebige Weise abgeleitet wird, zu einer andern Grösse, welche aus dem andern Abstande und eben so vielen gegebenen Grössen, die dasselbe Verhältniss der Entfernungen wie die erstern haben, auf ähnliche Weise abgeleitet wird.

Wenn daher die Kraft, durch welche der eine Körper vom andern angezogen wird, sich direct oder indirect wie der gegenwärtige Abstand der letztern, oder wie irgend eine Potenz desselben oder endlich wie eine beliebige, aus diesem Abstande und gegebenen Grössen irgend wie abgeleitete, Grösse verhält; so wird die Kraft, durch welche der Körper nach dem gemeinschaftlichen Schwerpunkte hingezogen wird, sich ebenfalls direct oder indirect wie der Abstand des angezogenen Körpers vom gemeinschaftlichen Schwerpunkte, oder wie dieselbe Potenz dieses Abstandes oder endlich wie die, aus diesem Abstande und analogen gegebenen Grössen ähnlich abgeleitete, Grösse verhalten. Mithin findet für die anziehende Kraft dasselbe Gesetz in Bezug auf beide Abstände statt. W. z. b. w.

§. 103. Aufgabe. Zwei Körper ziehen sich gegenseitig mit Kräften an, welche dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional sind und werden aus gegebenen Orten losgelassen; man soll ihre Bewegungen bestimmen.

Die Körper bewegen sich nach dem letzten §. so, als ob sie durch einen dritten, im gemeinschaftlichen Schwerpunkte befindlichen, Körper angezogen würden. Da nun dieser Schwerpunkt (nach der Voraussetzung) im Anfange der Bewegung ruhet, so wird er (nach Gesetze, Zusatz 4.) stets in Ruhe bleiben. Man hat daher die Bewegung der Körper (nach §. 76.) so zu bestimmen, als ob sie durch Kräfte angetrieben würden, welche nach jenem Schwerpunkte gerichtet sind und erhält so die Bewegung der sich gegenseitig anziehenden Körper.

§. 104. Aufgabe. Zwei Körper ziehen sich wechselseitig mit Kräften an, welche dem Quadrat ihrer Entfernung umgekehrt proportional sind; sie gehen ferner von gegebenen Orten, nach gegebenen Richtungen und mit gegebenen Geschwindigkeiten aus; man soll ihre Bewegungen bestimmen.

Aus der beim Anfange gegebenen Bewegung der Körper kennt man die gleichförmige Bewegung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes, wie auch die gleichförmige und geradlinige Bewegung, welche der Raum gleichzeitig mit dem Schwerpunkte annimmt und endlich die anfängliche Bewegung der Körper in Bezug auf diesen Raum. Die folgenden Bewegungen geschehen aber (nach Gesetze, Zusatz 5. und §. 102.) in diesem Raume so, als ob der letztere selbst mit jenem Schwerpunkte ruhete und die Körper nicht gegenseitig sich anzögen, sondern durch einen dritten, im gemeinschaftlichen Schwerpunkt befindlichen Körper angezogen würden. Die Bewegung des einen von diesen beiden Körpern in diesem beweglichen Raume, welcher erstere von einem gegebenen Orte, nach gegebener Richtung und mit gegebener Geschwindigkeit ausgeht, und zugleich durch eine nach dem Schwerpunkte gerichtete Centripetalkraft ergriffen wird, muss nach §§. 37. und 77. bestimmt werden; man erhält dann zugleich die Bewegung des andern Körpers. Mit dieser Bewegung muss man die oben gefundene zusammensetzen, welche gleichförmig für

das aus dem Raume und den darin befindlichen Körpern zusammengesetzte System stattfindet, und erhält so die absolute Bewegung der Körper im unbeweglichen Raume.



Fig. 101.

§. 105. **Aufgabe.** Die Kräfte mit denen die Körper sich gegenseitig anziehen, wachsen im einfachen Verhältniss ihrer Abstände von den Schwerpunkten; man sucht die Bewegung mehrerer Körper unter sich.

Man nehme zuerst zwei Körper T und L an, deren gemeinschaftlicher Schwerpunkt in D liegt. Dieselben werden nach §. 99., Zusatz 1. Ellipsen beschreiben, deren Mittelpunkte sich in D befinden und deren Grösse aus §. 27. folgt.

Nun ziehe ein dritter Körper S die beiden erstern mit den beschleunigenden Kräften ST und SL an und werde umgekehrt durch sie angezogen. Die Kraft ST wird (nach Gesetze, Zusatz 2.) in die Seitenkräfte SD und DT, ebenso die Kraft SL in SD und DL zerlegt. Die Kräfte DT und DL sind ihrer Summe proportional, also den beschleunigenden Kräften, mit denen die Körper T und L einander anziehen. Addirt man sie zu den Kräften der Körper T und L, die erste zur ersten und die zweite zur zweiten, so erhält man Kräfte, welche den Abständen DT und DL proportional, aber grösser als die frühern sind. Dieselben bewirken daher (nach §. 27., Zusatz 1. und §. 18., Zusatz 1. und 8.), dass jene Körper wie früher Ellipsen beschreiben, aber mit grösserer Geschwindigkeit. Die übrigen beschleunigenden Kräfte SD und SD ziehen mit den, den Körpern proportionalen, bewegenden Kräften

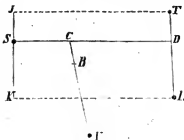


Fig. 102.

SD . T und SD . L

jene Körper gleich und längs der Linien JT und KL an, welche beide Linien parallel SD sind, und sie ändern nichts in ihrer gegenseitigen Lage, sondern bewirken nur, dass beide Körper sich gleichmässig der Linie JK, welche durch die Mitte des Körpers S auf SD perpendikulär gezogen ist, nähern. Man verhindert aber diese Annäherung an die Linie JK dadurch, dass man das System der Körper T und L einerseits und den Körper S andererseits mit angemessenen Geschwindigkeiten um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt C wandern lässt. Auf diese Weise beschreibt der Körper S (dadurch, dass er vermöge der Summe der bewegenden Kräfte SD.T und SD.L, welche der Entfernung CS proportional sind, gegen den Schwerpunkt C gezogen wird) eine Ellipse um denselben Punkt C, der Punkt D beschreibt aber, wegen der proportio-

nalen CS und CD, eine ähnliche Ellipse. Die Körper T und L, welche durch die bewegenden Kräfte SD.T und SD.L (der erste durch die erste, der zweite durch die zweite) gleich und längs der parallelen Linien TJ und LK, wie bemerkt, angezogen werden, fahren (nach Gesetze, Zusatz 5. und 6.) fort, um den beweglichen Punkt D ihre Ellipsen wie früher zu beschreiben.

Nun füge man einen vierten Körper V hinzu, alsdann findet man durch eine ähnliche Schlussfolge, dass dieser und der Punkt C um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt B aller Körper Ellipsen beschreiben, indem die Bewegungen der früheren Körper T, L und S um die Punkte D und C ebenfalls fortdauern, jedoch mit etwas grösserer Geschwindigkeit. Nach derselben Methode kann man noch mehrere Körper hinzufügen.

Dies verhält sich so, wenn auch die Körper T und L sich gegenseitig mit grösseren oder kleineren Kräften als die übrigen Körper, nach Verhältniss der Abstände, anziehen. Es mögen sich nun die gegenseitigen beschleunigenden Anziehungen aller Körper zu einander verhalten, wie die nach den anziehenden Körpern gezogenen Entfernungen, alsdann leitet man aus dem Vorhergehenden leicht ab, dass alle Körper in gleichen Umlaufszeiten verschiedene Ellipsen um den allen gemeinschaftlichen Schwerpunkt B und in einer festen Ebene beschreiben.

§. 106. Lehrsatz. Mehrere Körper, deren Kräfte wie die Quadrate der Entfernungen von ihren Schwerpunkten abnehmen, können sich sehr nahe in Ellipsen bewegen und mit den nach den Brennpunkten gezogenen Radien vectoren Flächenräume beschreiben, welche den Zeiten sehr nahe proportional sind.

Im vorhergehenden Paragraphen wurde der Fall bewiesen, in welchem mehrere Bewegungen genau in Ellipsen ausgeführt werden. Je mehr das Gesetz der Kräfte von dem dort vorausgesetzten abweicht, desto mehr werden die Körper ihre gegenseitigen Bewegungen stören, und solche Körper, welche nach dem hier vorausgesetzten Gesetze sich gegenseitig anziehen, können sich nur dann genau in Ellipsen bewegen, wenn sie ein bestimmtes Verhältniss in ihren gegenseitigen Entfernungen beibehalten. In den folgenden Fällen wird die Bahn nicht sehr von einer Ellipse abweichen.

Erster Fall. Gesetzt, dass mehrere kleine Körper um irgend einen sehr grossen, in verschiedenen Abständen von demselben sich bewegen und nach den einzelnen Körpern absolute Kräfte gerichtet sind, welche denselben Körpern proportional angenommen werden. Da der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller (nach Gesetze, Zusatz 4.) entweder ruhen oder sich gleichförmig längs einer geraden Linie bewegen wird, so wollen wir uns die kleinen Körper so gering vorstellen, dass der grösste Körper niemals merklich von diesem Schwerpunkte abstehen wird. Jener wird alsdann ohne bemerkbaren Fehler entweder ruhen, oder sich gleichförmig längs einer geraden Linie bewegen; die kleineren Körper aber

werden sich um den grossen in Ellipsen bewegen und mit den nach demselben gezogenen Radien vectoren Flächenräume beschreiben, welche den Zeiten proportional sind; wofern nämlich nicht durch den Abstand des grössten Körpers vom gemeinschaftlichen Schwerpunkte oder durch die gegenseitigen Wirkungen der kleinen Körper auf einander Störungen hervorgebracht werden. Die kleineren Körper können aber so weit verkleinert werden, bis jener Abstand und die gegenseitigen Wirkungen kleiner werden, als irgend welche gegebene Grössen und bis die Bahnen gleichen Flächeninhalt mit Ellipsen erhalten. Alsdann werden die Flächenräume den Zeiten entsprechen, ohne einen Fehler, der nicht kleiner sei, als jede gegebene Grösse.

Zweiter Fall. Denken wir uns ein System kleiner Körper, welche sich auf die eben beschriebene Weise um einen sehr grossen bewegen, und irgend ein anderes System zweier um einander sich bewegender Körper, welches gleichförmig längs einer geraden Linie fortschreitet, und durch die Kraft des andern, bei weitem grössten und in bedeutender Entfernung befindlichen Körpers seitwärts gedrängt werde. Da gleiche beschleunigende Kräfte, durch welche Körper längs paralleler Linien getrieben werden, die gegenseitige Lage der Körper nicht verändern, sondern bewirken, dass das ganze System, mit Beibehaltung der Bewegung seiner Theile unter sich, zugleich fortbewegt wird; so wird offenbar aus den Anziehungen gegen den grössten Körper durchaus keine Aenderung in der Bewegung der angezogenen Körper unter sich entstehen; ausser entweder aus der Ungleichheit der beschleunigenden Anziehungen oder aus der gegenseitigen Neigung der Linien, längs welcher die Anziehungen stattfinden.

Man setze daher voraus, dass alle beschleunigenden Anziehungen gegen den grössten Körper den Quadraten der Entfernung von demselben umgekehrt proportional seien und vergrössere alsdann den Abstand des grössten Körpers so weit, dass die Unterschiede und gegenseitigen Neigungen der nach den übrigen Körpern gezogenen Linien kleiner werden, als irgend eine angebbare Grösse. Alsdann wird die Bewegung der Theile des Systemes unter sich fortdauern, ohne einen Fehler, welcher nicht kleiner wäre, als eine beliebige gegebene Grösse. Da ferner, wegen des geringen Abstandes jener Theile von einander, das ganze System nach der Weise Eines Körpers angezogen wird; so wird dasselbe sich auch vermöge dieser Anziehung wie ein einziger Körper bewegen, d. h. es wird mit seinem Schwerpunkt um den grössten Körper irgend einen Kegelschnitt (eine Hyperbel oder Parabel bei schwächerer, eine Ellipse bei stärkerer Anziehung) beschreiben. Ferner werden die nach dem grössten Körper gezogenen Radien vectoren den Zeiten proportionale Flächenräume beschreiben, ohne andere Fehler als diejenigen, welche die Abstände der Theile (die allerdings sehr klein und nach Belieben zu vermindern sind) zu bewirken vermögen.

Auf ähnliche Weise kann man zu zusammengesetzteren Fällen bis in's Unendliche fortschreiten.

Zusatz 1. Je mehr im zweiten Falle der grösste Körper dem Systeme von zwei oder mehreren anderen Körpern sich nähert, desto mehr werden die Bewegungen der Theile des Systemes unter sich gestört, weil jetzt die Neigung der von ihnen nach dem grössten Körper gezogenen Linien grösser und letztere ungleicher werden.

Zusatz 2. Am meisten werden sie aber gestört, wenn man voraussetzt, dass die beschleunigenden Anziehungen der Theile des Systems gegen den grössten Körper sich nicht umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen von diesem verhalten; besonders, wenn die Ungleichheit dieser Kräfte grösser ist, als die der Abstände vom grössten Körper. Wenn nämlich die beschleunigende Kraft, indem sie gleich und längs paralleler Linien wirkt, die Bewegung der Körper unter sich stört, so muss nothwendig aus der ungleichen Wirkung eine Störung hervorgehen, welche desto grösser oder kleiner sein wird, je mehr oder weniger jene Wirkung variirt. Der Ueberschuss der grösseren Impulse, welcher auf die einen Körper wirkt, auf die andern aber nicht, muss nothwendig die Lage derselben gegen einander ändern. Fügt man diese Störung zu derjenigen hinzu, welche aus der Neigung und Ungleichheit der Linien hervorgeht, so wird die ganze Störung grösser.

Zusatz 3. Bewegen sich demnach die Theile dieses Systems ohne besondere Störung in Ellipsen oder Kreisen, so können dieselben durch beschleunigende Kräfte, welche nach andern Körpern gerichtet sind, entweder nur sehr leicht, oder sehr nahe gleich und längs paralleler Linien angetrieben werden.

§. 107. Lehrsatz. Drei Körper, deren anziehende Kräfte wie die Quadrate der Entfernung abnehmen, ziehen sich gegenseitig an, und die beschleunigenden Anziehungen zweier von ihnen gegen den dritten verhalten sich zu einander umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen. Ferner bewegen sich die beiden kleineren Körper um den dritten in der gemeinschaftlichen Ebene. Unter diesen Umständen wird der innere Körper um den innersten und grössten mit den nach ihm gezogenen Radien vectoren näher der Zeit proportionale Flächen und eine Figur beschreiben, welche einer Ellipse, deren Brennpunkt im Durchschnitt der Radien liegt, näher kommt, wenn der grösste Körper durch diese Anziehungen angetrieben wird, als wenn derselbe von den kleineren Körpern nicht angezogen würde und ruhete, oder wenn er, entweder weit mehr oder weit weniger angezogen, zugleich weit mehr oder weit weniger angetrieben würde.

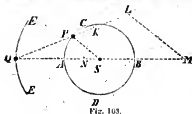


Fig. 103.

Dies ist nahezu aus §. 106., Zusatz 2. klar, durch einen be-

stimmten und weiter sich erstreckenden Beweis wird die Wahrheit jedoch folgendermaassen dargethan.

Erster Fall. Es drehen sich die kleineren Körper P und Q in derselben Ebene mit den grössten S und zwar beschreibt P die innere Bahn PAB, Q die äussere EQE. Es sei QK die mittlere Entfernung der Körper P und Q, und es werde die beschleunigende Anziehung des Körpers P gegen Q in jener mittleren Entfernung durch dieselbe Linie ausgedrückt. Nimmt man

$$QL : QK = QK^2 : QP^2,$$

so wird QL die beschleunigende Anziehung des Körpers P gegen Q in der beliebigen Entfernung QP sein. Man ziehe PS und

$$LM \mp PS,$$

welche erstere die verlängerte QS in M schneidet, alsdann wird die Anziehung QL (nach Gesetze, Zusatz 2.) in die Anziehungen QM und LM zerlegt.

Demnach wird der Körper P durch eine dreifache beschleunigende Anziehung angetrieben, indem eine nach S gerichtete aus der gegenseitigen Anziehung der Körper S und P hervorgeht. Vermöge der letzten Kraft allein müsste der Körper P um den, entweder unbewegten oder durch diese Anziehung fortgetriebenen, Körper S sowohl der Zeit proportionale Flächenräume, als auch eine Ellipse beschreiben, deren Brennpunkt in S läge. Dies geht aus §. 29. und §. 99., Zusätzen 2. und 3. hervor.

Die zweite anziehende Kraft ist LM. Dieselbe ist von P. nach S gerichtet und fällt daher mit der vorigen, indem man sie hinzuaddirt, zusammen. Sie wird daher nach §. 99., Zusatz 3., bewirken, dass auch jetzt die Flächen den Zeiten proportional beschrieben werden. Da sie aber nicht dem Quadrat des Abstandes PS umgekehrt proportional ist, wird sie mit der ersten Kraft eine neue zusammensetzen, welche desto mehr von dieser Proportionalität abweicht, je grösser unter übrigens gleichen Umständen das Verhältniss der Kraft LM zur ersten ist. Da ferner (nach §. 33., Zusatz 1. und §. 99., Zusatz 2.) die Kraft, durch welche eine Ellipse um den Brennpunkt S beschrieben wird, nach diesem gerichtet und dem Quadrat des Abstandes PS umgekehrt proportional sein muss; so wird jene zusammengesetzte Kraft, weil sie dieser Proportion nicht entspricht, bewirken, dass die Bahn PAB von einer Ellipse zum Brennpunkt S abweicht. Diese Abweichung wird desto grösser sein, je mehr jene Kraft von dieser Proportionalität entfernt ist, d. h. je grösser, unter übrigens gleichen Umständen, das Verhältniss der Kraft LM zur ersten ist. Nun aber zieht ferner die dritte Kraft QM den Körper längs einer QS parallelen Linie und aus ihrer Zusammensetzung mit den beiden früheren entspringt eine neue Kraft, welche nicht mehr von P gegen S gerichtet ist, und von dieser Richtung desto mehr abweicht, je grösser unter übrigens gleichen Umständen das Verhältniss der dritten Kraft zu den beiden erstern ist. Sie wird dadurch bewirken,

dass der Körper P am Radius vector SP nicht mehr der Zeit proportionale Flächen beschreibt, und dass die Abweichnng von dieser Proportionalität desto grösser ansfällt, je grösser das Verhältniss dieser dritten Kraft zu den übrigen ist. Die Abweichnng der Bahn PAB von der oben erwähnten Ellipse wird durch diese dritte Kraft aus einer doppelten Ursache vermehrt werden, sowohl weil sie nicht von P nach S gerichtet, als auch weil sie nicht dem Quadrat des Abstandes PS umgekehrt proportional ist. Dennoch werden die Flächenräume am meisten den Zeiten proportional, wenn die dritte Kraft möglichst klein ist, ohne dass die beiden andern sich ändern. Die Bahn PAB wird sich am meisten der erwähnten elliptischen Form nähern, wenn sowohl die zweite, als auch die dritte Kraft, besonders aber die letztere möglichst klein wird, während die erste Kraft unverändert bleibt.

Die beschleunigende Anziehung des Körpers S gegen Q werde durch die Line QN ausgedrückt. Wären nnn die beschleunigenden Anziehungen QM nnd QN einander gleich, so würden sie, weil sie die Körper S nnd P gleich nnd längs paralleler Linien anziehen, nichts in der gegenseitigen Lage derselben ändern. Die Bewegungen jener Körper unter sich würden (nach Gesetze, Zusatz 6.) so sein, als ob diese Anziehungen aufgehoben wären. Wäre die Anziehnng QN kleiner als die QM, so würde sie von dieser einen Theil QN aufheben und nnr der Theil MN übrig bleiben, dnrch welchen die Proportionalität der Zeiten und Flächen und die elliptische Form der Bahn gestört werden würde. Wäre endlich die Anziehnng QN grösser als QM, so würde ebenfalls nur ans ihrem Unterschiede MN eine Störung der Proportionalität und der Bahn hervorgehen.

Auf diese Weise wird dnrch die Anziehung QN die obige dritte QM immer anf MN redncirt, während die erste nnd zweite Anziehung unverändert bleiben, und es werden die Flächen nnd Zeiten der Proportionalität, die Bahn PAB der oben erwähnten elliptischen Form dann am stärksten sich nähern, wenn die Anziehnng MN = 0, oder so klein als möglich ist. Dies ist der Fall, wenn die beschleunigenden Anziehungen der Körper P nnd S gegen Q der Gleichheit möglichst nahe kommen, d. h. wenn die Anziehnng QN nicht = 0, auch nicht kleiner als die kleinste aller Anziehungen QM ist, sondern gewissermaassen zwischen der grössten und kleinsten aller Anziehungen QM in der Mitte liegt, also weder viel grösser noch viel kleiner als QK ist. W. z. b. w.

Zweiter Fall. Es mögen jetzt die kleinern Körper P und Q sich nm den grössten S in verschiedenen Ebenen drehen, alsdann wird die Kraft LM, welche längs der in der Ebene der Bahn APB gelegenen Linie PS wirkt, denselben Erfolg wie früher haben und den Körper P nicht ans der Ebene seiner Bahn bringen. Die andere Kraft MN aber, welche längs einer QS parallelen Linie wirkt (folglich, wenn Q ausserhalb der Knotenlinie sich befindet, gegen die Ebene der Bahn APB geneigt ist) wird ausser der bereits auseinandergesetzten Störung in der

Länge eine Störung der Bewegung in der Breite herbeiführen, indem sie den Körper P aus der Ebene seiner Bahn zieht. Diese Störung wird, in jeder gegebenen Lage der Körper P und S der erzeugenden Kraft MN proportional sein, mithin am kleinsten werden, wenn dies mit MN der Fall ist, d. h. wenn (wie oben erklärt) die Anziehung QN nicht viel grösser und nicht viel kleiner als QK ist. W. z. b. w.

Zusatz 1. Hieraus schliesst man leicht, dass, im Fall mehrere kleine Körper P, Q, R etc. sich um einen sehr grossen Körper S bewegen, die Bewegung des innersten Körpers P am wenigsten durch die Anziehungen der äussern gestört wird, wenn der grösste Körper S eben so stark durch die übrigen, nach Verhältniss ihrer beschleunigenden Kräfte angezogen und angetrieben wird, als diese gegenseitig durch einander.

Zusatz 2. Verhalten sich in einem Systeme von drei Körpern S, P, Q die beschleunigenden Anziehungen von je zwei derselben gegen den dritten zu einander umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen, so wird der Körper P am Radius vector PS die Flächen schneller in der Nähe der Conjunction A und Opposition B, als in der Nähe der Quadraturen C und D beschreiben. Denn jede Kraft, durch welche P wohl, S aber nicht gedrängt wird und die nicht längs der Linie PS wirkt, beschleunigt oder verzögert die Beschreibung der Fläche, je nachdem sie vor- oder rückwärts auf die Richtung der Bewegung wirkt. Eine solche Kraft ist NM. Dieselbe wirkt beim Uebergange des Körpers P von C nach A im Sinne der Bewegung und beschleunigt die letztere; hierauf wirkt sie von A bis D im entgegengesetzten Sinne und verzögert, beschleunigt hierauf von D bis B und verzögert zuletzt von B bis C die Bewegung.[48])

Zusatz 3. Auf dieselbe Weise wird es klar, dass unter übrigens gleichen Umständen die Bewegung in der Conjunction und Opposition geschwinder ist, als in den Quadraturen.

Zusatz 4. Die Bahn des Körpers P ist, unter übrigens gleichen Umständen, in den Quadraturen stärker gekrümmt, als in der Conjunction und Opposition, weil Körper, welche sich schnell bewegen, weniger von der geradlinigen Richtung abgelenkt werden. Ausserdem ist die Kraft KL oder NM in der Conjunction und Opposition derjenigen entgegengesetzt, mit welcher der Körper S den Körper P anzieht und vermindert daher die letztere. Der Körper P wird aber desto weniger von der geradlinigen Bahn abgelenkt, je schwächer er gegen den Körper S gedrängt wird.

Zusatz 5. Der Körper P wird ferner, unter übrigens gleichen Umständen, sich in den Quadraturen weiter vom Körper S entfernen, als in der Conjunction und Opposition. Dies gilt stets, mit Ausschluss der excentrischen Bewegung. Ist nämlich die Bahn des Körpers P excentrisch, so wird ihre Excentricität (wie im Zusatz 9. gezeigt werden wird) am grössten, im Fall die Apsiden sich in den Syzygien befinden. Daher kann es kommen, dass der Körper P beim Anstoss an die obere Apside

in den Syzygien weiter vom Körper S entfernt ist, als in den Quadraturen.

Zusatz 6. Die Centripetalkraft des Centralkörpers S, durch welche der Körper P in seiner Bahn gehalten wird, nimmt in den Quadraturen durch Hinzufügung der Kraft LM zu, und in den Syzygien durch Fortnahme der Kraft KL ab, und wegen der Grösse der Kraft KL nimmt sie mehr ab als zu. Jene Centripetalkraft verhält sich ferner (nach §. 18., Zusatz 2.) direct wie der Radius SP und indirect wie das Quadrat der Umlaufszeit. Dieses zusammengesetzte Verhältniss wird daher durch die Wirkung der Kraft KL vermindert und bei unverändertem Radius SP nimmt die Umlaufszeit zu in dem halben Verhältniss der Verminderung, welche jene Centripetalkraft erleidet.[49]) Wird dieser Radius vergrössert oder verkleinert, so nimmt die Umlaufszeit (nach §. 18. Zusatz 6.) in einem grösseren Verhältniss als $R^{3/2}$ zu, oder in einem kleineren Verhältniss als $R^{3/2}$ ab. Nimmt die Kraft des Centralkörpers etwas ab, so wird der Körper P immer schwächer und schwächer angezogen und sich stets weiter vom Centrum S entfernen. Umgekehrt wird er sich ihm nähern, wenn die Kraft wächst. Wenn also die Wirksamkeit des entfernten Körpers Q, durch welchen jene Kraft vermindert wird, abwechselnd wächst und abnimmt, so wird zugleich der Radius SP abwechselnd grösser und kleiner, und die Umlaufszeit nimmt ebenfalls zu und ab in dem zusammengesetzten Verhältniss aus der $^3/_2$ten Potenz des Radius und der Quadratwurzel der Zu- und Abnahme, welche der Centralkörper S durch die vermehrte oder verminderte Wirksamkeit des entfernten Körpers Q erleidet.

Zusatz 7. Aus dem Vorhergehenden folgt auch, dass die Apsidenlinie der vom Körper P beschriebenen Ellipse in Bezug auf Winkelbewegung abwechselnd vor- und rückwärts schreitet; stärker schreitet sie jedoch vorwärts, und bewegt sich daher aus diesem Grunde bei den einzelnen Umläufen des Körpers im Sinne der Bewegung des letzteren. Denn die Kraft, durch welche der Körper P in den Quadraturen, nachdem die Kraft NM verschwunden ist, gegen den Körper S getrieben wird, wird aus der Kraft LM und der vom Körper S gegen P wirkenden Centripetalkraft zusammengesetzt. Die erstere LM nimmt, wenn der Abstand PS grösser wird, beinahe in demselben Verhältniss zu, die zweite dagegen in dem doppelten Verhältniss ab; mithin nimmt die Summe beider in einem kleineren Verhältniss als dem doppelten ab, und sie bewirkt daher (nach §. 85., Zusatz 1.), dass die obere Apside rückwärts schreitet. In der Conjunction und Opposition aber ist die Kraft, durch welche P gegen S getrieben wird, dem Unterschiede der von S auf P wirkenden Centripetalkraft und der Kraft KL gleich, und dieser Unterschied nimmt, weil KL sehr nahe in demselben Verhältniss wie PS wächst, in einem grösseren Verhältniss als dem doppelten des Abstandes PS ab, bewirkt also (nach §. 85., Zusatz 1.), dass die obere Apside sich vorwärts bewegt. In den Orten zwischen den Syzygien und den Quadraturen hängt die

Bewegnng der Apside von beiden Ursachen vereinigt ab, so dass sie, je nachdem die eine oder die andere überwiegend ist, sich selbst vor- oder rückwärts bewegt. Da nnn die Kraft KL in den Syzygien etwa doppelt so gross, als die LM in den Quadraturen ist; so wird bei einem ganzen Umlauf KL überwiegend sein und bewirken, dass die obere Apside sich vorwärts bewegt. Die Wahrheit dieses nnd des vorbergehenden Zusatzes sieht man noch leichter ein, wenn man sieb ein System von zwei Körpern S und P denkt, welches durch mehrere auf der Babn EQE befindliche Körper Q, Q, Q etc. überall eingeschlossen wird. Durch die Wirkung der letzteren wird nämlieb die des Körpers S überall vermindert, nnd dieselbe nimmt in einem grösseren Verhältnisse als dem doppelten des Abstandes ab.

Zusatz 8. Das Vor- und Rückwärtsschreiten der Apsiden bängt aber davon ab, dass die Centripetalkraft beim Uebergange des Körpers von der nntern zur obern Apside in einem grösseren oder kleineren Verhältnisse als dem doppelten des Abstandes SP abnimmt, wie aueb von einer ähnlichen Znnahme derselben, während der Körper zur nntern Apside zurückkehrt. Mithin wird dasselbe am grössten sein, wenn das Verbältniss der Kraft in der obern Apside zu der in der untern Apside so weit als möglich von dem umgekehrten doppelten Verhältniss der Abstände abweicht. Offenbar werden also die Apsiden in den Syzygien vermöge der abziehenden Kraft

$$KL = NM - ML$$

schneller vorwärts- und in den Quadraturen, vermöge der anziehenden LM, langsamer rückwärts schreiten. Wegen der Länge der Zeit aber, während welcher das schnelle Vorwärts- und das langsame Rückwärtsschreiten fortgesetzt wird, fällt diese Ungleichheit sehr bedentend aus.

Zusatz 9. Wenn irgend ein Körper vermöge einer Kraft, welche dem Quadrat der Entfernung desselben vom Centrum umgekebrt proportional ist, sich nm das letztere in einer Ellipse bewegt; wenn hierauf bei dem Uebergange von der obern Apside zur untern jene Kraft beständig einen Znwachs erhält, der in einem grösseren Verhältniss als dem doppelten der verkleinerten Entfernung steht: so wird der Körper offenbar, da er durch den Zuwachs jener neuen Kraft beständig dem Centrnm zngetrieben wird, diesem sich mehr nähern, als wenn er nur durch eine Kraft angetrieben würde, welche im doppelten Verhältniss der verkleinerten Entfernung zunimmt. Er wird mithin eine Bahn beschreiben, welche innerhalb der elliptischen liegt, und in der nntern Apside dem Centrum näher kommen als vorher. Die Bahn erbält daher durch den Znwachs der neuen Kraft eine grössere Excentricität. Wenn nun die Kraft, während der Körper von der nntern zur obern Apside zurückkehrt, in demselben Grade abnimmt, in welchem sie vorber zugenommen hatte, so kehrt der Körper zu der früheren Entfernnng zurück, und im Fall die Kraft in einem grösseren Verhältniss abnähme, würde der

Körper, vermöge der geringeren Anziehnng, zu einer grössern Entfernung gelangen und so die Excentrität der Bahn noch stärker vermehrt werden. Nimmt daher das Verhältniss des Zuwachses der Kraft zur Abnahme derselben hei den einzelnen Umläufen zu, so wächst auch die Excentricität, nnd umgekehrt wird diese kleiner werden, wenn jenes Verhältniss abnimmt.

Befinden sich nun in dem System der Körper S, P und Q die Apsiden der Bahn PAB in den Quadraturen, so ist jenes Verhältniss des Zuwachses zur Abnahme am kleinsten, nnd wird umgekehrt am grössten, wenn die Apsiden sich in den Syzygien befinden. Denkt man sich die Apsiden in den Quadraturen, so ist das Verhältniss in der Nähe der Apsiden kleiner und in der Nähe der Syzygien grösser, als das doppelte der Entfernungen, und aus dem grössern Verhältniss geht, wie schon bemerkt, eine directe Bewegung der oheren Apside bervor. Betrachtet man aber das Verhältniss der ganzen Zu- und Ahnahme während der Bewegung zwischen den Apsiden, so ist dasselbe kleiner als das doppelte der Entfernungen. Das Verhältniss der Kraft in der untern Apside ist kleiner, als das doppelte Verhältniss des Abstandes der obern Apside vom Brennpunkte der Ellipse zum Abstande der untern Apside von demselhen Punkte. Denkt man sich umgekehrt die Apsiden in den Syzygien, so ist das Verhältniss der Kraft in der untern Apside zu der in der ohern Apside stattfindenden, grösser als das doppelte der Entfernungen. Denn die Kräfte LM in den Quadraturen, addirt zur Kraft des Körpers S, bilden eine zusammengesetzte Kraft, welche in einem kleinern Verhältniss steht; die Kräfte QL in den Syzygien, subtrahirt von der Kraft des Körpers S, hilden eine Resultante, welche im grössern Verhältniss steht. Es ist daher das Verhältniss der ganzen Ab- und Zunahme, hei der Bewegung zwischen den Apsiden, am kleinsten in den Quadraturen nnd am grössten in den Syzygien. Es wächst heständig beim Uehergange der Apsiden von den Quadraturen zu den Syzygien und vergrössert die Excentrität der Ellipse; es nimmt hingegen ab beim Uebergange von den Syzygien zu den Quadraturen nnd verkleinert die Excentricität.

Zusatz 10. Um nun das Verhältniss der Störnngen in der Breite zu betrachten, wollen wir nns vorstellen, dass die Ebene der Bahn QES unheweglich bleihe. Aus der bereits erklärten Ursache der Störungen geht hervor, dass von den Kräften NM und ML, welche jene ganze Ursache ausmachen, die letztere, da sie immer längs der Ebene PAB wirkt, die Bewegung in der Breite niemals stört. Die Kraft NM hingegen wirkt, wenn die Knoten sich in den Syzygien hefinden, ebenfalls längs derselhen Ebene der Bahn und stört diese Bewegung nicht. Befinden sich die Knoten aber in den Quadratnren, so stört die Kraft NM diese Bewegung am stärksten, und indem sie den Körper P beständig aus der Ebene seiner Bahn zieht, vermindert sie die Neigung der Ebene heim Uehergange des Körpers von den Quadraturen zu den Syzygien; wogegen sie umgekehrt, beim Uebergange von den Syzygien zu den Quadraturen

die Neigung vergrössert. Befindet sich demnach der Körper in den Syzygien, so wird die Neigung am allerkleinsten, und kehrt ungefähr zur früheren Grösse zurück, sobald ersterer den nächsten Knoten erreicht. Setzt man die Knoten in die Octanten nach den Quadraturen, d. h. zwischen C und A, D und B, so ersieht man aus der vorhergehenden Auseinandersetzung, dass beim Uebergange des Körpers von einem seiner Knoten bis zu 90° davon, die Neigung immer kleiner wird, dass dieselbe hierauf beim Uebergange durch die nächsten 45° bis zur nächsten Quadratur wächst und hierauf von Neuem, beim Uebergange durch andere 45° bis zum nächsten Knoten kleiner wird. Die Neigung wird daher mehr verkleinert als vergrössert, und ist deshalb im folgenden Knoten immer kleiner, als im vorhergehenden. Auf ähnliche Weise wird die Neigung mehr vergrössert als verkleinert, wenn die Knoten sich in den Octanten vor den Quadraturen, zwischen A und D, B und C befinden. Die Neigung wird daher am allergrössten, wenn die Knoten sich in den Syzygien befinden. Beim Uebergange derselben von den Syzygien zu den Quadraturen wird sie, während der Körper einzeln die Knoten trifft, kleiner und am allerkleinsten, wenn die Knoten in den Quadraturen und der Körper in den Syzygien verweilt. Hierauf wächst die Neigung in demselben Grade, in welchem sie vorher abgenommen hatte und kehrt, wenn die Knoten die nächsten Syzygien treffen, zur frühern Grösse zurück.

Zusatz 11. Befinden sich die Knoten in den Quadraturen, so wird der Körper P immer aus der Ebene seiner Bahn gezogen und zwar nach der Seite von Q hin, während er vom Knoten C durch die Conjunction A nach dem Knoten D sich bewegt; nach der entgegengesetzten Seite aber wird er gezogen, während der Bewegung vom Knoten D durch die Opposition B bis zum Knoten C. Offenbar entfernt sich also der Körper, bei seiner Bewegung vom Knoten C ab, beständig aus der ersten Ebene CD seiner Bahn, bis er zum nächsten Knoten D gelangt, und indem er in diesem am weitesten aus jener ersten Ebene CD entfernt ist, geht er durch die Ebene der Bahn QES, nicht in dem anderen Knoten D jener Ebene, sondern in einem Punkte welcher von ihm nach dem Körper Q hin abweicht und der ferner ein neuer rückwärts liegender Ort des Knotens ist. Auf ähnliche Weise fahren die Knoten fort, bei dem Uebergange des Körpers von dem einen zum anderen, zurückzuweichen. Denkt man sich also die Knoten in

Fig. 104.

den Quadraturen, so gehen sie beständig zurück; in den Syzygien hingegen (wo die Bewegung in Bezug auf die Breite nicht gestört wird) ruhen sie; in den zwischenliegenden Punkten gehen sie, als Theilhaber beider Bedingungen, langsamer zurück und werden daher bei den einzelnen Umläufen des Körpers entweder zurückweichend oder stillstehend rückläufig bewegt.

Zusatz 12. Alle in diesen Zusätzen beschriebenen Bewegungen sind etwas grösser in der Conjunction der Körper P und R als in der Opposition, und zwar wegen der grössern erzeugenden Kräfte NM und ML.

Zusatz 13. Da die in diesen Zusätzen erläuterten Umstände nicht von der Grösse des Körpers Q abhängen, so gilt alles Vorhergehende, wenn man die Grösse dieses Körpers so bedeutend annimmt, dass das System der Körper S und P sich um ihn dreht. Aus der Vergrösserung des Körpers Q und seiner Centripetalkraft, durch welche die Störungen des Körpers P entstehen, werden diese alle (bei gleichen Abständen) in diesem Falle grösser als in demjenigen, wo der Körper Q sich um das System der beiden Körper S und P bewegt.

Zusatz 14. Ist der Körper Q sehr entfernt von S, so sind die Kräfte NM und ML sehr nahe der Kraft QK und PS : QS zusammen genommen proportional.

Ist daher der Abstand PS, und auch die absolute Kraft des Körpers Q constant, so sind diese Kräfte umgekehrt proportional

QS^3.[50])

Jene Kräfte NM und ML sind aber die Ursachen aller Störungen und Wirkungen, von denen in den vorhergehenden Zusätzen die Rede war. Offenbar werden also alle jene Wirkungen, wenn das System der Körper S und P bestehen bleibt, und nur der Abstand SQ und die absolute Kraft des Körpers Q sich ändert, sich sehr nahe verhalten:

direct wie die absolute Kraft des Körpers Q,
indirect wie der Cubus des Abstandes QS

Bewegt sich das System der Körper S und P um den sehr entfernten Körper Q, so werden jene Kräfte NM und ML und ihre Wirkungen (nach §. 18., Zusatz 2 und 6.) sich umgekehrt wie die Quadrate der Umlaufszeit verhalten. Ist demnach die Grösse des Körpers Q seiner absoluten Kraft proportional, so verhalten sich die Kräfte NM, ML und ihre Wirkungen direct wie der Cubus des scheinbaren Durchmessers des von S aus gesehenen entfernten Körpers Q, und umgekehrt. Dieses Verhältniss ist nämlich mit dem obigen identisch.[51])

Zusatz 15. Man verändere, während Gestalt, Proportion und gegenseitige Neigung der Bahnen EQE und PAB unverändert bleiben, ihre Grösse. Bleiben alsdann die Kräfte der Körper Q und S entweder unverändert, oder werden sie in einem beliebigen gegebenen Verhältniss geändert; so wirken diese Kräfte (d. h. die Kraft des Körpers S, durch welche P gezwungen wird, von der geradlinigen Bahn ab- und in die

PAB überzugehen und die Kraft des Körpers Q, durch welche derselbe Körper P aus jener Bahn zu weichen gezwungen wird), immer auf dieselbe Weise und in demselben Verhältniss. Nothwendig müssen daher alle Wirkungen ähnlich und proportional, und die zu denselben erforderlichen Zeiten ebenfalls proportional sein; d. h. alle linearen Störungen verhalten sich wie die Durchmesser der Bahnen, die Winkelstörungen sind mit den früheren identisch, und die Zeiten ähnlicher linearer oder gleicher Winkelstörungen sind den Umlaufszeiten der ganzen Bahnen proportional.

Zusatz 16. Ist daher die Form und gegenseitige Neigung der Bahnen gegeben, und werden auf irgend eine Weise die Grössen, Kräfte und Abstände der Körper geändert; so kann man aus den gegebenen Störungen und den dazu erforderlichen Zeiten in einem Falle auf die Störungen und Zeiten in jedem andern Falle sehr nahe schliessen. Kürzer geschieht dies nach folgender Methode.

Die Kräfte NM und ML sind, wenn alles Uebrige constant ist, dem Radius SP proportional; die periodischen Wirkungen der erstern verhalten sich (nach §. 10., Zusatz 2.) wie die Kräfte und das Quadrat der Umlaufszeit des Körpers P zusammengesetzt. Dies sind die linearen Störungen des Körpers P, und hierauf verhalten sich die, von S aus gesehenen, Winkelstörungen (d. h. so wohl in der Bewegung des Perihels und der Knoten, als auch alle scheinbaren Störungen in der Länge und Breite) bei jedem Umlauf des Körpers P sehr nahe wie das Quadrat der Umlaufszeit. Verbindet man diese Verhältnisse mit denjenigen von Zusatz 14., so werden bei jedem System der Körper S, P und Q, wo P um den ihm nahe liegenden Körper S und S um den entfernten Körper Q sich dreht, die scheinbaren Winkelstörungen des Körpers P in Bezug auf S als Centrum, sich in den einzelnen Umläufen des Körpers P verhalten:

direct wie das Quadrat der Umlaufszeit von P und
indirect wie das Quadrat der Umlaufszeit von S.

Durch Vergrösserung oder Verkleinerung der Excentricität und Neigung der Bahn PAB werden die Bewegungen des Perihels und der Knoten nicht merklich geändert, ausser wenn jene zu gross sind.

Zusatz 17. Da die Linie LM bald grösser bald kleiner, als der Radius PS ist, so bezeichne man den mittlern Werth der Kraft LM durch jenen Radius PS. Alsdann verhält sich dieselbe zur mittlern Kraft QK oder QN (welche man durch QS ausdrücken kann) wie die Linie PS zu QS. Ferner verhält sich die mittlere Kraft QN oder QS, durch welche der Körper S in seiner Bahn um Q erhalten wird, zu der Kraft, welche den Körper P in seiner Bahn um S erhält, wie der Radius QS : PS und wie das Quadrat der Umlaufszeit des Körpers P um S zum Quadrat der Umlaufszeit des Körpers S um Q, zusammengesetzt.

Ebenso steht die mittlere Kraft LM zu derjenigen Kraft, durch welche der Körper P in seiner Bahn um S erhalten wird (und vermöge

welcher derselbe Körper P in derselben Umlaufszeit um irgend einen festen Punkt S im Abstande PS sich bewegen könnte) in jenem Verhältniss der Quadrate der Umlaufszeiten. Sind daher die Umlaufszeiten zugleich mit dem Abstande PS gegeben, so kennt man die mittlere Kraft LM, und ist diese bekannt, so wird auch die Kraft MN sehr nahe durch die Proportionalität der Linien PS und MN bekannt.

Zusatz 18. Nach denselben Gesetzen, nach denen der Körper P sich um S bewegt, denke man sich mehrere flüssige Körper, welche sich um denselben Körper S und in gleichen Abständen von ihm bewegen. Hierauf mögen sie sich gegenseitig berühren, und so ein flüssiger, runder und um S concentrischer Ring entstehen; alsdann werden die einzelnen Theile desselben, welche alle ihre Bewegung nach dem Gesetze des Körpers P vollführen, dem Körper S näher kommen und in ihrer Conjunction und Opposition mit dem Körper Q sich schneller bewegen, als in den Quadraturen. Die Knoten des Ringes, oder seine Durchschnitte mit der Ebene der Bahn des Körpers Q oder S ruhen in den Syzygien, bewegen sich aber ausserhalb der letztern rückwärts, und zwar am geschwindesten in den Quadraturen, langsamer hingegen in andern Punkten der Bahn. Auch die Neigung des Ringes wird veränderlich sein, und seine Axe bei den einzelnen Umläufen oscilliren, jedoch nach Vollendung eines Umlaufes an die frühere Stelle zurückkehren; ausser in so fern sie durch die Praecession herumgetragen wird.

Zusatz 19. Man stelle sich nun vor, dass der aus einer nicht flüssigen Materie bestehende Körper S vergrössert und bis an diesen Ring ausgedehnt werde. Derselbe enthalte in einem an seinem Umfange ausgehöhlten Graben, Wasser, und drehe sich mit derselben periodischen Bewegung gleichförmig um seine Axe. Die Flüssigkeit wird (wie im vorhergehenden Zusatze) wechselweise beschleunigt und verzögert, und bewegt sich in den Syzygien geschwinder, in den Quadraturen langsamer als die Oberfläche der Kugel; sie wird daher in dem Graben, nach der Weise des Meeres, hin- und herfliessen. Bewegt sich das Wasser um den ruhenden Mittelpunkt der Kugel, so wird es, wenn die anziehende Kraft des Körpers Q aufgehoben ist, keine hin- und hergehende Bewegung annehmen. Dasselbe Verhältniss findet bei einer gleichförmig und geradlinig fortschreitenden und inzwischen sich um ihr Centrum drehenden Kugel statt (nach Gesetze, Zusatz 5.), wie auch bei einer Kugel, welche von ihrer geradlinigen Bewegung gleichförmig abgezogen wird (nach Gesetze, Zusatz 6.).

Nähert sich aber der Körper Q, so wird durch seine ungleiche Anziehung sehr bald das Wasser gestört. Stärker wird nämlich das nähere, schwächer das entferntere angezogen. Die Kraft LM zieht aber das Wasser abwärts in den Quadraturen und lässt es bis zu den Syzygien herabschreiten, wogegen die Kraft KL es in den Syzygien aufwärts zieht, sein Herabsteigen hemmt und es bis zu den Quadraturen ansteigen

lässt; so weit nicht die hin- und herfliessende Bewegung durch den Graben und durch die Reibung etwas verzögert wird.

Zusatz 20. Wird nun der Ring fest und die Kugel kleiner, so hört die hin- und herfliessende Bewegung auf, die oscillirende Bewegung der Neigung aber und die Präcession der Knoten währt fort. Die Kugel möge dieselbe Axe wie der Ring haben und ihre Bahn in derselben Zeit zurücklegen; sie möge ferner mit ihrer Oberfläche jenen innerhalb berühren und an ihm haften; durch die Theilnahme an seiner Bewegung wird alsdann das System beider oscilliren und es werden die Knoten zurückschreiten. Die Kugel ist nämlich, wie bald dargethan werden wird, für die Annahme aller Eindrücke indifferent. Der grösste Neigungswinkel des der Kugel beraubten Ringes findet statt, wenn die Knoten in den Syzygien sind; hierauf sucht er, beim Fortgange der Knoten zu den Quadraturen seine Neigung zu vermindern, und theilt durch dieses Bestreben der ganzen Kugel eine Bewegung mit. Diese behält die ihr mitgetheilte Bewegung bei, bis der Ring dieselbe durch ein entgegengesetztes Bestreben aufhebt, und ihr eine neue Bewegung in entgegengesetzter Richtung mittheilt. Auf diese Weise findet das grösste Bestreben zur Verminderung der Neigung statt, wenn die Knoten sich in den Quadraturen befinden und der Neigungswinkel selbst ist am kleinsten in den auf die Quadraturen folgenden Octanten. Hierauf folgt die grösste Bewegung zur Vergrösserung der Neigung in den Syzygien, und der grösste Neigungswinkel selbst findet in den auf dieselben folgenden Octanten statt. Dasselbe Verhältniss findet bei einer Kugel statt, welche keinen Ring hat, jedoch in den Gegenden des Aequators etwas höher als an den Polen ist, oder auch am erstern Orte aus etwas dichterer Materie besteht. Jenes Uebergewicht der Materie in der Nähe des Aequators vertritt nämlich die Stelle des Ringes. Obgleich durch die Vergrösserung der Centripetalkraft dieser Kugel alle ihre Theile, nach Art der schweren Theile der Erde, abwärts zu streben vorausgesetzt werden müssen, so werden doch dadurch die Erscheinungen dieses und des vorhergehenden Zusatzes kaum verändert; in so fern nicht die Orte der grössten und kleinsten Wasserhöhe verschieden sind. Das Wasser wird nämlich in seiner Bahn getragen und verharret in derselben nicht durch seine Centripetalkraft, sondern durch den Graben, in welchem es fliesst. Ausserdem zieht die Kraft LM es abwärts am stärksten in den Quadraturen, die Kraft KL = NM — LM aufwärts am stärksten in den Syzygien. Beide Kräfte vereint hören auf, es abwärts zu ziehen, und fangen an, es aufwärts zu ziehen in den Octanten vor den Syzygien. Umgekehrt hören sie auf, es aufwärts zu ziehen und fangen an, es abwärts zu ziehen, in den Octanten nach den Syzygien. Die grösste Wasserhöhe kann daher ungefähr in den Octanten nach den Syzygien, und die kleinste in den Octanten nach den Quadraturen eintreten; so weit nicht die durch diese Kräfte eingeflösste auf- oder absteigende Bewegung entweder vermöge der dem Wasser innewohnenden Kraft etwas länger an-

hält, oder durch die Hindernisse des Grabens etwas schneller aufgehoben wird.

Zusatz 21. Auf dieselbe Weise, wie die am Aequator überwiegende Materie bewirkt, dass die Knoten rückwärts schreiten, also durch Vermehrung derselben dieses Rückwärtsschreiten stärker, durch Verminderung schwächer und durch Fortnahme ganz aufgehoben wird; wird ferner, wenn man mehr Materie fortnimmt, als überwiegend ist, d. h. wenn die Kugel am Aequator entweder vertieft oder lockerer als an den Polen gemacht wird, ein Vorwärtsschreiten der Knoten erfolgen.

Zusatz 22. Man kann umgekehrt aus der Bewegung der Knoten die Gestalt der Kugel erkennen. Behält diese nämlich constant dieselben Pole und ist jene Bewegung rückgängig, so befindet sich in der Gegend des Aequators überwiegende Materie; ist die Bewegung rechtläufig, so mangelt es daran. Man denke sich eine gleichförmige und vollkommen abgerundete Kugel, welche zuerst im freien Raume ruhet. Hierauf werde sie durch einen schief gegen ihre Oberfläche gerichteten Stoss fortgetrieben, wodurch eine theils kreisförmige, theils geradlinige Bewegung entsteht. Da diese Kugel sich gegen alle durch ihr Centrum gehenden Axen gleichgültig verhält, und sich gegen keine Axe oder Lage der Axe mehr hinneigt; so wird sie offenbar die Axe und deren Neigung von freien Stücken niemals ändern. Nun werde die Kugel, an derselben Stelle ihrer Oberfläche wie vorhin, durch einen neuen schräg gerichteten Stoss angetrieben. Da ein früherer oder späterer Stoss in der Wirkung nichts verändert, so werden offenbar diese beiden nach einander angebrachten Stösse dieselbe Bewegung hervorbringen, als wenn sie zugleich ausgeübt wären, d. h. als ob die Kugel durch eine einfache, aus beiden (nach Gesetze, Zusatz 2.) zusammengesetzte Kraft angetrieben worden wäre. Sie bringen also eine einfache Bewegung um die der Neigung nach gegebene Axe hervor. Dasselbe Verhältniss findet statt, wenn der zweite Stoss an irgend einem anderen Orte auf dem Aequator der ersten Bewegung ausgeübt würde; ebenso, wenn der erste Stoss an irgend einem Orte desjenigen Aequators ausgeübt würde, dessen Bewegung durch den zweiten Stoss allein hervorgebracht wird. Werden beide Stösse an beliebigen Orten ausgeübt, so erzeugen sie dieselbe kreisförmige Bewegung, als wenn sie zugleich im Durchschnittspunkte der Aequatoren derjenigen Bewegungen angebracht würden, welche jeder für sich erzeugt hätte.

Eine homogene und vollkommene Kugel behält mehrere verschiedene Bewegungen nicht bei, sondern setzt alle ihr beigebrachte zusammen und reducirt sie auf Eine. Sie beschreibt, so weit es an ihr ist, ihre Bahn stets mit einfacher und gleichförmiger Bewegung um eine einzige Axe, deren Neigung unveränderlich und gegeben ist. Die Centripetalkraft kann weder die Neigung der Axe, noch die Rotationsgeschwindigkeit verändern.

Denkt man sich die Kugel durch eine beliebige Ebene, welche durch

ihren Mittelpunkt und den Richtungspunkt der Kraft geht, in zwei Halbkugeln getheilt, so wird jene Kraft immer gleich stark auf die beiden letztern wirken und daher die Kugel, was die Rotationsbewegung betrifft, nach keiner Seite hinneigend machen. Man füge aber irgend wo, zwischen Pol und Aequator, neue Materie hinzu, welche in Form eines Berges aufgehäuft ist; alsdann wird diese, durch das beständige Bestreben sich vom Mittelpunkte zu entfernen, die Bewegung der Kugel stören und bewirken, dass die Pole sich auf der Oberfläche bewegen, und wird jeder derselben um sich selbst und den entgegengesetzten Pol Kreise beschreiben. Dieses unregelmässige Herumwandern wird nicht anders aufgehoben werden, als wenn man jenen Berg in einen von beiden Polen versetzt, in welchem Falle (nach Zusatz 21.) die Knoten des Aequators vorwärts schreiten, oder in den Aequator, wodurch (nach Zusatz 20.) die Knoten zum Rückwärtsschreiten gebracht werden. Eine dritte Art der Verbesserung besteht in der Hinzufügung neuer Materie an der entgegengesetzten Seite der Axe, wodurch der Berg in Bezug auf Bewegung aufgehoben wird. In diesem Falle werden die Knoten entweder vor- oder rückwärts schreiten, je nachdem der Berg und diese neue Materie dem Pole oder dem Aequator näher liegen.

§. 108. Lehrsatz. Unter der Voraussetzung derselben Anziehungsgesetze wird der äussere Körper Q an dem gemeinschaftlichen Schwerpunkt O der Körper S und P genauer als um den grössten und mittelsten Körper S allein, der Zeit proportionale Flächen und eine Ellipse zum Brennpunkt O beschreiben.

Die Anziehungen, welche von S und P gegen Q ausgeübt werden, (Figur zu §. 107., Zus. 11.) setzen nämlich eine Anziehung zusammen, welche mehr nach dem gemeinschaftlichen Brennpunkte O der Körper S und P, als nach dem grössten Körper S gerichtet, und welche näher dem Quadrat des Abstandes QO, als dem des Abstandes QS umgekehrt proportional ist. Dies wird Jedem, welcher die Sache erwägt, leicht einleuchten.

§. 109. Lehrsatz. Finden wieder dieselben Anziehungsgesetze statt, so wird der äussere Körper Q um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt O der beiden innern, genauer der Zeit proportionale Flächen und eine Ellipse zum Brennpunkt O beschreiben; wenn der innerste und grösste Körper S gleich den übrigen durch diese Anziehungen angetrieben wird, als wenn er, entweder gar nicht angezogen, ruhete, oder viel stärker oder schwächer angezogen, mehr oder weniger angetrieben würde.

Der Beweis wird fast auf dieselbe Weise, wie der zu §. 107. geführt, er ist jedoch weitläufiger, weshalb ich ihn hier übergehe. Es wird genügen, die Sache folgendermaassen abzuschätzen

Aus dem Beweise des vorhergehenden §. geht hervor, dass das Centrum, nach welchem der Körper Q (Fig. 104.) durch die Verbindung der Kräfte angetrieben wird, dem gemeinschaftlichen Schwerpunkte jener beiden sehr nahe liegt. Fiele dieses Centrum mit dem gemeinschaft-

lichen Schwerpunkte zusammen und befände sich der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller drei Körper in Ruhe: so würde der Körper Q einerseits, und der gemeinschaftliche Schwerpunkt der beiden andern Körper andererseits um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt aller drei Körper genaue Ellipsen beschreiben. Dies ergiebt sich aus §. 99., Zusatz 2., in Verbindung mit §§. 105. und 106. Jene elliptische Bewegung wird ein wenig gestört durch den Abstand des Schwerpunktes der zwei Körper von demjenigen Punkte, nach welchem der dritte Körper Q hingezogen wird. Lässt man ausserdem für den gemeinschaftlichen Schwerpunkt aller drei Körper eine Bewegung zu, so wird die Störung grösser. Diese wird aber am kleinsten, im Falle der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller drei Körper ruht, d. h. wenn der innerste und grösste Körper S nach demselben Gesetze, wie die übrigen angezogen wird. Grösser wird die Störung immer, wenn jener gemeinschaftliche Schwerpunkt der drei Körper, durch Verminderung der Bewegung des Körpers, anfängt sich zu bewegen und hieranf mehr und mehr angetrieben wird.

Zusatz. Bewegen sich mehrere kleine Körper um einen grössten, so kann man aus dem Obigen schliessen, dass die beschriebenen Bahnen sich Ellipsen mehr nähern und die Beschreibung der Flächen gleichmässiger erfolgt, wenn alle Körper mit beschleunigenden Kräften, welche sich direct wie die absoluten Kräfte und indirect wie die Quadrate der Abstände verhalten, einander wechselweise anziehen und antreiben, und wenn ferner der Brennpunkt jeder Bahn sich im gemeinschaftlichen Schwerpunkte aller innern Bahnen befindet (nämlich der Brennpunkt der ersten und innersten Bahn im Schwerpunkte des grössten und innersten Körpers, der Brennpunkt der zweiten Bahn im gemeinschaftlichen Schwerpunkte der zwei innersten, der dritten im gemeinschaftlichen Schwerpunkte der drei innersten u. s. w. f.), als wenn der innerste Körper sich in Ruhe befände und als gemeinschaftlicher Brennpunkt aller Bahnen angenommen würde.

§. 110. Lehrsatz. Wenn in einem Systeme von Körpern A, B, C, D etc. einer von ihnen A alle übrigen mit beschleunigenden Kräften anzieht, welche sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Abstände vom anziehenden Körper verhalten; wenn ferner dasselbe bei dem Körper B in Bezug auf die andern A, C, D u. s. w. der Fall ist: so verhalten sich die absoluten Kräfte der Körper A und B zu einander wie die Körper A und B selbst

Die beschleunigenden Anziehungen aller Körper B, C, D etc. gegen A in gleichen Abständen sind nämlich nach der Voraussetzung einander gleich; dasselbe ist der Fall mit den Anziehungen aller Körper gegen B. Es verhält sich aber die absolute anziehende Kraft des Körpers A zur absoluten anziehenden Kraft des Körpers B, wie die beschleunigende Anziehung aller Körper gegen A zur beschleunigenden Anziehung aller Körper gegen B; beides für gleiche Abstände verstanden. Dasselbe Verhältniss findet zwischen der beschleunigenden Anziehung des Körpers B

gegen A, und der von A gegen B statt. Es verhält sich aber die beschleunigende Anziehung des Körpers B gegen A zu der von A gegen B, wie die Masse von A zur Masse von B, weil die bewegenden Kräfte, welche (nach Erklärung 2., 7. und 8.) aus den, auf die angezogenen Körper bezogenen, beschleunigenden Kräfte entstehen (nach Gesetz 3.) einander gleich sind. Es verhält sich daher die absolute anziehende Kraft des Körpers A zu der des Körpers B, wie die Masse von A zur Masse von B. W. z. b. w.

Zusatz 1. Wenn daher jeder einzelne der Körper A, B, C, D etc. alle übrigen mit beschleunigenden Kräften, welche sich umgekehrt wie die Quadrate der Abstände vom anziehenden Körper verhalten, anzieht; so verhalten sich die absoluten Kräfte jener Körper wie diese selbst.

Zusatz 1. Zieht jeder einzelne Körper des Systems alle übrigen mit beschleunigenden Kräften an, welche sich indirect oder direct wie irgend eine Potenz der Abstände vom anziehenden Körper verhalten, und welche Kräfte nach irgend einem gemeinsamen Gesetz aus den Abständen von einem der anziehenden Körper bestimmt werden; so verhalten sich die absoluten Kräfte jener Körper, wie die letzteren.

Zusatz 3. Wenn in einem System von Körpern, deren Kräfte im doppelten Verhältniss der Entfernungen abnehmen, die kleineren sich um den grössten in möglichst genauen Ellipsen bewegen, deren gemeinschaftlicher Brennpunkt sich im Mittelpunkte des grössten Körpers befindet; wenn sie ferner mit den, nach jenem grössten Körper gezogenen Radien vectoren Flächen beschreiben, welche den Zeiten sehr nahe proportional sind: so verhalten sich die absoluten Kräfte jener Körper zu einander entweder genau, oder sehr nahe wie die Körper, und umgekehrt. Dies folgt aus §. 109., Zusatz, in Verbindung mit Zusatz 1. dieses §.

§. 111. Anmerkung. Durch diese Sätze werden wir auf die Analogie zwischen den Centripetalkräften und den Centralkörpern, nach denen jene gerichtet zu sein pflegen, geführt. Mit der Vernunft stimmt es überein, dass Kräfte, welche nach Körpern gerichtet sind, von der Natur und Grösse der letztern abhängig sind, wie beim Magnetismus. So oft Fälle dieser Art eintreten, wird man die Anziehungen der Körper abschätzen müssen, indem man ihren einzelnen Theilen eigenthümliche Kräfte beilegt und die Summe der letztern bestimmt. Die Benennung Anziehung nehme ich hier allgemein für jeden Versuch der Körper, sich einander zu nähern, an; mag jener Versuch aus der Wirksamkeit der entweder zu einander hinstrebenden, oder mittelst ausgeschickter Geister sich gegenseitig antreibender Körper entstehen; oder mag er aus der Wirkung eines Aethers, der Luft oder irgend eines Mittels hervorgehen, welches letztere körperlich oder unkörperlich sei, und die in ihm schwimmenden Körper auf irgend eine Weise gegen einander antreibt. In demselben allgemeinen Sinne nehme ich die Benennung Stoss an, indem ich in diesem Werke nicht die physischen Gattungen und Eigenschaften der

Kräfte, sondern ihre mathematischen Grössen und Verhältnisse erwäge, wie ich solches in den Erklärungen auseinandergesetzt habe.

In der Mathematik hat man die Grösse der Kräfte und diejenigen Verhältnisse derselben zu erforschen, welche aus gewissen vorausgesetzten Bedingungen hervorgehen. Steigt man hierauf zur Physik herab, so hat man diese Verhältnisse mit den Erscheinungen zu vergleichen, um zu erfahren, welche Bedingungen der Kräfte den einzelnen Arten anziehbarer Kräfte zukommen. Hierauf kann man endlich über die Gattungen der Kräfte, und über ihre physischen Ursachen und Verhältnisse streiten.

Wir wollen daher nun sehen, durch welche Kräfte sphärische Körper, welche aus nach oben beschriebener Weise anziehbaren Theilchen bestehen, wechselseitig auf einander wirken müssen und was für Bewegungen daraus folgen.

ABSCHNITT XII.

Von den anziehenden Kräften sphärischer Körper.

§. 112. **Lehrsatz.** Sind nach den einzelnen Punkten einer sphärischen Oberfläche Centripetalkräfte gerichtet, welche in dem doppelten Verhältniss der Abstände von den Punkten abnehmen; so wird ein kleiner, innerhalb der Oberfläche befindlicher, Körper durch diese Kräfte nach keiner Seite hingezogen.

Es sei HJKL diese sphärische Oberfläche, P der innerhalb derselben befindliche kleine Körper. Man ziehe durch P nach dieser Oberfläche die beiden Linien HK und JL, welche die sehr kleinen Bogen HJ und KL umspannen. Da (nach §. 7., Zusatz 3.)

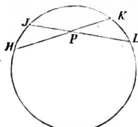


Fig. 105.

$$\triangle HPJ \sim KPL,$$

so sind jene Bogen den Abständen HP und LP proportional, und beliebige Theilchen der Oberfläche bei HJ und KL, welche von geraden, durch den Punkt P gehenden, Linien begrenzt werden, verhalten sich wie die Quadrate jener Abstände. Die Kräfte dieser Theilchen, welche auf den Körper P wirken, sind daher einander gleich, indem sie sich direct wie die Theilchen und indirect wie die Quadrate der

Abstände verhalten, und beide Verhältnisse zusammengesetzt das Verhältniss der Gleichheit bilden. Die Anziehungen, welche nach entgegengesetzten Seiten gleich stark ausgeübt werden, vernichten sich daher gegenseitig.

Auf ähnliche Weise werden alle Anziehungen auf der ganzen Oberfläche durch gleiche entgegengesetzte vernichtet, und es wird der Körper P durch diese Anziehungen nach keiner Seite hingetrieben. W. z. b. w.

§. 113. Lehrsatz. Unter denselben Bedingungen wird ein, ausserhalb der sphärischen Oberfläche befindlicher, kleiner Körper durch eine Kraft nach dem Mittelpunkte der Kugel hingezogen, welche Kraft sich umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes des kleinen Körpers vom Mittelpunkte verhält.

Es seien AHKB und ahkb zwei gleiche spärische Oberflächen, welche um die Mittelpunkte S und s und über den Durchmessern AB

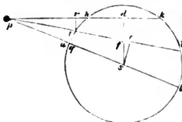


Fig. 106.

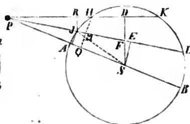


Fig. 107.

und ab beschrieben worden sind. Ferner seien P und p zwei kleine Körper, welche sich ausserhalb der Kugeln auf der Verlängerung der Durchmesser befinden. Man ziehe von den Körpern aus die Linien PHK, PJL, phk, pil, welche von den grössten Kreisen AHB und ahb gleiche und sehr kleine Bogen

HK und hk, JL und il

abschneiden. Man fälle auf jene Linien die Perpendikel

SD und sd, SE und se, JR und ir,

von denen die beiden erstern die Linien PL und pl in F und f schneiden. Endlich fälle man auf die Durchmesser die Perpendikel JQ und iq.

Da nun 1. $\begin{cases} DS = ds \\ ES = es \end{cases}$

und der verschwindende Winkel DPE = dpe, so kann man auch

2. $\begin{cases} PE = pe \\ PF = pf \\ DF = df \end{cases}$

annehmen, weil nämlich das letzte Verhältniss dieser Linien, wenn die

Winkel DPE und dpe zugleich verschwinden, das der Gleichheit ist.[52]) Nachdem dies vorausgeschickt ist, hat man nun

$$PJ : PF = RJ : DF$$

$$pf : pi = df : ri$$

und da df = DF, aus der Zusammensetzung dieser beiden Proportionen

$$3.\quad PJ \,.\, pf : PF \,.\, pi = RJ : ri$$

$$= \frown JH : \frown ih \text{ (nach §. 7., Zusatz 3.)}$$

Ferner haben wir $PJ : PS = JQ : ES$

$$ps : pi = es : iq$$

und da es = ES durch die Verbindung dieser zwei Proportionen

$$4.\quad PJ \,.\, ps : PS \,.\, pi = JQ : iq.$$

Verbindet man endlich die Proportionen 3. und 4., so erhält man

$$5.\quad PJ^2 \,.\, ps \,.\, pf : pi^2 \,.\, PS \,.\, PF = JQ \,.\, JH : iq \,.\, ih;$$

hier bezeichnen die beiden letzten Glieder der Proportion die kreisförmigen Oberflächen, welcher respective der Bogen JH, bei der Umdrehung des Halbkreises AKB um den Durchmesser AB, und ih bei der Umdrehung von akb um ab beschreibt.[53])

Nun verhalten sich nach der Voraussetzung die Kräfte, womit diese Flächen längs nach ihnen gerichteter Linien die Körper P und p anziehen,

direct wie diese Flächen und

indirect wie die Quadrate der Entfernungen der Körper von den letztern, d. h. zufolge der letzten Proportion wie

$$6.\quad pf \,.\, ps : PF \,.\, PS.$$

Diese Kräfte verhalten sich ferner zu den Seitenkräften (nachdem die Zerlegung nach Gesetze, Zusatz 2. ausgeführt worden ist), welche längs der Linien PS und ps nach den Mittelpunkten gerichtet sind, wie

$$PJ : PQ \text{ und } pi : pq,$$

d. h. weil $\triangle PJQ \sim PSF$

wie $7.\quad PS : PF \text{ und } ps : pf.$

Mithin verhält sich die Anziehung des Körpers P gegen S zu der des Körpers p gegen s, wie

$$8.\quad \frac{PF}{PS} \cdot pf \,.\, ps : \frac{pf}{ps} \cdot PF \,.\, PS = ps^2 : PS^2.$$

Auf dieselbe Weise folgt, dass die Kräfte, mit welchen die durch die Umdrehung der Bogen KL und kl entstandenen Oberflächen die Körper anziehen, sich wie

$$ps^2 : PS^2$$

verhalten. In demselben Verhältniss stehen die Kräfte aller kreisförmigen Oberflächen, in welche beide sphärische Oberflächen durch beständige Annahme von

$$sd = SD \text{ und } sc = SE$$

getheilt werden können. Durch Zusammensetzung werden die, von den ganzen sphärischen Oberflächen auf die kleinen Körper ausgeübten, Kräfte in demselben Verhältniss stehen.

§. 114. Lehrsatz. Sind nach den einzelnen Punkten einer Kugel gleiche Centripetalkräfte gerichtet, welche in dem doppelten Verhältniss der Abstände von diesen Punkten abnehmen, und ist zugleich die Dichtigkeit der Kugel und das Verhältniss ihres Durchmessers zur Entfernung des kleinen Körpers vom Mittelpunkte der Kugel gegeben; so ist die Kraft, durch welche der kleine Körper angezogen wird, dem Halbmesser der Kugel proportional.

Man denke sich zwei kleine Körper, welche getrennt durch zwei Kugeln angezogen werden und nehme an, dass die Abstände von den Mittelpunkten den Durchmessern respective proportional seien, die Kugeln aber in Theilchen zerlegt werden, welche ähnlich und in Bezug auf die Körper gleichliegend sind. Hiernach werden die Anziehungen des einen Körpers gegen einzelne Theilchen der einen Kugel sich zu den Anziehungen des andern Körpers gegen eben so viele analoge Theilchen der andern Kugel verhalten:

direct wie die Summe der Theilchen, und
indirect wie die Quadrate der Entfernungen.

Die Summe der Theilchen ist aber der Kugel, d. h. dem Cubus des Durchmessers, die Entfernung dem Durchmesser proportional; mithin verhalten sich die Kräfte direct wie die Durchmesser.

Zusatz 1. Drehen sich die Körper in Kreisen um Kugeln, welche aus gleich anziehender Materie bestehen, und sind ihre Abstände von den Mittelpunkten den Durchmessern proportional; so sind die Umlaufszeiten einander gleich.

Zusatz 2. Sind umgekehrt die Umlaufszeiten einander gleich, so sind die Abstände den Durchmessern proportional (§. 18., Zusatz 2.)

Zusatz 3. Sind nach den einzelnen Punkten zweier beliebiger ähnlicher und gleich dichter Körper gleiche Centripetalkräfte gerichtet, welche im doppelten Verhältniss der Abstände von den Punkten abnehmen; so verhalten sich die Kräfte, mit denen kleine Körper, welche gegen jene festen Körper ähnlich liegen, von ihnen angezogen werden, wie die Durchmesser der anziehenden Körper.

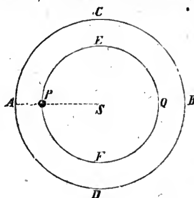


Fig. 108.

§. 115. Lehrsatz. Wenn nach den einzelnen Punkten einer Kugel gleiche Centripetalkräfte gerichtet sind, welche im doppelten Verhältniss der Entfernung von den Punkten abnehmen; so wird ein innerhalb der Kugel befindlicher Körper durch eine Kraft angezogen, welche seinem Abstande vom Mittelpunkte proportional ist.

In der Kugel ACBD, welche um den Mittelpunkt S beschrieben ist, befinde sich der kleine Körper P, und man denke sich aus demselben Mittelpunkte S eine innere Kugel PEQF zum Halbmesser SP beschrieben. Offenbar werden nach §. 112. die concentrischen sphärischen Oberflächen, aus denen der Unterschied AEBF beider Kugeln gebildet ist, nicht auf den Körper P wirken, indem ihre Anziehungen einzeln durch gleiche entgegengesetzte aufgehoben werden. Es bleibt demnach nur die Anziehung der inneren Kugel PEQF übrig und diese ist nach §. 114. dem Abstande PS proportional. W. z. b. w.

§. 116. Anmerkung. Die Oberflächen, aus denen die festen Körper gebildet werden, sind hier nicht rein mathematische, sondern so dünne Schalen, dass ihre Dicke dem Nichts ähnlich wird. Sie sind nämlich verschwindende Schalen, aus denen zuletzt die Kugel besteht, wenn ihre Anzahl ins Unendliche vermehrt und ihre Dicke ins Unendliche vermindert wird, nach der anfangs in den allgemeinen Lehnsätzen erläuterten Methode. Auf ähnliche Weise hat man unter Punkten, aus denen man sich Linien, Flächen und Körper gebildet denkt, gleiche Theilchen von zu vernachlässigender Grösse zu verstehen.

§. 117. Lehrsatz. Unter denselben Voraussetzungen wird ein ausserhalb der Kugel befindlicher kleiner Körper durch eine Kraft angezogen, welche dem Quadrat seines Abstandes vom Mittelpunkte umgekehrt proportional ist.

Man denke sich die Kugel in unzählige concentrische sphärische Oberflächen getheilt, alsdann werden die, von jeder derselben auf den Körper ausgeübten, Anziehungen nach §. 113. dem Quadrat seines Abstandes vom Mittelpunkte umgekehrt proportional sein. Durch Zusammensetzung wird daher ihre Summe, d. h. die Anziehung der ganzen Kugel in demselben Verhältniss stehen. W. z. b. w.

Zusatz 1. Die Anziehungen, welche homogene Kugeln in gleichen Abständen von ihren Mittelpunkten ausüben, verhalten sich daher wie die Kugeln. Sind die Abstände nämlich den Durchmessern proportional, so verhalten sich die Kräfte, nach §. 114., wie diese Durchmesser. Verkleinert man nun die grössere Entfernung in jenem Verhältniss, so wird, indem auf diese Weise die Entfernungen einander gleich gemacht werden, die Anziehung im doppelten Verhältniss vergrössert, und steht daher zur Anziehung der andern im dreifachen Verhältniss, d. h. im Verhältniss der Kugeln.[51])

Zusatz 2. In beliebigen Abständen verhalten sich die Anziehungen
direct wie die Kugeln,
indirect wie die Quadrate der Abstände von ihren Mittelpunkten.

Zusatz 3. Wird ein ausserhalb einer homogenen Kugel gelegener kleiner Körper durch eine Kraft angezogen, welche dem Quadrat seines Abstandes vom Mittelpunkte umgekehrt proportional ist, und besteht die Kugel aus anziehenden Theilchen; so nimmt die Kraft eines jeden Theilchens ab im doppelten Verhältniss des Abstandes von demselben.

§. 118. Lehrsatz. Wenn nach den einzelnen Punkten einer Kugel gleiche Centripetalkräfte gerichtet sind, welche im doppelten Verhältniss des Abstandes von diesen Punkten abnehmen; so wird irgend eine andere ähnliche Kugel durch eine Kraft angezogen, welche sich umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes beider Mittelpunkte verhält.

Die Anziehung eines jeden Theilchens verhält sich nämlich umgekehrt wie das Quadrat seiner Entfernung vom Mittelpunkte der anziehenden Kugel (nach §. 113.), sie ist daher dieselbe, als wenn die ganze anziehende Kraft von einem einzigen kleinen, im Mittelpunkte dieser Kugel gelegenen, Körper ausströmte. Diese Anziehung ist aber so gross, als diejenige, welche umgekehrt der kleine Körper erleiden würde, wenn er durch die einzelnen Theilchen der angezogenen Kugel mit derselben Kraft angezogen würde, und die letztere Anziehung würde (nach §. 117.) dem Quadrat der Entfernung des kleinen Körpers vom Mittelpunkte der Kugel umgekehrt proportional sein; folglich steht die ihr gleiche Kraft in demselben Verhältniss. W. z. b. w.

Zusatz 1. Die Anziehungen, welche Kugeln auf andere Kugeln ausüben, verhalten sich zusammengesetzt

direct wie die anziehenden Kugeln und

indirect wie die Quadrate der Entfernungen der Mittelpunkte der angezogenen Kugeln von denen der anziehenden.

Zusatz 2. Dasselbe gilt für den Fall, dass die angezogene Kugel ebenfalls anzieht. Denn die einzelnen Punkte der letzteren ziehen die einzelnen Punkte der anderen Kugel mit derselben Kraft an, mit welcher sie von diesen angezogen werden. Da nun bei jeder Anziehung (nach Gesetz 3.) sowohl der anziehende, als der angezogene Punkt angetrieben wird; so verdoppelt sich die Kraft der wechselseitigen Anziehung, indem das Verhältniss dasselbe bleibt.

Zusatz 3. Alles, was oben über die Bewegung von Körpern um den Brennpunkt der Kegelschnitte bewiesen worden ist, bleibt gültig, wenn die anziehende Kraft in den Brennpunkt gesetzt wird und die Körper sich ausserhalb der Kugel bewegen.

Zusatz 4. Dasjenige aber, was über die Bewegung der Körper um den Mittelpunkt der Kegelschnitte bewiesen worden ist, bleibt für den Fall gültig, dass die Körper sich innerhalb der Kugel bewegen.

§. 119. Lehrsatz. Kugeln sind in der Richtung vom Mittelpunkt gegen den Umfang (was Dichtigkeit und Anziehungskraft der Materie betrifft) beliebig unähnlich, hingegen in demselben Abstande vom Mittelpunkte überall ähnlich, und die anziehende Kraft eines jeden Punktes nimmt im doppelten Verhältniss des Abstandes vom angezogenen Körper ab. Die ganze Kraft, womit eine derartige Kugel eine andere derselben Art anzieht, verhält sich alsdann umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung beider Mittelpunkte von einander.

Es seien AB, CD, EF u. s. w. mehrere concentrische Kugeln, von denen die innere, den äusseren hinzugefügt, eine gegen das Centrum

dichtere Materie bildet, oder umgekehrt, wenn sie fortgenommen wird, eine lockerere Materie übrig lässt. Jede einzelne derselben wird nach §. 118. jede einzelne von beliebig vielen anderen concentrischen und ähnlichen Kugeln

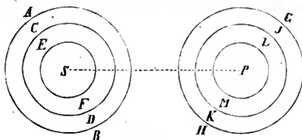


Fig. 109.

GH, JK, LM u. s. w., mit einer Kraft anziehen, welche sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung SP verhält. Durch Zusammensetzung oder Theilung findet man, dass die Summe aller jener Kräfte, oder der Unterschied der einen und der anderen, d. h. die Kraft, mit welcher die ganze, aus beliebigen concentrischen oder Unterschieden concentrischer zusammengesetzte Kugel AB die ganze eben so gebildete Kugel GH anzieht, in demselben Verhältniss stehen wird. Man vermehre nun die Anzahl der concentrischen Kugeln in's Unendliche so, dass die Dichtigkeit der Materie zugleich mit der anziehenden Kraft, in der Richtung vom Umfange zum Centrum, nach irgend einem Gesetze zu- oder abnimmt. Durch Hinzufügung von nicht anziehender Materie ergänze man überall die mangelnde Dichtigkeit, so dass die Kugeln die beliebige erwünschte Form annehmen; alsdann wird auch noch die Kraft, womit eine derselben die andere anzieht (nach obigem Beweise), in demselben umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung stehen. W. z. h. w.

Zusatz 1. Wenn mehrere Kugeln derselben Art, welche in allem einander ähnlich sind, sich wechselseitig anziehen; so verhalten sich die beschleunigenden Anziehungen, welche je eine auf die andere in gleichen und beliebigen Abständen der Mittelpunkte ausübt, wie die anziehenden Kugeln.

Zusatz 2. In beliebigen ungleichen Abständen verhalten sie sich
direct wie die anziehenden Kugeln, und
indirect wie die Quadrate der Abstände.

Zusatz 3. Die bewegenden Anziehungen aber, oder die Gewichte der einzelnen Kugeln gegen die anderen verhalten sich in gleichen Abständen der Mittelpunkte, wie die anziehenden und angezogenen Kugeln zusammengenommen, d. h. wie ihre Produkte.

Zusatz 4. In ungleichen Abständen verhalten sie sich
direct wie diese Produkte, und
indirect wie die Quadrate der Abstände ihrer Mittelpunkte.

Zusatz 5. Dasselbe gilt für den Fall, dass die Anziehung aus

der anziehenden und wechselseitig wirkenden Kraft beider Kugeln hervorgeht. Durch beide Kräfte wird nämlich die Anziehung verdoppelt, indem das Verhältniss unverändert bleibt.

Zusatz 6. Drehen sich einige Kugeln dieser Art um andere ruhende, und zwar jede um eine andere, und sind die Abstände zwischen den Mittelpunkten der sich drehenden und ruhenden Kugeln den Durchmessern der letzteren proportional, so sind die Umlaufszeiten gleich.

Zusatz 7. Sind umgekehrt die Umlaufszeiten gleich, so sind die Abstände den Durchmessern proportional.

Zusatz 8. Alles, was früher über die Bewegung von Körpern um die Brennpunkte der Kegelschnitte bewiesen worden ist, gilt noch, wenn sich eine anziehende Kugel von der eben beschriebenen Form und Bedingung im Brennpunkte befindet.

Zusatz 9. Auch gilt dasselbe, wenn die sich bewegenden Kugeln selbst anziehende von der eben beschriebenen Beschaffenheit sind.

§. 120. Lehrsatz. Wenn nach den einzelnen Punkten von Kugeln Centripetalkräfte gerichtet sind, welche sich wie die Abstände der Punkte von den angezogenen Körpern verhalten; so ist die zusammengesetzte Kraft, womit zwei Kugeln sich wechselseitig anziehen, dem Abstande der Mittelpunkte beider proportional.

Erster Fall. Es sei ACBD die Kugel, S ihr Mittelpunkt, P der der angezogene kleine Körper, PASB die durch den Mittelpunkt des kleinen Körpers gehende Axe der Kugel. Ferner seien EF und ef zwei Ebenen, welche die Kugel schneiden und in gleichen Abständen von ihrem Mittelpunkte auf der vorherbezeichneten Axe senkrecht stehen, G und g die Durchschnittspunkte dieser Ebenen mit der Axe und H ein beliebiger Punkt in der Ebene EF.

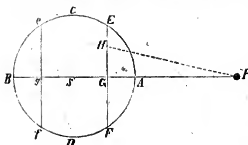


Fig. 110.

Die Centripetalkraft, welche der Punkt H auf den Körper P längs der Linie PH ausübt, ist dem Abstande PH und (nach Gesetze, Zusatz 2.) die längs der Linie PG oder gegen das Centrum S gerichtete Kraft der Länge PG proportional. Daher verhält sich die Kraft aller in der Ebene EF gelegenen Punkte, d. h. der ganzen Ebene, wodurch der Körper gegen das Centrum S gezogen wird, wie die Anzahl jener Punkte und der Abstand PG zusammengenommen, oder wie das Produkt aus der Ebene EF selbst in den Abstand PG. Eben so verhält sich die Kraft, mit welcher die Ebene ef den Körper P gegen das Centrum S

hinzieht, wie das Produkt aus der Ebene ef in den Abstand Pg, wofür man, weil

$$ef = EF$$

ist, auch das Produkt

$$EF \,.\, Pg$$

setzen kann. Hieraus ergiebt sich, dass die Summe der Kräfte, mit welchen beide Ebenen vereint den Körper P gegen das Centrum S hinziehen, sich verhält wie

$$EF\ (PG + Pg) = 2 \,.\, EF \,.\, PS.$$

Auf gleiche Weise findet man, dass die Kräfte aller Ebenen in der ganzen Kugel, welche auf beiden Seiten gleich weit vom Centrum abstehen, sich verhalten wie die Summe aller Ebenen, multiplicirt in den Abstand PS,

d. h. wie das Produkt aus der ganzen Kugel in den Abstand PS ihres Mittelpunktes S vom kleinen Körper P. W. z. B. w.

Zweiter Fall. Zieht nun der kleine Körper P die Kugel ABCD an, so folgt auf dieselbe Weise, dass die Kraft, mit welcher die Kugel angezogen wird, sich wie der Abstand PS verhält. W. z. b. w.

Dritter Fall. Man denke sich eine zweite Kugel, welche aus unzähligen kleinen Körpern P zusammengesetzt sei. Da die Kraft, mit welcher jeder derselben angezogen wird, sich wie die Entfernung eines jeden Körpers vom Mittelpunkte der anziehenden Kugel, multiplicirt in diese selbst, verhält, und da sie folglich dieselbe ist, welche von einem einzigen kleinen, im Mittelpunkte der Kugel befindlichen Körper ausgeben würde; so wird die ganze Kraft, durch welche alle Körperchen in der zweiten Kugel, d. h. diese zweite ganze Kugel angezogen wird, dieselbe sein, als wenn die letztere durch eine Kraft angezogen würde, welche von einem, im Mittelpunkte der ersten Kugel befindlichen, kleinen Körper ausginge. Diese Kraft wird daher dem Abstande der Mittelpunkte beider Kugeln proportional sein. W. z. b. w.

Vierter Fall. Ziehen die Kugeln einander wechselweise an, so behält die verdoppelte Kraft das vorige Verhältniss bei. W. z. b. w.

Fünfter Fall. Man nehme nun den Körper P innerhalb der Kugel ACBD an. Die Kraft, mit welcher die Ebene ef ihn anzieht, ist alsdann dem Produkte

$$ef \,.\, PG,$$

und die entgegengesetzte Kraft der Ebene EF dem Producte

$$EF \,.\, PG$$

proportional. Die aus beiden zusammengesetzte Kraft verhält sich daher wie die Differenz der Produkte, d. h. wie

Fig 111.

$$\pm\ [EF . PG - ef . Pg]$$
$$= \pm\ EF\ [PG - Pg]\ \text{(nach EF = ef)}$$
$$= \pm\ 2EF . PS$$
$$= \pm\ (EF + ef) . PS.$$

Auf dieselbe Weise findet man, dass die Anziehung aller Ebenen EF und ef in der ganzen Kugel, d. h. die Anziehung der Kugel sich verhält, wie die Summe aller Ebenen oder die ganze Kugel, multiplicirt in den Abstand PS des Körpers vom Centrum der Kugel. W. z. h. w.

Sechster Fall. Denkt man sich eine zweite, aus unzähligen kleinen Körpern P bestehende, Kugel, welche sich innerhalb des erstern ACBD befindet, so wird wie oben bewiesen, dass die Anziehung, sowohl die einfache von einer Kugel gegen die andere ausgeübte, als auch die doppelte, welche aus der wechselseitigen Einwirkung beider Kugeln auf einander hervorgeht, sich wie der Abstand PS der Mittelpunkte verhält. W. z. b. w.

§. 121. Lehrsatz. Sind zwei Kugeln, in der Richtung vom Centrum gegen die Oberfläche, irgendwie unähnlich und ungleich, dagegen in demselben Abstande vom Mittelpunkte überall ähnlich, und verhält sich die anziehende Kraft eines jeden Punktes wie der Abstand des angezogenen Körpers von ihm; so ist die ganze Kraft, mit welcher zwei Kugeln dieser Art einander wechselseitig anziehen, dem Abstande ihrer Mittelpunkte von einander proportional.

Der Beweis folgt eben so aus §. 120., wie der Beweis des letzteren aus §. 118. abgeleitet worden ist.

Zusatz. Dasjenige, was in den §§. 27. und 105. über die Bewegung von Körpern um die Mittelpunkte der Kegelschnitte bewiesen worden ist, gilt auch noch, im Falle alle Anziehungen durch die Kraft sphärischer Körper von der eben beschriebenen Beschaffenheit entstehen und die angezogenen Körper ebenso beschaffen sind.

§. 122. Anmerkung. Die zwei ausgezeichneten Fälle von Anziehungen habe ich jetzt auseinandergesetzt, nämlich wenn die Centripetalkräfte im doppelten Verhältniss der Entfernung abnehmen und wenn sie im einfachen Verhältniss derselben, zunehmen. In beiden Fällen bewirken sie, dass die beiden Körper sich in Kegelschnitten bewegen, und setzen Centripetalkräfte kugelförmiger Kräfte zusammen, welche nach demselben Gesetze in der Richtung nach dem Centrum zu- und abnehmen, wie sie selbst. Dies ist bemerkenswerth.

Die übrigen Fälle, welche weniger elegante Schlüsse darbieten, durchzugehen, würde zu weitläufig sein. Ich ziehe es vor, sie alle zugleich, wie folgt, unter einer allgemeinen Methode zusammenzufassen und zu bestimmen.

§. 123. Lehrsatz. Aus dem Mittelpunkte S wird ein beliebiger Kreis AEB gezogen, und man schlägt aus P als Centrum die beiden Kreisbogen EF und ef, welche den ersteren in den Punkten E und e, die Linie PS in F und f schneiden. Fällt man auf PS die Perpendikel ED und ed; so wird, wenn der Abstand der Bogen EF und ef in's Un-

endliche verkleinert ist, das letzte Verhältniss der verschwindenden Linie Dd : zur verschwindenden Linie Ff = PE : PS.

Die Linie Pe schneide den Bogen EF in q, ferner denke man sich

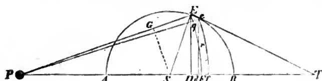


Fig. 112.

die gerade Linie Ee, welche mit dem verschwindenden Bogen Ee zusammenfällt, bis zum Durchschnittspunkt T mit PS verlängert. Fällt man endlich aus S auf PE das Perpendikel SG, so ist

$$\triangle \text{ EDT} \sim \text{edT} \sim \text{EDS};$$

mithin 1. Dd : Ee = DT : ET = DE : ES.

Nach §. 8. und §. 7., Zusatz 3., ist aber

$$\triangle \text{ Eqe} \sim \text{ESG},$$

also 2. Ee : eq = ES : GS,

und, weil eq = Ff, durch Verbindung beider Proportionen

3. Dd : Ff = DE : GS,

sowie, weil $\triangle$ PDE $\sim$ PGS

4. Dd : Ff = PE : PS. W. z. b. w.

§. 124. Lehrsatz. Die Oberfläche EFfe (vor. Figur), welche wegen ihrer in's Unendliche verkleinerten Breite eben verschwinden will, beschreibt bei der Umdrehung um ihre Axe PS einen concav-convexen sphärischen Körper, nach dessen einzelnen Theilchen gleiche Centripetalkräfte gerichtet sind. Die Kraft, mit welcher dieser Körper den in P gelegenen kleinen Körper anzieht, steht alsdann in einem Verhältniss, welches aus dem festen Körper

$$\text{DE}^2 . \text{Ff}$$

und derjenigen Kraft zusammengesetzt ist, mit welcher ein auf Ff liegendes Theilchen jenen kleinen Körper anziehen würde.

Betrachten wir zuerst die Kraft der sphärischen Oberfläche EF, welche durch Umdrehung des Bogens EF erzeugt wird. Der letztere werde durch die Linie de irgendwo in r geschnitten; alsdann verhält sich der ringförmige Theil dieser Oberfläche, welcher durch Umdrehung des Bogens rE erzeugt wird, wie die Linie Dd, wenn der Radius PE unverändert bleibt. (Dies hat Archimedes in seinem Buche über Kugel und Cylinder bewiesen.)[55])

Die längs der Linie PE oder Pr wirkende Kraft dieses Theiles verhält sich wie dieser ringförmige Theil der Oberfläche selbst, d. h. wie die Linie Dd, oder was dasselbe ist, wie das Rechteck aus dem gegebenen

Radius PE und der Linie Dd. Die Kraft hingegen, welche längs der Linie PS nach dem Centrum S hin wirkt, ist in dem Verhältniss

$$PD : PE$$

kleiner und daher proportional

$$PE . Dd . \frac{PD}{PE} = PD. Dd.$$

Nun denke man sich die Linie DF in unzählige kleine Stücke getheilt, welche alle Dd genannt werden mögen; alsdann wird die Oberfläche FE in eben so viele gleiche Ringe getheilt, deren Kräfte sich wie die Summe aller PD. Dd. verhalten werden. Da wir alle Dd einander gleich angenommen haben und daher als gegeben betrachten können, so verhalten sich diese Kräfte wie die Summe aller PD, multiplicirt in Dd, d. h. wie

$$\tfrac{1}{2}(FP^2 - PD^2)^{56)} = \tfrac{1}{2}(PE^2 - PD^2) = \tfrac{1}{2} DE^2,$$

oder kurz wie DE^2.

Multiplicirt man die Oberfläche FE in die Höhe Ff, so verhält sich die vom Körper EFfe auf P ausgeübte Kraft wie

$$DE^2. Ff,$$

d. h. wenn die Kraft gegeben ist, welche ein gegebenes Theilchen Ff im Abstande PF auf P ausübt. Ist diese Kraft nicht gegeben, so verhält sich die erstere Kraft, wie das Produkt aus $DE^2 . Ff$ in diese nicht gegebene Kraft zusammengesetzt. W. z. b. w.

§. 125. Lehrsatz. Nach den einzelnen gleichen Theilen einer um das Centrum S beschriebenen Kugel AEB sind gleiche Centripetalkräfte gerichtet. Auf der Axe AB der Kugel, auf welcher sich ein kleiner Körper P befindet, werden in den einzelnen Punkten D Perpendikel DE errichtet, welche die Kugelfläche in E schneiden und auf denselben Längen DN angenommen, welche sich zusammengesetzt wie

$$\frac{DE^2 . PS}{PE}$$

und diejenige Kraft verhalten, welche das im Abstande PE auf der Axe gelegene Theilchen der Kugel auf P ausübt. Alsdann verhält sich die ganze Kraft, mit welcher der Körper P gegen die Kugel gezogen wird, wie die Fläche, welche durch die Axe AB und die Curve ANB, worin der Punkt N beständig liegt, eingeschlossen wird.

Bei derselben Construction, wie in den beiden vorhergehenden §§. denke man sich die Axe AB in unzählige gleiche Stücke Dd und die ganze Kugel in eben so viele concav-convexe Schalen EFfe getheilt und die Perpendikel DN und dn errichtet. Nach §. 124. verhält sich die Kraft, mit welcher die Schale EFfe den kleinen Körper P anzieht, wie $DE^2 . Ff$ und die von einem Theilchen im Abstande PE oder PF ausgeübte Kraft zusammengenommen. Nach §. 123. ist aber

$$Dd : Ff = PE : PS,$$

also $$Ff = \frac{PS . Dd}{PE} \text{ und } DE^2 . Ff = Dd . \frac{DE^2 . PS}{PE}.$$

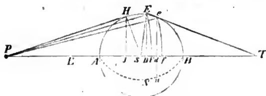


Fig. 113.

Demnach verhält sich die Kraft der Schale EFfe wie

$$Dd . \frac{DE^2 . PS}{PE}$$ und die in der Entfernung PF durch Ein Theilchen ausgeübte Kraft zusammen genommen.

Da nach der Voraussetzung DN dem Ausdrucke

$$\frac{DE^2 . PS}{PE}$$

proportional ist, so verhält sich die erstere Kraft wie

$$Dd . DN,$$

d. h. wie die verschwindende Fläche DNnd.

Es verhalten sich daher alle von den Schalen auf P ausgeübten Kräfte wie die ganze Fläche ABNA. W. z. b. w.

Zusatz 1. Ist die nach den einzelnen Theilen gerichtete Centripetalkraft immer dieselbe in allen Entfernungen, und ist DN proportional $\frac{DE^2 . PS}{PE}$; so verhält sich die ganze Kraft, mit welcher der kleine Körper durch die Kugel angezogen wird, wie die Fläche ABNA.

Zusatz 2. Verhält sich die Centripetalkraft der einzelnen Theile umgekehrt wie der Abstand des durch sie angezogenen Körper von ihnen, und ist DN dem Ansdrucke

$$\frac{DE^2 . PS}{PE^2}$$

proportional; so verhält sich die ganze Kraft, mit welcher die Kugel den Körper P anzieht, wie die Fläche ABNA.

Zusatz 3. Verhält sich die Centripetalkraft der einzelnen Theilchen umgekehrt wie der Cubus des Abstandes, und mit DN proportional

$$\frac{DE^2 . PS}{PE^4};$$

so verhält sich die Kraft der ganzen Kugel wie die Fläche

ABNA.

Zusatz 4. Verhält sich allgemein die von den einzelnen Theilen auf den Körper ausgeübte Centripetalkraft umgekehrt wie die Grösse V, ist DN aber proportinal

$$\frac{DE^2 . PS}{PE . V};$$

so verhält sich die ganze Kraft, durch welche der Körper gegen die Kugel gezogen wird, wie die Fläche ABNA.

§. 126. **Aufgabe.** Unter Voraussetzung der vorhergehenden Bedingungen, soll der Flächeninhalt von ABNA bestimmt werden.

Man ziehe vom Punkt P an die Kugel die Tangente PH, und fälle von H das Perpendikel HJ auf die Axe AB. Hierauf halbire man PJ in L; alsdann ist

$$1.\quad PE^2 = PS^2 + SE^2 + 2\,PS\,.\,SD.$$

Da ferner $\triangle SPH \sim SHJ$,

so ist $2.\quad SE^2 = SH^2 = PS\,.\,JS,$

also nach 1. und 2.

$$PE^2 = PS^2 + PS\,.\,JS + 2\,PS\,.\,SD$$
$$= PS\,[PS + JS + 2\,SD]$$
$$= PS\,[PL + LJ + JS + JS + 2\,.\,SD]$$

oder weil $PL = JL$ und $PL + JS = LJ + JS = LS$

$$PE^2 = PS\,[2\,.\,LS + 2\,.\,SD]$$
$$3.\quad PE^2 = PS\,.\,2LD.$$

Ferner ist $DE^2 = SE^2 - SD^2$

$$= SE^2 - LD^2 + 2\,LD\,.\,LS - LS^2,$$

oder da $LS^2 - SE^2 = LS^2 - SB^2 = LB\,.\,LA$

$$4.\quad DE^2 = 2\,LD\,.\,LS - LD^2 - LB\,.\,LA.$$

Hiernach wird die Grösse

$$\frac{DE^2\,.\,PS}{PE\,.\,V},$$

welche nach §. 125., Zusatz 4. der Ordinate DN proportional ist,

$$= \frac{2\,.\,LD\,.\,LS\,.\,PS}{PE\,.\,V} - \frac{LD^2\,.\,PS}{PE\,.\,V} - \frac{LB\,.\,LA\,.\,PS}{PE\,.\,V}.$$

Schreibt man statt V das umgekehrte Verhältniss der Centripetalkraft, und statt PE (nach 3.) die mittlere Proportionale zwischen PS und 2 LD; so gehen diese drei Theile in die Ordinate eben so vieler Curven über, deren Flächeninhalt nach den bekannten Methoden gefunden wird.

Erstes Beispiel. Verhält sich die nach den einzelnen Theilen der Kugel gerichtete Centripetalkraft umgekehrt wie der Abstand, so setze man $V = PE$ und $PE^2 = 2PS\,.\,LD$,

und es wird DN proportional

$$\frac{2\,LD\,.\,LS\,.\,PS}{2\,PS\,.\,LD} - \frac{LD^2\,.\,PS}{2PS\,.\,LD} - \frac{LB\,.\,LA\,.\,PS}{2\,PS\,.\,LD}$$
$$= LS - {}^1\!/_2\,LD - \frac{AL\,.\,BL}{2LD}.$$

Man setze DN gleich dem doppelten Werthe dieses Ausdruckes, also

$$DN = 2\,.\,LS - LD - \frac{AL\,.\,BL}{LD};$$

alsdann beschreibt der constante Theil dieser Ordinate

$$2\,.\,LS,$$

indem er über die Länge AB fortgeführt wird, das Rechteck

$$2LS \,.\, AB.$$

Der unbestimmte Theil LD beschreibt, indem er in stetiger Bewegung über dieselbe Länge so fortgeführt wird, dass bei der Zu- oder Abnahme die Ordinate stets = LD bleibe, die Fläche

$$\frac{LB^2 - LA^2}{2}{}^{57)} = LS \,.\, AB.$$

Subtrabirt man dieselbe von der vorbergehenden Fläche $2 \,.\, LS \,.\, AB$, so bleibt die Fläche $LS \,.\, AB$ übrig.

Der dritte Theil $\frac{AL \,.\, LB}{LD}$ wird, wenn er ebenso perpendikulär über dieselbe Länge AB fortgeführt wird, eine byperbolische Fläche[58]) beschreiben, welche von der Fläche

$$LS \,.\, AB$$

abgezogen werden muss, damit die gesuchte Fläche ABNA übrig bleibe.

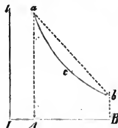


Fig. 114.

Es ergiebt sich daber folgende Construction der Aufgabe.

In den Punkten L, A, und B errichte man die Perpendikel

$$Ll,$$
$$Aa = LB$$
$$Bb = LA,$$

zu Ll und LB als Asymptoten beschreibe man durch die Punkte a und b die Hyperbel acb und ziehe die Sehne ab. Alsdann ist die Fläche acba = ABNA.

Zweites Beispiel. Verhält sich die nach den einzelnen Theilen der Kugel gerichtete Centripetalkraft umgekehrt wie der Cubus des Abstandes, oder was dasselbe ist,

indirect wie dieser Cubus und
direct wie eine constante Fläche;

so setze man $V = \frac{PE^3}{2 \,.\, AS^2}$

und wie vorhin $PE^2 = 2PS \,.\, LD$.

Alsdann wird DN proportional

$$2. \quad \frac{LS \,.\, LD \,.\, PS}{PE \,.\, \frac{PE^3}{2 \,.\, AS^2}} - \frac{LD^2 \,.\, PS}{PE \,.\, \frac{PE^3}{2 \,.\, AS^2}} - \frac{LA \,.\, LB \,.\, PS}{PE \,.\, \frac{PE^3}{2 \,.\, AS^2}}$$

$$= \frac{LS \,.\, AS^2}{PS \,.\, LD} - \frac{AS^2}{2 \,.\, PS} - \frac{LA \,.\, LB \,.\, AS^2}{2 \,.\, PS \,.\, LD^2}$$

d. h. weil $PS : AS = AS : SJ$, also $\frac{AS^2}{PS} = SJ$,

$$\frac{LS \,.\, SJ}{LD} - {}^1\!/_2\, JS - \frac{LA \,.\, LB \,.\, SJ}{2LD^2}.$$

Werden die drei Theile dieses Abdruckes über die Länge AB fortgeführt, so erzeugt der erste

$$\frac{LS \, . \, SJ}{LD}$$

eine hyperbolische Fläche.[59])
Der zweite Theil $\frac{1}{2} JS$
erzeugt das Rechteck $\frac{1}{2} AB \, . \, JS$;
der dritte Theil $\frac{LA \, . \, LB \, . \, SJ}{2 \, LD^2}$
bringt die Fläche

$$\frac{AL \, . \, LB \, . \, JS}{2 \, . \, LA} - \frac{AL \, . \, LB \, . \, JS}{2 \, LB} \text{ [60]) } = \frac{1}{2}(LB - LA) \, JS = \frac{1}{2} AB \, . \, JS$$

hervor.

Von der ersten Fläche subtrahire man die Summe der zweiten und dritten Fläche, welche Summe

$$= AB \, . \, JS = 2 \, . \, AS \, . \, JS$$

wird; alsdann stellt der Rest die gesuchte Fläche ABNA dar. Hiernach ergiebt sich auch folgende Construction der Aufgabe. In den Punkten L, A, S, B errichte man die Perpendikel

$$Ll, \; Aa, \; Ss = JS, \; Bb$$

und ziehe durch s zu den Asymptoten Ll und LB die Hyperbel asb, welche die Perpendikel Aa und Bb in a und b schneidet. Subtrahirt man nun von der hyperbolischen Fläche Aa sb B das Rechteck $2 \, . \, AS \, . \, JS$, so bleibt die gesuchte Fläche ABNA übrig.

Fig. 115.

Drittes Beispiel. Nimmt die nach den einzelnen Theilen der Kugel gerichtete Centripetalkraft im vierfachen Verhältniss der Abstände ab, so setze man

$$V = \frac{PE^4}{2 \, . \, AS^4},$$

worauf man, indem

$$PE = \sqrt{2 \, . \, PS \, . \, LD}$$ gesetzt wird, für DN

das Verhältniss

$$\frac{LS \, . \, JS^{3/2}}{\sqrt{2} \, . \, LD^{3/2}} - \frac{JS^{3/2}}{2\sqrt{2} \, . \, LD^{1/2}} - \frac{LA \, . \, LB \, . \, JS^{3/2}}{2\sqrt{2} \, . \, LD^{5/2}}$$

erhält. Führt man die drei Theile desselben über die Länge AB fort, so erhält man für sie respective folgende Flächenräume:

$$\frac{\sqrt{2} . \, LS \; JS^{3/2}}{LA^{1/2}} - \frac{\sqrt{2} . \, LS . \, JS^{3/2}}{LB^{1/2}}, \quad \frac{LB^{1/2} . \, JS^{3/2} - LA^{1/2} . \, JS^{3/2}}{\sqrt{2}}, \quad \frac{LA \, . \, SB \, . \, JS^{3/2}}{3\sqrt{2} \, LA^{3/2}}$$

$$- \frac{LA \, . \, LB \, . \, JS^{3/2}}{3\sqrt{2} \, LB^{3/2}} \text{ [61])}.$$

Reducirt man dieselben gehörig, und subtrahirt man die beiden letzten vom ersten, so erhält man

$$\frac{4.\ SJ^3}{3.\ LJ}$$ [62])

Die ganze Kraft, durch welche der Körper P gegen den Mittelpunkt gezogen wird, ist daher, weil

$$LJ = \tfrac{1}{2} PJ,$$

proportional

$$\frac{SJ^3}{PJ},$$

d. h. weil. $SJ = \frac{AS^2}{PS}$ und so $\frac{SJ^3}{PJ} = \frac{AS^6}{PS^3 . PJ^2}$,

wo AS constant, jene Kraft umgekehrt proportional

$$PS^3 . PJ.$$

Nach derselben Methode kann man die Anziehung eines innerhalb der Kugel gelegenen Körpers bestimmen. Kürzer geschieht dies aber durch den folgenden Lehrsatz.

§. 127. Lehrsatz. Werden, wie in der Figur der vorhergehenden Aufgabe, die Linien SJ, SA, SP stetig proportional angenommen, so verhält sich die Anziehung, welche ein innerhalb der Kugel in I befindlicher Körper erleidet, zu der entsprechenden im Punkt P zusammengesetzt wie

die Quadratwurzeln aus den Abständen JS und PS vom Centrum und die Quadratwurzeln aus den, in P und J nach dem Centrum gerichteten Centripetalkräften.

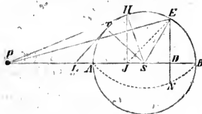


Fig. 116.

Verhalten sich etwa die Centripetalkräfte einzelner Theile der Kugel umgekehrt wie die Abstände des durch sie angezogenen Körpers, so verhält sich die Kraft, mit welcher der Körper im Punkt J durch die ganze Kugel angezogen wird, zu derjenigen, mit welcher ihn dieselbe in P anziehen würde, zusammengenommen wie

$$\sqrt{JS} : \sqrt{PS},$$

und wie die Quadratwurzel aus der Centripetalkraft, welche im Punkt J durch ein im Centrum befindliches Theilchen ausgeübt wird, zur Quadratwurzel aus der im Punkt P eben so ausgeübten Kraft, d. h. wie

$$\frac{1}{\sqrt{JS}} : \frac{1}{\sqrt{PS}},$$

Das zusammengesetzte Verhältniss wird daher gleich

$$1 : 1 ;$$

mithin sind die auf J und P von der ganzen Kugel ausgehenden Anziehungen einander gleich.

Verhalten sich die Kräfte einzelner Theile der Kugel **umgekehrt** wie die Quadrate der Entfernungen, so schliesst man auf ähnliche Weise, dass die Anziehung in J sich zu der in P verhält, wie

$$SP : SA. $$ [63]

Verhalten sich jene Kräfte **umgekehrt** wie die Cuben der Entfernungen, so erhält man das gegenseitige Verhältniss der Anziehungen in J und P $= SP^2 : SA^2$. [64]

Verhalten sich die Kräfte **umgekehrt** wie die Biquadrate der Entfernungen, so ergiebt sich das zusammengesetzte Verhältniss

$$SP^3 : SA^3.$$ [65]

In diesem letztern Falle verhält sich nun die Anziehung im Punkt P **umgekehrt** wie $SP^3 . PJ$ (§. 126., drittes Beispiel), also **direct** wie

$$\frac{1}{SP^3 . PJ};$$

mithin wird die Anziehung im Punkt J proportional

$$\frac{SP^3}{SA^3} \cdot \frac{1}{SP^3 . PJ} = \frac{1}{SA^3 . PJ},$$

d. h. (weil SA^3 constant ist) **umgekehrt** PJ proportional. Auf ähnliche Weise kann man in's Unendliche fortfahren.

Der Lehrsatz wird folgendermassen bewiesen.

Bei der vorhergehenden Construction befinde sich der Körper im beliebigen Punkte P, alsdann ist die Ordinate DN proportional

$$1.\quad \frac{DE^2 . PS}{PE . V} \quad (\S.\ 126.)$$

Zieht man nun JE, so erhält man für die dem Punkte J entsprechende Ordinate, mutatis mutandis, das Verhältniss

$$2.\quad \frac{DE^2 . JS}{JE . V}.$$

Gesetzt aber, die aus dem beliebigen Punkte E hervorgehenden Centripetalkräfte verhielten sich in den Abständen JE und PE zu einander, wie

$$PE^n : JE^n$$

(wo n der Exponent von PE und JE ist); alsdann werden jene Ordinaten proportional $\frac{DE^2 . PS}{PE . PE^n}$ und $\frac{DE^2 . JS}{JE . JE^n}$.

Zu einander verhalten sich daher beide Ordinaten wie

$$3.\quad PS . JE . JE^n : JS . PE . PE^n.$$

Es ist aber $\triangle SPE \sim SEJ$ [66]

also $JE : PE = JS : SE = JS : SA$

und $4.\quad PE . JS = JE . SA.$

Substituirt man diesen Werth von PE . JS. in 3., so wird das vorige Verhältniss $5.\quad PS . JE^n : SA : PE^n$.

Es ist aber $PS : SA = \sqrt{PS} : \sqrt{SJ}$,

ferner $JE^n : PE^n$,

das halbe Verhältniss der Kräfte in den Abständen PS und JS. [67] Mithin verhalten sich die Ordinaten, folglich auch die durch diese Ordinaten

beschriebenen Flächen und die den letzteren proportionalen Anziehungen zusammengesetzt wie

$$\sqrt{PS}\cdot JS^{\frac{n}{2}} : \sqrt{JS}\cdot PS^{\frac{n}{2}} = \sqrt{PS}\cdot\frac{1}{PS^{\frac{n}{2}}} : \sqrt{JS}\cdot\frac{1}{JS^{\frac{n}{2}}}.$$ W. z. b. w.

§. 128. **Aufgabe** Man soll die Kraft finden, durch welche ein im Mittelpunkte einer Kugel befindlicher kleiner Körper gegen ein Segment derselben angezogen wird.

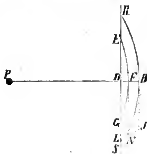


Fig. 117.

Es sei P der Körper im Mittelpunkte, RBSD das Segment, welches durch die Ebene RDS und die sphärische Oberfläche RBS eingeschlossen wird. Durch eine aus dem Mittelpunkte P beschriebene sphärische Oberfläche EFG werde DB in F geschnitten und das Segment in die Stücke BREFGS und FEDG getheilt. Jene Oberfläche sei aber keine rein mathematische, sondern eine physische von sehr geringer Dicke, welche letztere durch O bezeichnet werden mag. Diese Oberfläche ist alsdann (nach dem Beweis von **Archimedes**) proportional

$$PF\,.\,DF\,.\,O.$$[68])

Setzen wir ferner voraus, dass die anziehenden Kräfte der einzelnen Theilchen der Kugel sich **umgekehrt** wie die nte Potenz der Abstände verhalten; so ist die Kraft, mit welcher die Oberfläche GFE den Körper P anzieht, nach §. 125., proportional

$$\frac{DE^2\,.\,O}{PF^n} = \frac{2\,.\,DF\,.\,O}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2\,.\,O}{PF^n}.$$

Dieser Grösse sei das Produkt Perpendikel FN mal O proportional, alsdann wird die krummlinige Fläche BDLJB, welche die Ordinate FN bei stetiger Bewegung über die Länge DB beschreibt, sich wie die ganze Kraft verhalten, mit welcher das Segment RBSR den Körper P anzieht.

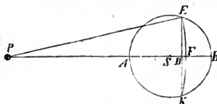


Fig. 118.

§. 129. **Aufgabe.** Man soll die Kraft finden, mit welcher ein

ausserhalb des Mittelpunktes auf der Axe befindlicher kleiner Körper durch das, zu dieser Axe gehörige, Segment angezogen wird.

Durch das Segment EBK werde der auf der Axe ADB gelegene Körper P angezogen. Vom Mittelpunkte P aus beschreibe man mit PE als Radius die sphärische Oberfläche EFK, durch welche das Segment in die beiden Stücke EBKFE und EFKE getheilt wird. Die dem ersten Stücke entsprechende Kraft suche man nach §. 126, die dem zweiten entsprechende nach §. 128 und es ergiebt ihre Summe die Kraft des ganzen Abschnitts EBKE.

§. 130. Anmerkung. Nachdem die Anziehungen sphärischer Körper dargestellt worden sind, könnten wir jetzt zu den Gesetzen der Anziehung anderer Körper, welche aus ähnlichen anziehenden Theilen bestehen, übergehen; es ist jedoch dem Plane dieses Werkes nicht entsprechend, diese speciell zu behandeln. Es wird hinreichend sein, einige allgemeine Sätze über die Kräfte derartiger Körper und über die daraus entspringenden Bewegungen wegen ihrer Anwendung in der Physik, beizufügen.

ABSCHNITT XIII.

Von den anziehenden Kräften solcher Körper, welche nicht kugelförmig sind.

§. 131. Lehrsatz. Ist die Anziehung, welche ein Körper bei der Berührung mit einem andern anziehenden Körper erleidet, weit stärker, als wenn sie von einander um einen noch so kleinen Zwischenraum getrennt werden; so nehmen die Kräfte der Theilchen des anziehenden Körpers, wenn der angezogene sich entfernt, in einem grössern Verhältniss als dem doppelten der Entfernungen von den Theilen ab.

Nehmen die Kräfte im doppelten Verhältniss der Abstände von den Theilchen ab, so wird die Anziehung gegen einen sphärischen Körper, weil dieselbe (nach §. 117.) dem Quadrat des Abstandes vom Mittelpunkte der Kugel umgekehrt proportional ist, nicht merklich durch die Berührung vergrössert werden. Noch weniger findet eine Vergrösserung statt, wenn die Anziehung mit der Entfernung des angezogenen Körpers in einem kleinern Verhältniss abnimmt. Für anziehende Kugeln ist daher der Satz klar.

Dieselbe Bewandtniss hat es mit concaven sphärischen Schalen, welche ausserhalb gelegene Körper anziehen. Weit klarer ist die Sache bei solchen Schalen, welche innerhalb gelegene Körper anziehen; da die

Anziehungen, welche einzelne Theile der Schale ausüben, durch entgegengesetzte Anziehungen anderer einzelner Theile (nach §. 112.) aufgehoben werden und desshalb bei der Berührung selbst Null sind.

Werden nun von diesen Kugeln und Schalen beliebige, vom Berührungspunkte entfernte, Stücke fortgenommen und neue Stücke beliebig hinzugefügt, so können die Figuren dieser anziehenden Körper nach Belieben geändert werden; jedoch vermehren die hinzugefügten oder fortgenommenen Theile, da sie vom Berührungspunkte entfernt sind, nicht merklich das Uebermaass der Anziehung, welches aus der Berührung hervorgeht.

Der Satz ist somit für Körper von jeder Gestalt klar. W. z. b. w.

§. 132. Lehrsatz. Nehmen die Kräfte der Theile, aus denen ein anziehender Körper zusammengesetzt ist, bei grösserer Entfernung des angezogenen Körpers im drei- oder mehrfachen Verhältniss der Abstände von den Theilchen ab; so wird die Anziehung weit stärker bei der Berührung sein, als wenn der anziehende und der angezogene Körper noch so wenig getrennt sind.

Dass die Anziehung bei der Näherung des angezogenen Körpers gegen eine anziehende Kugel dieser Art ins Unendliche vergrössert werde, ergiebt sich durch die Auflösung der Aufgabe §. 126., zweites und drittes Beispiel. Dasselbe wird durch Vergleichung dieser Beispiele mit §. 127. leicht für Anziehungen von Körpern gegen concav-convexe Schalen bewiesen; mögen die Körper sich ausser- oder innerhalb der Höhlungen befinden.

Indem man nun von diesen Kugeln oder Schalen überall ausserhalb des Berührungspunktes beliebige Materie fortnimmt oder ihnen hinzufügt, nehmen sie jede verlangte Form an und es wird so der Satz für alle Körper klar. W. z. b. w.

§. 133. Lehrsatz. Zwei einander ähnliche und aus gleich anziehender Materie bestehende Körper ziehen, jeder für sich, kleine Körper an, welche ihnen selbst proportional und ähnlich gelegen sind. Es verhalten sich alsdann die beschleunigenden Anziehungen der kleinen Körper, wie die beschleunigenden Anziehungen der erstern gegen Theile der letztern, welche den ganzen proportional und ähnlich gelegen sind.

Man denke sich die Körper in Stücke getheilt, welche den ganzen proportional und in ihnen ähnlich gelegen sind. Alsdann verhalten sich die Anziehungen gegen die einzelnen Stücke des ersten Körpers zu denjenigen gegen die einzelnen entsprechenden Stücke des zweiten, wie die Anziehung gegen irgend ein einzelnes Stück des ersten zur Anziehung gegen das entsprechende Stück des zweiten Körpers. Durch Zusammensetzung verhält sich alsdann eben so die Anziehung gegen den ganzen ersten Körper zu der gegen den ganzen zweiten. W. z. b. w.

Zusatz 1. Nehmen daher die anziehenden Kräfte der Stücke, wenn man den Abstand des angezogenen kleinen Körpers vergrössert,

nach irgend einer Potenz des Abstandes ab; so verhalten sich die beschleunigenden Anziehungen gegen die ganzen Körper

direct wie die letztern und

indirect wie jene Potenz der Abstände.

Nehmen etwa die Kräfte der Theile im doppelten Verhältniss der Abstände von den angezogenen kleinen Körpern ab, und verhalten sich die Körper zu einander, wie

$$A^3 : A^3,$$

also so wohl die Seiten der ihnen gleichen Würfel, als auch die Abstände der angezogenen kleinen Körper von den anziehenden wie

$$A : B;$$

so verhalten sich die beschleunigenden Anziehungen gegen die Körper, wie

$$\frac{A^3}{A^2} : \frac{B^3}{B^2} = A : B.$$

Nehmen die Kräfte der Theile im dreifachen Verhältniss der Abstände ab, so verhalten sich die beschleunigenden Anziehungen gegen die ganzen Körper, wie

$$\frac{A^3}{A^3} : \frac{B^3}{B^3},$$

d. h. sie sind einander gleich.

Nehmen die erstern im vierfachen Verhältniss ab, so verhalten sich die letztern, wie

$$\frac{A^3}{A^4} : \frac{B^3}{B^4} = \frac{1}{A} : \frac{1}{B},$$

d. h. indirect wie die Würfelseiten A und B. u. s. w. f.

Zusatz 2. Man kann daher aus den Kräften, mit denen ähnliche Körper andere ähnlich gegen sie gelegene kleine Körper anziehen, auf das Verhältniss schliessen, welches für die Abnahme der Kräfte einzelner anziehender Stücke beim Zurückweichen des angezogenen Körpers stattfindet. Jene Abnahme der Kräfte muss sich nur direct oder indirect wie irgend eine Potenz des Abstandes verhalten.

§. 134. Lehrsatz. Verhalten sich die anziehenden Kräfte gleicher Theilchen eines beliebigen Körpers, wie die Abstände der angezogenen Punkte an diesen Theilchen, so ist die Kraft des ganzen Körpers nach seinem Schwerpunkte gerichtet und gleich derjenigen, welche eine Kugel besitzen würde, die aus ähnlicher und gleicher Materie bestände und ihren Mittelpunkt im Schwerpunkt des Körpers hätte.

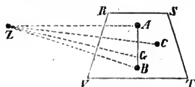


Fig 119.

Die Theilchen A und B des Körpers RSTV ziehen den beliebigen kleinen Körper Z mit Kräften an, welche, wenn

ist, sich wie 1. $\begin{cases} A = B \\ AZ : BZ, \end{cases}$

und wenn

ist, sich wie 2. $\begin{cases} A \gtrless B \\ A \,.\, AZ : B \,.\, BZ \end{cases}$

verhalten. Man drücke daher beide Kräfte durch die Producte A . AZ und B . BZ aus. Zieht man nun die Linie AB und schneidet man dieselbe in G so, dass

3. $AG : BG = B : A$;

so ist G der gemeinschaftliche Schwerpunkt beider Theile A und B.

Die Kraft A . AZ wird (nach Gesetze, Zusatz 2.) in die Seitenkräfte A . GZ und A . AG,
die Kraft B . BZ in B . GZ und B . BG
zerlegt. Nach 3. ist aber

$$A \,.\, AG = B \,.\, BG,$$

und da beide Kräfte nach einander entgegengesetzten Richtungen wirken, so heben sie sich einander auf und es bleiben nur die Kräfte

A . GZ und B . GZ

übrig. Diese sind von Z gegen G gerichtet, und bilden zusammengesetzt die Kraft $(A + B) \,.\, GZ$,
d. h. dieselbe, als wenn beide anziehende Theilchen A und B sich in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte G befänden und dort eine Kugel bildeten.

Fügt man nach derselben Weise ein drittes Theilchen C hinzu und setzt man dessen Kraft mit der nach G gerichteten

$$(A + B)\, GZ$$

zusammen; so ist die daraus entspringende Kraft nach dem gemeinschaftlichen Schwerpunkte der Kugel G und des Theilchen C, d. h. nach dem gemeinschaftlichen Schwerpunkte der drei Theilchen

A, B und C

gerichtet, und sie ist dieselbe, als wenn jene Kugel und das Theilchen C zusammen sich in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte befänden und dort eine grössere Kugel bildeten. Ebenso kann man ins Unendliche fortfahren. Die ganze Kraft aller Theilchen des beliebigen Körpers RSTV ist daher dieselbe, als wenn der letztere, unter Beibehaltung seines Schwerpunktes, eine Kugelgestalt annähme.

Zusatz. Hiernach wird die Bewegung des angezogenen Körpers Z dieselbe sein, als ob der anziehende Körper RSTV eine Kugel wäre. Wenn also der letztere entweder ruhet, oder sich gleichförmig und geradlinig fortbewegt, so wird der angezogene Körper sich in einer Ellipse bewegen, deren Centrum im Schwerpunkte des anziehenden Körpers befindlich ist.

§. 135. Lehrsatz. Bestehen mehrere Körper aus gleichen Theilchen, und verhalten sich die Kräfte der letztern wie die Abstände der angezogenen Punkte von den einzelnen Theilen; so ist die aus allen zusammengesetzte Kraft, wodurch ein beliebiger Körper angezogen wird,

nach dem gemeinschaftlichen Schwerpunkte der Theilchen gerichtet und dieselbe, als wenn jene anziehenden Theilchen, unter Beibehaltung ibres gemeinschaftlichen Schwerpunktes, sich vereinigten und eine Kugel bildeten.

Der Beweis wird wie im vorhergehenden §. geführt.

Zusatz. Die Bewegung des angezogenen Körpers wird daher dieselbe sein, als wenn die anziehenden Körper, unter Beibehaltung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes, sich vereinigten und eine Kugel bildeten. Ruht dieser Schwerpunkt entweder, oder bewegt er sich gleich förmig auf einer geraden Linie, so bewegt sich der angezogene Körper in einer Ellipse, deren Centrum sich im gemeinschaftlichen Schwerpunkte der anziehenden Körper befindet.

§. 136. Aufgabe. Wenn nach den einzelnen Punkten eines Kreises gleiche Centripetalkräfte gerichtet sind, welche in irgend einem Verhältniss der Abstände zu- oder abnehmen; so soll man die Kraft finden, mit welcher ein kleiner Körper überall auf einer geraden Linie angezogen wird, die perpendikulär auf die Ebene des Kreises durch seinen Mittelpunct gezogen ist.

Fig. 120.

Zum Mittelpunkt A und Radius AD denke man sich einen Kreis in einer Ebene gezogen, welche auf AP senkrecht ist; zu suchen ist die Kraft, mit welcher ein Körper P gegen denselben gezogen wird. Von einem beliebigen Punkte E des Kreises ziehe man nach dem angezogenen Körper P die Linie PE, nehme auf PA

$$PF = PE,$$

errichte in F das Perpendikel FK, welches der Kraft, womit der Punkt E den kleinen Körper P anzieht, proportional ist. JKL sei die Curve, in welche der Punkt K beständig fällt, dieselbe schneide die Ebene des Kreises in L. Nimmt man hierauf

$$PH = PD,$$

und errichtet man das Perpendikel HJ, welches obige Curve in J schneidet, so wird die Anziehung des kleinen Körpers P gegen den Kreis proportional der in AP multiplicirten Fläche AHJL.

Man nehme auf AE die sehr kleine Linie Ee an, ziehe Pe und mache auf AP $Pf = Pe = PC.$

Da nach der Voraussetzung die Kraft, mit welcher der beliebige Punkt E des Ringes den Körper P anzieht, der Linie PK proportional ist; so wird hiernach die Kraft, mit welcher jener Punkt den Körper P gegen A zieht, sich wie

$$\frac{AP}{PE} \cdot FK,$$

und die Kraft, mit welcher der ganze Ring den Körper P zieht, sich wie

$$\text{der Ring und } \frac{AP}{PE} \cdot FK$$

zusammengesetzt verhalten. Dieser Ring ist aber proportional dem Rechteck, dessen Seiten der Radius AE und die Breite Ee sind, und dieses Rechteck wird (weil $PE : AE = Ee : CE$)

$$= PE \cdot CE = PE \cdot fF.$$

Mithin verhält sich die Kraft, mit welcher jener Ring den Körper P gegen A zieht, wie

$$PE \cdot fF \cdot \frac{AP}{PE} \cdot FK = fF \cdot AP \cdot FK,$$

oder wie das Produkt aus der Fläche FK kf in AP.

Die Summe der Kräfte, mit denen alle Ringe in dem zum Mittelpunkte A und Radius AD beschriebenen Kreise den Körper P gegen A ziehen, verhält sich daher wie das Produkt der ganzen Fläche AHJKL in AP. W. z. b. w.

Zusatz 1. Nehmen die Kräfte im doppelten Verhältniss der Abstände ab, d. h. ist FK proportional $\frac{1}{PF^2}$, also die Fläche AHJKL proportional

$$\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH};$$ [69])

so verhält sich die Anziehung des Körpers P gegen den Kreis wie

$$1 - \frac{AP}{PH} = \frac{AH}{PH}.$$

Zusatz 2. Verhalten sich allgemein die Kräfte der Punkte im Abstande D umgekehrt wie irgend eine Potenz des letztern, d. h. FK wie $\frac{1}{D^n}$, also AHkKL wie

$$\frac{1}{AP^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}};$$ [70])

so verhält sich die Anziehung des Körpers P gegen den Kreis, wie

$$\frac{1}{AP^{n-2}} - \frac{AP}{PH^{n-1}}.$$

Zusatz 3. Wird der Durchmesser des Kreises ins Unendliche vergrössert, und ist

$$n > 1;$$

so verhält sich die Anziehung des kleinen Körpers P gegen die ganze unendlich grosse Ebene umgekehrt wie

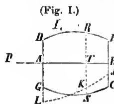
$$AP^{n-2},$$

weil das andere Glied $\frac{PA}{PH^{n-1}}$, verschwindet.[71])

§. 137. Aufgabe. Man soll die Anziehung bestimmen, welche ein, auf der Axe eines festen runden Körpers gelegener, kleiner Körper von diesem erleidet; wenn nach den einzelnen Punkten des letzteren

Centripetalkräfte gerichtet sind, welche in irgend einem Verhältniss der Abstände abnehmen.

Gegen den festen Körper DECG (Fig. I.) wird der auf der Axe AB gelegene kleine Körper P hingezogen. Durch einen beliebigen, auf diese Axe senkrechten Kreis RTS werde der feste Körper geschnitten, und auf dem Halbmesser TS nehme man in der durch die Axe gehenden Ebene PALJB (nach §. 136.) die Länge TK derjenigen Kraft proportional, mit welcher der Körper P gegen den Kreis gezogen wird. Der Punkt K liege aber in der Curve LKJ, welche die Ebenen der äussersten Kreise DG und EC in den Punkten L und J schneidet; alsdann verhält sich die Anziehung des Körpers P gegen den festen Körper wie die Fläche LABJ.



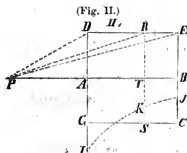


Fig. 121.

Zusatz 1. Ist der feste Körper ein Cylinder, welcher durch Umdrehung des Parallelogramms ADEB (Fig. II.) um die Axe AB beschrieben worden ist, und sind die nach den einzelnen Punkten desselben gerichteten Centripetalkräfte den Quadraten der Abstände von ihnen umgekehrt proportional; so verhält sich die Anziehung des Körpers P gegen diesen Cylinder, wie

$$BA - PE + PD.$$

Denn die Ordinate TK ist (nach §. 136., Zusatz 1.) proportional

$$1 - \frac{PT}{PR}.$$

Der erste Theil, über die Länge AB geführt, beschreibt die Fläche

$$1 . AB;$$ [72])

der zweite Theil $\frac{PT}{PR}$, über die Länge PB geführt, beschreibt die Fläche

$$1 (PE - AD$$

(was durch die Quadratur der Curve LKJ leicht gezeigt werden kann). Aehnlich beschreibt derselbe Theil, wenn er über PA geführt wird, die Fläche

$$1 . (PD - AD)$$

und er beschreibt daher, indem er über den Unterschied

$$PB - PA = AB$$

geführt wird, die Fläche

$$1 . (PE - PD)$$ [73])

Subtrahirt man von der ersten Fläche 1 . AB die zweite 1 . (PE — PD), so bleibt die Fläche

$$LABJ = 1 . AB - PE + PD)$$

übrig, und es verhält sich daher die dieser Fläche proportionale Kraft wie

$$AB - PE + PD.$$

Zusatz 2. Hiernach wird auch die Kraft bekannt, mit welcher das Sphäroïd AGBCD einen Körper P anzieht, welcher sich ausserhalb desselben auf seiner Axe AB befindet.

Es sei NKRM ein Kegelschnitt, dessen auf EP senkrechte Ordinate ER immer gleich PD sei, welche letztere Linie nach dem Punkte D gezogen ist, in welchem jene Ordinate das Sphäroïd schneidet. In den Scheitelpunkten A und B des Sphäroïds errichte man auf die Axe AB die Perpendikel

$$AK = PA$$
$$BM = PB,$$

wesshalb beide AK und BM den Kegelschnitt in K und M schneiden. Nun ziehe man KM, welche das Segment KMRK abschneidet. Ist nun S der Mittelpunkt des Sphäroïds und SC die halbe grosse Axe; so verhält sich die Kraft, mit welcher das Sphäroïd den Körper P anzieht, zu derjenigen, mit welcher die über AB beschriebene Kugel ihn anzieht, wie

$$\frac{AS \,.\, CS^2 - PS \,.\, KMRK}{PS^2 + CS^2 - AS^2} : \frac{AS^3}{3PS^2}$$ [74]

Auf dieselbe Weise kann man die Kräfte der Segmente des Sphäroïds finden.

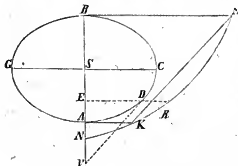


Fig. 122.

Zusatz 3. Befindet sich der kleine Körper innerhalb des Sphäroïds auf irgend einem gegebenen Durchmesser desselben, so ist seine Anziehung seinem Abstande vom Mittelpunkte proportional.

Dies wird folgendermassen bewiesen. Es sei AGOF das anziehende Sphäroïd, S sein Mittelpunkt und P der angezogene Körper. Durch P ziehe man den Halbmesser APS und zwei beliebige gerade Linien DE und FG, welche das Sphäroïd auf beiden Seiten in D und E, wie in F und G schneiden. Es seien PCM und HLN die Oberflächen zweier inneren Sphäroïde, welche dem äusseren ähnlich und concentrisch sind, und von denen die

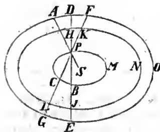


Fig. 123.

erstere durch den Punkt P geht und die geraden Linien DE und FG in den Punkten B und C schneidet. Die zweite schneide dieselben Linien in den Punkten H und J, K und L. Haben alle Sphäroïde eine gemeinschaftliche Axe, so werden die auf beiden Seiten abgeschnittenen Theile der geraden Linien einander gleich, nämlich

$$DP = BE$$
$$FP = CG$$
$$DH = EJ$$
$$FK = GL;$$

weil die geraden Linien DE, PB und HJ respective in demselben Punkte halbirt werden. Man denke sich nun, dass DPF und EPG die entgegengesetzten, mit den unendlich kleinen Vertikalwinkeln DPF und EPG beschriebenen, Kegel bezeichnen, und dass die Linien DH und EJ unendlich klein seien. Die Theile dieser Kegel DHKF und GLJE, welche durch die Oberflächen der Sphäroïde abgeschnitten werden, verhalten sich, weil

$$DH = EJ,$$

zu einander, wie die Quadrate ihrer Abstände vom Körper P, und ziehen daher denselben gleich stark an. Aus demselben Grunde werden, wenn man sich die Räume DPF und EGCB durch die Oberflächen unzähliger ähnlicher, concentrischer und zu gleicher Axe gehöriger Sphäroïde in Theilchen zerlegt denkt, diese alle den Körper P von beiden Seiten gleich und nach entgegengesetzten Richtungen ziehen. Die Kräfte des Kegels DPF und des Kegelstückes EGCB sind daher einander gleich und heben sich, weil sie entgegengesetzt wirken, gegenseitig auf. Dieselbe Bewandtniss hat es mit den Kräften aller Materie, welche sich ausserhalb des innern Sphäroïds PCBM befindet.

Der Körper P wird daher allein durch dieses innere Sphäroïd angezogen und (nach §. 114.) verhält sich seine Anziehung zu derjenigen Kraft, mit welcher das ganze Sphäroïd AGOD den Körper A anzieht, wie PS : AS.

§. 138. Aufgabe. Ein anziehbarer Körper ist gegeben; man soll das Verhältniss der Abnahme bestimmen, welche die nach seinen einzelnen Punkten gerichteten Centripetalkräfte erleiden.

Man bilde aus dem gegebenen Körper eine Kugel, oder einen Cylinder oder einen andern regulären Körper, dessen Anziehungsgesetz, einem jeden Verhältniss der Abnahme entsprechend, (nach §§. 125., 126. und 137.) gefunden werden kann. Hierauf bestimme man durch Versuche die Kraft der Anziehung in verschiedenen Abständen. Das so erkannte Gesetz der Anziehung gegen den ganzen Körper wird das Verhältniss der Abnahme ergeben, welche die Kräfte der einzelnen Theile erleiden.

§. 139. Lehrsatz. Ein fester Körper ist nach Einer Seite durch eine Ebene, nach den übrigen gar nicht begrenzt und besteht aus gleichen und gleich anziehenden Theilen. Die Kräfte derselben nehmen bei

zunehmender Entfernung vom festen Körper, in einem grösseren Verhältniss als dem zweiten der Abstände ab. Ein auf der einen oder andern Seite der Ebene gelegener kleiner Körper wird aber durch die Kraft des ganzen Körpers angezogen. Alsdann nimmt die anziehende Kraft des festen Körpers, bei beliebiger Entfernung von der ebenen Oberfläche, in einem Verhältniss des Abstandes des angezogenen Körpers von jener Ebene ab, dessen Exponent um 3 Einheiten kleiner ist als der Exponent, welchen die Abstände haben.

Erster Fall. Es sei LGl die Ebene, welche den festen Körper

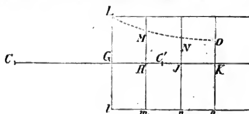


Fig. 124.

begrenzt, und der letztere liege nach der Seite J dieser Ebene zu, und werde in unzählige Ebenen

mHM, nJN, etc.,

welche alle parallel lGL sind, aufgelöst. Zuerst befinde sich der angezogene Körper C ausserhalb des festen Körpers. Man ziehe CGHJ auf alle die unzähligen Ebenen perpendikulär und es mögen die anziehenden Kräfte der Punkte des festen Körpers in dem Verhältniss der n ten Potenz ihrer Abstände abnehmen, wo n nicht kleiner als 3 ist. Es ist daher (nach §. 136., Zusatz 3.) die Kraft, mit welcher die beliebige Ebene mHM den Körper C anzieht, umgekehrt proportional

CH^{n-2}.

Auf mHM nehme man die Länge HM der Potenz CH^{n-2} umgekehrt proportional, alsdann verhält sich jene Kraft wie HM. Eben so nehme man in den

einzelnen Ebenen lGL, nJN, oKO, etc.
die Längen GL, JN, KO, etc.

respective den Potenzen CG^{n-2}, CJ^{n-2}, CK^{n-2} etc. umgekehrt proportional an; alsdann verhalten sich die Kräfte dieser Ebenen wie eben diese Längen, folglich die Summe der Kräfte wie die Summe der Linien, d. h. es verhält sich die Kraft des ganzen festen Körpers wie die Fläche GLOK, welche gegen OK hin ins Unendliche erweitert ist. Diese Fläche verhält sich aber, nach den bekannten Methoden der Quadraturen, umgekehrt wie

CG^{n-3}

und daher auch die Kraft des ganzen Körpers umgekehrt wie

CG^{n-3}[75]) W. z. b. w.

Zweiter Fall. Es befinde sich nun der Körper C auf der innerhalb des festen Körpers gelegenen Seite von lGL in C^1 und man nehme

$$C^1K = C^1G.$$

Der Theil LGloKO des festen Körpers, welcher durch die Ebenen lLG und oKO begrenzt ist, wird den in der Mitte gelegenen kleinen Körper C^1 nach keiner Seite hinziehen, weil die entgegengesetzten Wirkungen entgegengesetzter Punkte wegen der Gleichheit der erstern sich gegenseitig aufheben. Der kleine Körper C^1 wird daher bloss durch die Kraft des, jenseits der Ebene OK gelegenen, festen Körpers angezogen und diese Kraft verhält sich (nach dem ersten Falle) umgekehrt wie C^1K^{n-3}, d. h. (weil $C^1G = C^1K$) umgekehrt wie

C^1G^{n-3}. W. z. b. w.

Zusatz 1. Wird der feste Körper LGJN durch die zwei unbegrenzten und einander parallelen Ebenen LG und JN auf beiden Seiten begrenzt, so erhält man die anziehende Kraft desselben, indem man von der anziehenden Kraft des ganzen unbegrenzten Körpers LGKO die anziehende Kraft des jenseitigen Theiles NJKO, welcher gegen KO ins Unendliche erweitert ist, abzieht.

Zusatz 2. Im Fall man den jenseitigen Theil des festen Körpers, weil seine Anziehung, mit der des diesseitigen verglichen, von fast keiner Bedeutung ist, verwirft; so nimmt die Anziehung des diesseitigen Theiles, bei Vergrösserung des Abstandes, sehr nahe im Verhältniss von CG^{n-3} ab.

Zusatz 3. Irgend ein begrenzter und an Einer Seite ebener Körper zieht einen kleinen Körper aus der Gegend jener mittlern Ebene her an, der Abstand zwischen dem angezogenen Körper und der Ebene ist aber, im Vergleich mit den Dimensionen des anziehenden Körpers, sehr klein. Ferner besteht der letztere aus den homogenen Theilen, deren anziehende Kräfte in irgend einer höhern als der vierten Potenz der Abstände abnehmen. Alsdann nimmt die anziehende Kraft des ganzen Körpers sehr nahe im Verhältniss einer Potenz ab, deren Wurzel jener sehr kleine Abstand und deren Exponent um 3 Einheiten kleiner ist, als der der vorhergenannten Potenz.

Bei einem Körper, welcher aus Theilchen besteht, deren anziehende Kräfte im Verhältniss der dritten Potenz der Abstände abnehmen, gilt diese Behauptung nicht, weil in diesem Falle die Anziehung jenes jenseitigen Theiles des unbegrenzten Körpers im Zusatz 2. immer unendlich grösser ist, als die Anziehung des diesseitigen Theiles.

§. 140. Anmerkung. Ein Körper wird perpendikulär gegen eine Ebene gezogen; man sucht aus dem gegebenen Gesetz der Anziehung seine Bewegung

Man löst diese Aufgabe, indem man (nach § 77.) die Bewegung des geradlinig gegen diese Ebene sich bewegenden Körpers bestimmt und dieselbe (nach Gesetze, Zusatz 2.) mit der gleichförmigen Bewegung zusammengesetzt, welche längs gerader und der Ebene paralleler Linien

stattfindet. Sucht man umgekehrt das Gesetz der Anziehung, welche gegen eine Ebene längs auf sie perpendikulärer Linien stattfindet, unter der Bedingung, dass der Körper sich auf einer gegebenen Curve bewege; so wird die Aufgabe nach dem Muster des §. 23. gelöst.

Die Operationen pflegen aber abgekürzt zu werden, wenn man die Ordinaten in convergirende Reihen auflöst. Zur Abscisse A gehöre unter einem beliebigen Coordinatenwinkel die Ordinate B, welche der beliebigen Potenz

$$A^{\frac{m}{n}}$$

der Abscisse proportional ist. Man sucht die Kraft, vermöge welcher der Körper, je nach der Lage der Ordinate gegen die Abscisse hingezogen oder von ihr fortgestossen, sich auf einer Curve bewegen könne, in welcher das obere Ende der Ordinate beständig liegt. Gesetzt, die Abscisse werde um ein sehr kleines Stück O vergrössert; alsdann löse man die entsprechende Ordinate

$$(A + O)^{\frac{m}{n}}$$

in die Reihe $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} A^{\frac{m-n}{n}} . O + \frac{mm - mn}{2\,nn} A^{\frac{m-2n}{n}} . O^2 + \text{etc.}$

auf und setze dasjenige Glied, welches O^2 enthält, d. h.

$$\frac{m^2 - mn}{2\,nn} A^{\frac{m-2n}{n}} . O^2$$

der Kraft proportional. Die gesuchte Kraft verhält sich also, wie

$$\frac{mm - mn}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}} = \frac{mm - mn}{2nn} B^{\frac{m-2n}{m}} .$$

Bezieht sich etwa die Ordinate auf eine Parabel, so ist

$$m = 2 , n = 1$$

und es verhält sich die Kraft, wie

$$2B^0,$$

sie ist also constant[76]. Ist daher die Kraft constant, so bewegt sich der Körper in einer Parabel, wie Galilei bewiesen hat.

Bezieht sich ferner die Ordinate auf eine Hyperbel, wo

$$m = -1 , n = 1;$$

so verhält sich die Kraft wie

$$2B^{-3} = \frac{2}{B^3}$$ [77])

Der Körper bewegt sich demnach vermöge einer Kraft, welche dem Cubus der Ordinate umgekehrt proportional ist, in einer Hyperbel.

Indem ich Sätze dieser Art verlasse, gehe ich zu andern Sätzen der Bewegung über, welche noch nicht berührt worden sind.

ABSCHNITT XIV.

Von der Bewegung sehr kleiner Körper, welche durch Centripetalkräfte angetrieben werden, die nach den einzelnen Theilen irgend eines grossen Körpers gerichtet sind.

§. 141. Lehrsatz. Zwei ähnliche Mittel werden von einander durch einen Raum getrennt, der beiderseits von parallelen Ebenen begrenzt ist, und beim Durchgange durch diesen Raum wird ein Körper perpendikulär gegen das eine der beiden Mittel gezogen oder gestossen; dabei wird er durch keine andere Kraft angetrieben oder verhindert. Ist nun die Anziehung in gleichen Abständen von beiden Ebenen, nach derselben Seite genommen, immer dieselbe; so steht der Sinus des Einfallswinkels in die eine beider Ebenen zum Sinus des Austrittswinkels aus der andern Ebene in einem constanten Verhältniss.

Erster Fall. Es seien Aa und Bb zwei einander parallele Ebenen. Auf die erste falle der Körper längs der Linie GH, und er werde während seines Durchganges durch den mittleren Raum gegen das Einfallsmittel gezogen oder getrieben. In Folge dessen wird er die krumme Linie HJ beschreiben und längs der Linie JK austreten. Auf die Austrittsebene Bb werde das Perpendikel JM errichtet, welches die verlängerte Einfallslinie GH in M, die Einfallsebene Aa in R schneidet; ferner treffe die verlängerte Austrittslinie JK die Linie HM in L. Aus L als Mittelpunkt werde mit dem Radius LJ ein Kreis beschrieben, welcher HM in P und Q, und die verlängerte MJ in N schneidet. Nimmt man nun zuerst die Anziehung oder den Anstoss als gleichförmig an, so ist (wie Galilei bewiesen hat,[78]) die Curve HJ eine Parabel, welche die Eigenschaft hat, dass HM^2 gleich dem Produkte aus einem Parameter in JM ist und dass die Linie HM in L halbirt wird.[79])

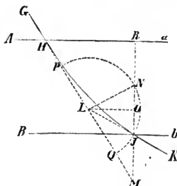


Fig. 125.

Fällt man daher auf MN das Perpendikel LO, so wird

$$MO = OR$$

und da

$$NO = OJ$$

auch

$$MN = RJ.$$

Da nun RJ constant gegeben ist, so ist dasselbe mit MN der Fall und daher das Verhältniss

$$1.\quad MN\,.\,MJ : P\,.\,MJ = MN\,.\,MJ : HM^2.$$

Es ist aber

$$MN\,.\,MJ = PM\,.\,MQ = (LM + PL)\,(LM - PL)$$
$$= LM^2 - PL^2$$

oder

$$2.\quad MN\,.\,MJ = LM^2 - JL^2$$

und so das Verhältniss

$$LM^2 - LJ^2 : HM^2 \text{ ein constantes.}$$

Dasselbe gieht von $HM^2 : LM^2$, indem $HM^2 = 4\,.\,LM^2$; mithin wird auch durch Zusammensetzung das Verhältniss

$$LM^2 - LJ^2 : LM^2$$

oder

$$JL^2 : LM^2$$

endlich

$$3.\quad JL : LM \text{ constant.}$$

Im Dreieck LMJ ist aber

$$4.\quad \sin LMR : \sin LJR = LJ : LM,$$

mithin das vordere Verhältniss constant, wobei offenbar LMR der Einfalls- und LRJ der Austrittswinkel ist. W. z. b. w.

Zweiter Fall. Es gehe der Körper nach und nach durch mehrere, von parallelen Ebenen begrenzte, Räume

AabB, BbcC, etc.

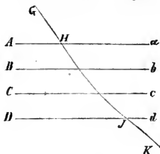


Fig. 126.

und werde durch eine Kraft angetrieben, welche in jedem einzelnen Raume gleichförmig, in verschiedenen verschieden ist. Nach dem oben dargestellten Beweise steht der Sinus des Einfallswinkels in die erste Ebene Aa zum Sinus des Austrittswinkels aus der zweiten Bb im constanten Verhältniss. Der letztere Sinus, welcher zugleich der Sinus des Einfallswinkels in die zweite Ebene Bb ist, steht wieder zum Sinus des Austrittswinkels aus der dritten Ebene Cc im constanten Verhältniss, eben so der letztere zum Sinus des Austrittswinkels aus der vierten Ebene Dd, u. s. w. f. ins Unendliche. Durch Zusammensetzung findet man also den Sinus des Einfallswinkels in die erste Ebene zum Sinus des Austrittswinkels aus der letzten Ebene im constanten Verhältniss.

Nun vermindere man die gegenseitigen Abstände der Ebenen und vermehre ihre Anzahl bis ins Unendliche, so dass die Wirkung der Anziehung oder des Stosses nach irgend einem Gesetze continuirlich werde; alsdann wird das Verhältniss vom Sinus des Einfallswinkels in die erste Ebene zum Sinus des Austrittswinkels aus der letzten Ebene auch jetzt constant sein. W. z. b. w.

§. 142. Lehrsatz. Unter derselben Voraussetzung verhält sich die Geschwindigkeit des Körpers vor dem Eintritt zu der nach dem Austritt stattfiudenden, wie der Sinus des Anstrittswinkels zum Sinus des Einfallswinkels.

Man nehme

$$AH = Jd$$

an und errichte die Perpendikel AG und dK, welche die Einfalls- und Anstrittslinien GH und JK in G und K schneiden. Auf GH nehme man

$$TH = JK$$

an und fälle auf dio Ebene Aa das Perpendikel Tv. Nach Gesetze, Zusatz 2. kann man die Bewegung des Körpers in zwei zerlegen, die eine perpendikulär auf Aa, Bb, etc, die andere ihnen pararellel. Die anziehende oder stossende Kraft wirkt in der Richtung der Perpendikel, und ändert daher nicht die Bewegung in der Richtung der parallelen Linien; mithin wird der Körper bei dieser Bewegung in gleichen Zeiten diejenigen gleichen Räume längs der paralleleu Linien zurücklegen, welche sich zwischen der Linie AG und dem Punkt H, wie auch zwischen dem Punkt J und der Linien dK befinden. Er wird daher in gleichen Zeiten die Linien

$$GH \text{ und } JK$$

beschreiben.

Fig. 127.

Ferner verhält sich die Geschwindigkeit vor dem Eintritt zu der nach dem Austritt stattfindenden, wie

$$\begin{aligned} & GH : JK \\ &= GH : TH \\ &= AH : vH \\ &= Jd : vH, \end{aligned}$$

oder weil auch JK = TH, wie

$$\frac{Jd}{KJ} : \frac{vH}{TH}$$

d. h. wie der Sinus des Austrittswinkels zum Sinus des Einfallswinkels W. z. b. w.

§. 143. Lehrsatz. Ist unter denselben Voraussetzungen die Bewegung vor dem Einfall geschwinder, als nachher; so wird der Körper indem die Einfallslinie sich neigt, endlich zurückgeworfen und der Zurückwerfungswinkel dem Eiufallswinkel gleich.

Man denke sich, dass der Körper wie vorhin zwischen den parallelen Ebenen Aa, Bb, Cc, etc. parabolische Bogen beschreibe und es seien HP; PQ, QR, etc. diese Bogen. Die Schiefe der Einfallslinie GH gegen die erste Ebene Aa sei so beschaffen, dass der Einfallssinus sich

zum Radius des Kreises, dem jener entspricht, verhalte wie derselbe Einfallssinus zum Austrittssinus aus der Ebene Dd in den Raum DdeE.

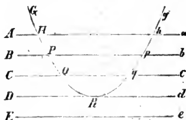


Fig. 128.

Da so der Austrittssinus dem Radius gleich ist, so ist der Winkel selbst ein Rechter und es fällt daher die Austrittslinie mit der Ebene Dd zusammen. Der Körper gelange zu dieser Ebene im Punkte R, und da die Austrittslinie mit derselben zusammenfällt, so kann der Körper offenbar nicht weiter gegen die Ebene Ee vordringen. Eben so wenig kann er auf der Austrittslinie Rd fortgehen, weil er beständig gegen das Eintrittsmittel gezogen oder gestossen wird. Deshalb wird er zwischen den Ebenen Cc und Dd umbiegen, indem er den parabolischen Bogen QRq beschreibt, dessen Hauptscheitelpunkt (nach Galilei's Beweis) in R liegt. Er schneidet die Ebene Ce unter demselben Winkel in q, wie vorher in Q, und indem er auf den parabolischen Bogen qp, ph, etc., welche den früheren QP, PH, etc. congruent sind, fortgeht, wird er auch die übrigen Ebenen in p, b, etc. unter denselben Winkeln wie früher in P, H, etc. schneiden und zuletzt in b bei derselben Schiefe austreten, bei welcher er in H eingetreten ist.

Denkt man sich nun, dass die Zwischenräume der Ebenen Aa, Bb, Cc, Dd, Ee ins Unendliche vermindert, ihre Anzahl eben so vermehrt werde; so wird die Thätigkeit der Anziehung oder des Anstosses nach einem beliebigen angegebenen Gesetze continuirlich und der Austrittswinkel auch jetzt dem Eintrittswinkel gleich bleiben. W. z. b. w.

§. 144. Anmerkung. Nicht sehr unähnlich sind diesen Anziehungen die Zurückwerfung und Brechung des Lichtes, welche in einem constanten Verhältniss der Secanten stattfinden, wie Snellius gefunden, folglich auch in einem constanten Verhältniss der Sinusse, wie Cartesius auseinander gesetzt hat. Dass nämlich das Licht sich allmälig fortpflanze und in 7^{m} bis 8^{m}[80]) Zeit von der Sonne zur Erde gelange, ist jetzt durch die Erscheinungen der Jupiters-Trabanten bekannt, wie verschiedene Astronomen durch Beobachtungen bestätigt haben. Die in der Luft befindlichen Strahlen werden aber (wie schon längst Grimaldi gefunden hat, indem er Licht durch eine Oeffnung in ein dunkles Zimmer eintreten liess, und wie ich auch selbst erfahren habe), indem sie nahe bei den Kanten dunkeler oder durchsichtiger Körper (wie den scharfen kreisförmigen Kanten von Münzen, die aus Gold, Silber oder Kupfer geprägt sind, oder den Schneiden von Messern, Steinen oder zerbrochenem Glase) vorübergehen, um diese Körper gekrümmt, gleichsam als ob diese sie anzögen. Von diesen Strahlen werden nur diejenigen, welche beim Vorübergange den Körpern am nächsten kommen, stär-

ker gekrümmt, gleichsam als ob sie mehr angezogen würden, wie ich selbst auch fleissig beobachtet habe. Die in grössern Abständen vorübergehenden Strahlen werden weniger gekrümmt, die in noch grössern ein wenig nach der entgegengesetzten Seite und bilden daselbst drei Farbenbilder.

In der Figur bezeichne s die Schneide eines Messers oder irgend eines Keils AsB, und gowog, fnvnf, emtme, dlsld Strahlen, welche in Bogen owo, non, mtm, lsl

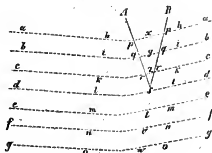


Fig. 129.

gegen das Messer gekrümmt sind und zwar mehr oder weniger, je nach ihrem Abstande vom Messer. Da aber eine solche Krümmung der Strahlen in der Luft, ausserhalb des Messers stattfindet, so müssen auch diejenigen Strahlen, welche in das Messer selbst eintreten, bevor sie dasselbe berühren, bereits in der Luft gekrümmt werden. Dasselbe Verhalten findet statt, wenn sie in Glas einfallen. Es erfolgt also die Brechung nicht im Einfallspunkte, sondern allmälig durch stetige Krümmung der Strahlen, theils in der Luft, hevor sie das Glas berühren, theils (wenn ich nicht irre) im Glase, nachdem sie in dasselbe eingetreten sind, wie dies bei den in r, q und p einfallenden Strahlen

ckzkc, hiyib, ahxha

dargestellt ist, welche zwischen k und z, i und y, h und x gekrümmt sind.

Wegen der Analogie, welche zwischen der Fortpflanzung der Lichtstrahlen und dem Fortschreiten der Körper stattfindet, erschien es daher zweckmässig, die folgenden Sätze für optische Zwecke hinzuzufügen, wobei ich jedoch nichts über die Natur der Strahlen (ob sie Körper sind oder nicht) behaupte, sondern nur die Bahnen der Körper als denen der Lichtstrahlen sehr ähnlich voraussetze.

§. 145. **Aufgabe.** Vorausgesetzt wird, dass der Sinus des Einfallswinkels auf irgend eine Oberfläche zum Austrittssinus im constanten Verhältnisse stehe, und dass die Krümmung des Weges der Körper in der Nähe jener Oberfläche in einem so kurzen Raume erfolgen, dass

man denselben als einen Punkt ansehen könne. Man soll diejenige Oberfläche bestimmen, welche bewirkt, dass alle von einem gegebenen Orte nach und nach ausgehenden Körper nach einem anderen gegebenen Orte hin convergiren.

Es sei A der Ort, von welchem aus die kleinen Körper divergiren, B derjenige, nach welchem hin sie convergiren sollen und CDE die Curve, welche bei der Umdrehung um die Axe AB die gesuchte Ober-

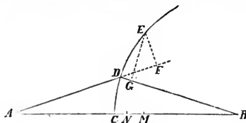


Fig. 130.

fläche beschreibt. D und E seien beliebige Punkte jener Curve, EF und EG Perpendikel auf die Wege AD und DB des Körpers. Es nähere sich der Punkt D dem Punkte E, und das letzte Verhältniss der Linie DF, um welche AD zunimmt, zu DG, um welche BD abnimmt, wird dasselbe sein, wie das des Einfallswinkels zu dem des Austrittssinus.[81]) Das Verhältniss des Increments der Linie AD zum Decrement der Linie BD ist daher constant, und wenn man daher auf der Axe beliebig einen Punkt C annimmt, durch welchen die Curve CDE gehen soll, und das Increment CM der Linie AC zum Decrement CN der Linie BC in demselben constanten Verhältniss annimmt; so kann man aus den Mittelpunkten A und B mit den Radien AM und BN Kreise beschreiben, welche sich gegenseitig in D schneiden. Jener Punkt D wird in der gesuchten Curve CDE liegen und dieselbe bestimmen, indem er beliebige Punkte derselben treffen kann.

Zusatz 1. Indem man bewirkt, dass der Punkt A oder B bald sich in's Unendliche entfernt, bald sich nach verschiedenen Theilen von C begiebt, erhält man alle diejenigen Figuren, welche Cartesius in der Optik und Geometrie zum Behuf der Brechungen dargestellt hat. Da er die Auffindung derselben für sehr wichtig hielt und dieselbe eifrigst verbarg, so schien es angemessen, sie durch diesen Satz hier darzustellen.

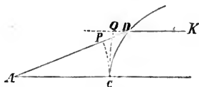


Fig. 131.

Zusatz 2. Fällt ein Körper auf die beliebige Oberfläche CD, längs der Linie AD, welche nach irgend einem Gesetze con-

struirt ist, auf und tritt derselhe längs einer auderen beliebigen geraden Linie DK aus; denkt man sich ferner von C aus die krummen Linien CP und CQ gezogen, welche respective auf AD und DK perpendikulär sind: so verhalten sich die Incremente der Linien PD und QD, mithin auch die entstandenen Linien PD und QD selbst, wie der Einfallssinus zum Austrittssinus, und umgekehrt.

§. 146. Aufgabe. Unter denselben Voraussetzungen denke man sich um die Axe AB eine beliebige regelmässige oder unregelmässige anziehende Fläche CD heschrieben, durch welche die vom gegebenen Orte A ausgehenden Körper gehen sollen; man soll eine zweite anziehende Fläche EF finden, welche bewirkt, dass jene Körper nach einem gegebenen Orte B hin convergiren. Die Verbindungslinie AB

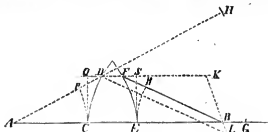


Fig. 132.

schneide die erste Oberfläche in C, die zweite in E, indem der Punkt D beliebig angenommen wird. Vorausgesetzt, dass der Eintrittssinus sich zum Austrittssinus der ersten Fläche, und ebenso der Austrittssinus zum Eintrittssinus der zweiten Fläche sich verhalte, wie

$$1.\quad M : N;$$

verlängere man AB bis G, so dass

$$2.\quad BG : CE = M - N : N,$$

ferner AD his H, so dass

$$3.\quad AH = AG$$

sei, endlich DF bis K, so dass

$$4.\quad DK : DH = N : M$$

sei. Man ziehe BK, beschreibe aus D als Mittelpunkt mit DH als Radius einen Kreis, welcher die verlängerte Linie KB in L schneidet, ziehe

$$5.\quad BF \ddagger DL;$$

alsdann wird F in die Curve EF fallen, welche, um die Axe AB gedreht, die gesuchte Oberfläche beschreibt.

Man denke sich CP auf AD, CQ und ES auf FD und ER auf BF perpendikulär, also

$$6.\quad QS = CE;$$

alsdann ist (nach §. 145., Zusatz 2.)

$$PD : QD = M : N$$

mithin nach 4. $$PD : QD = DL : DK$$

7. PD : QD = FB : FK.

Hieraus folgt

$$PD : QD = DL - FB : DK - FK$$
$$= PH - PD - FB : DF$$
$$= PH - PD - FB : FQ - QD$$

8. $PD : QD = PH - FB : FQ$

d. h., weil $HP = CG$ und $QS = CE$

$$PD : QD = CE + BE + BG - BF : CE - FS$$
$$= CE + BG - FR : CE - FS$$

Da aber (wegen Gl. 2.) auch

$$CE + BG : CE = M : N,$$

so folgt

$$CE + BG - FR : CE - FS = CE + BG : CE$$
$$= M : N$$

9. FR : FS = M : N.

Nach §. 145., Zusatz 2. zwingt daher die Oberfläche EF, den längs DF in sie einfallenden Körper, seinen Weg auf der Linie FR nach B fortzusetzen. W. z. b. w.

§. 147. Anmerkung. Nach derselben Methode könnte man zu drei oder mehreren Oberflächen übergehen. Zu optischen Zwecken eignen sich aber am meisten die sphärischen Figuren. Bildet man die Objectivgläser von Fernröhren aus zwei sphärisch geformten Gläsern, welche Wasser zwischen sich enthalten; so ist es möglich, dass durch die Brechung des Wassers die Refractionsfehler, welche in den äusseren Oberflächen der Gläser entstehen, hinreichend genau verbessert werden. Solche Objective sind aber den elliptischen und hyperbolischen vorzuziehen, nicht allein, weil sie leichter und genauer hergestellt werden können, sondern auch, weil sie die ausserhalb der Axe des Glases gelegenen Strahlenbüschel genauer brechen.

Die verschiedene Brechbarkeit verschiedener Strahlen verhindert jedoch, dass optische Instrumente durch sphärische oder beliebige andere Figuren vollkommen werden. Wenn man die hieraus entspringenden Fehler nicht verbessern kann, so wird alle Mühe auf Verbesserung der übrigen Fehler ohne Ueberlegung verwendet.

Von der Bewegung der Körper.

ZWEITES BUCH.

ABSCHNITT I.

Von der Bewegung solcher Körper, welche einen der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand erleiden.

§. 1. Lehrsatz. Ein Körper, welcher einen seiner Geschwindigkeit proportionalen Widerstand erleidet, verliert einen dem zurückgelegten Wege proportionalen Theil seiner Bewegung.

Da nämlich die, in den einzelnen gleichen Zeittheilchen verlorene Bewegung sich wie die Geschwindigkeit verhält, d. h. wie die Theilchen des zurückgelegten Weges; so erhält man durch Zusammensetzung den in der ganzen Zeit erlittenen Verlust an Bewegung dem ganzen Wege proportional. W. z. b. w.

Zusatz. Wenn daher ein von aller Schwere freier Körper, vermöge eines ihm beigebrachten Anstosses, sich im freien Raume bewegt, und sowohl die ganze anfängliche, als auch die nach Zurücklegung eines bestimmten Weges übrige Bewegung gegeben ist; so kennt man auch den ganzen Weg, welchen der Körper in unbestimmter Zeit zurücklegen kann. Es verhält sich nämlich der letztere Weg zu dem schon zurückgelegten Wege, wie die ganze anfängliche Bewegung zu dem bereits verlorenen Theile derselben.

§. 2. Lehrsatz. Grössen, welchen ihren Unterschieden proportional sind, sind selbst stetig proportional.

Aus $A : A—B = B : B—C = C : C—D =$ etc.
folgt nämlich $A : B = B : C = C : D =$ etc. W. z. b. w.

§. 3. Lehnsatz. Erleidet ein Körper einen seiner Geschwindigkeit proportionalen Widerstand, und bewegt er sich nur vermöge eines, durch eine Kraft ihm beigebrachten Anstosses, in einem gleichartigen Mittel und werden endlich die Zeittheile als gleich angenommen; so stehen die Geschwindigkeiten im Anfange der einzelnen Zeittheile in

geometrischer Progression, und es verhalten sich die in den einzelnen Zeiten beschriebenen Wege wie die Geschwindigkeiten.

Erster Fall. Ist die Zeit in gleiche Stücke getheilt, und wirkt im Anfange eines jeden der letzteren, die der Geschwindigkeit proportionale Kraft des Widerstandes durch einen einzelnen Stoss; so verhält sich die Abnahme der Geschwindigkeit in den einzelnen Zeittheilchen wie dieselbe Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeiten sind daher ihren Unterschieden proportional und stehen mithin (nach §. 2.) selbst in stetiger Proportion.[82]) Setzt man nun aus einer gleichen Anzahl von Zeittheilchen beliebige gleiche Zeiten zusammen, so verhalten sich die Geschwindigkeiten im Anfange dieser Zeiten selbst, wie diejenigen Glieder einer stetigen Progression, welche man sprungweise genommen hat, indem man immer eine gleiche Anzahl zwischenliegender Glieder überschlägt. Die Verhältnisse dieser Glieder werden aber aus den, gleich oft wiederholten, gleichen Verhältnissen der zwischenliegenden Glieder zusammengesetzt, und sind daher gleich.[83]) Die diesen Gliedern proportionalen Geschwindigkeiten stehen demnach in geometrischer Progression. Vermindert man in's Unendliche jene gleichen Zeittheilchen und vermehrt man ebenso ihre Anzahl so weit, das der Impuls des Widerstandes ein stetiger wird; so werden die im Anfange der gleichen Zeiten immer stetig proportionalen Geschwindigkeiten auch in diesem Falle in stetiger Proportion stehen. W. z. b. w.

Zweiter Fall. Aus dem Obigen folgt auch, dass die Unterschiede der Geschwindigkeiten, d. h. die in den einzelnen Zeiten verlorenen Theile derselben sich wie die ganzen Geschwindigkeiten verhalten. Die in den einzelnen Zeiten beschriebenen Wege verhalten sich aber (nach §. 1.) wie die verlorenen Theile der Geschwindigkeiten und daher wie diese selbst. W. z. b. w.

Zusatz. Man beschreibe zu den rechtwinkligen Asymptoten ADC und CH die Hyperbel BG und ziehe AB und GD auf AC perpendikulär.

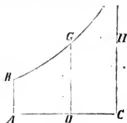


Fig. 133.

Drückt man nun sowohl die Geschwindigkeit des Körpers, als auch den Widerstand des Mittels im Anfange der Bewegung durch die beliebige constante Linie AC, nach Verlauf einiger Zeit aber durch die unbestimmte Linie DC aus; so kann die Zeit durch die Fläche ABGD, und der in derselben beschriebene Weg durch die Linie AD ausgedrückt werden.[84]) Wird nämlich jener Flächenraum nach der Weise der Zeit gleichförmig durch die Bewegung des Punktes D vergrössert; so wird DC in geometrischem Verhältniss nach der Weise der Geschwindigkeit vermindert und es nehmen die in gleichen Zeiten beschriebenen Theile der Geraden AC in demselben Verhältniss ab.

§. 4. Aufgabe. Ein Körper steigt in einem ähnlichen Mitte

geradlinig auf oder ab, und dieses widersteht im Verhältniss der Geschwindigkeit, ferner wirkt auf jenen die gleichförmige Kraft der Schwere; man soll eine Bewegung bestimmen.

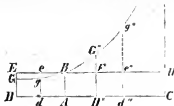


Fig. 134.

Steigt der Körper auf, so werde die Schwere durch das beliebige gegebene Rechteck BACH, und der Widerstand des Mittels, im Anfang des Aufsteigens, durch das auf der entgegengesetzten Seite liegende Rechteck ABED ausgedrückt. Zu den rechtwinkligen Asymptoten AC und CH beschreibe man eine, durch den Punkt B gehende, Hyperbel, welche die Perpendikel DE und de in G und g schneidet. Alsdann wird der Körper

aufsteigend in der Zeit DGgd den Raum EGge
„ „ „ DGBA „ „ EGB
absteigend „ „ „ ABG"D" den Raum BFG"
„ „ „ B"G"g"d" „ „ FG"g"e"

beschreiben, und die Geschwindigkeiten des Körpers (welche den Widerständen des Mittels proportional sind) werden in den Perioden dieser Zeiten respective sein:

ABED, ABed, Null, ABFD", ABe"d".

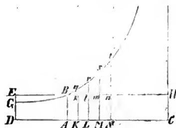


Fig. 135.

Die grösste Geschwindigkeit, welche der Körper absteigend erlangen kann, wird sein:

ABHC.

Man löse das Rechteck ABHC in unzählige kleinere

Ak, Kl, Lm, Mn etc.

auf, welche sich wie die, in eben so vielen gleichen Zeiten erfolgten Incremente der Geschwindigkeiten verhalten. Alsdann sind

Null, Ak, Al, Am, An, etc.

den ganzen Geschwindigkeiten proportional, d. h. (nach der Voraussetzung) dem Widerstande des Mittels im Anfange der einzelnen gleichen Zeiten. Nun verhalte sich

AC : AK, oder ABHC : ABkK

wie die Kraft der Schwere zum Widerstande im Anfange des zweiten Zeitraumes. Zieht man von der Kraft der Schwere den jedesmaligen Widerstand ab, so bleiben

ABHC, KkHC, LlHC, MmHC, etc.

übrig, welche sich wie die absoluten Kräfte verhalten, durch die der Körper im Anfange der einzelnen Zeiträume angetrieben wird; folglich

(nach Gesetz II. der Bewegung) wie die Incremente der Geschwindigkeiten, d. h. wie die Rechtecke

Ak, Kl, Lm, Mn, etc.

Sie stehen daher nach §. 2.) in geometrischer Progression. Schneiden die verlängerten geraden Linien

Kk, Ll, Mm, Nn, etc.

die Hyperbel in den Punkten

q, r, s, t, etc.;

so sind die Flächen

ABqK, KqrL, LrsM, MstN, etc.

einander gleich, und daher sowohl den Zeiten, als auch den immer gleichen Kräften der Schwere analog.

Es ist aber (nach erstem Buche, §. 7., Zusatz 3. und §. 8.)

Fläche ABqK : Fläche BqK = Kq : $^1/_2$qk

= AC : $^1/_2$AK, [85])

d. h. wie die Kraft der Schwere zum Widerstande in der Mitte des ersten Zeitraumes.

Aus demselben Grunde verhalten sich

die Flächen qKLr, rLMs, sMNT, etc.

zu den Flächen qklr, rlms, smnt, etc.

wie die Kraft der Schwere zum Widerstande in der Mitte des zweiten, dritten, vierten u. s. w. Zeitraumes.

Da ferner die gleichen Flächen

BAKq, qKLr, rLMs, sMNt, etc.

der jedesmaligen Kraft der Schwere analog sind; so sind die Flächen

Bkq, qklr, rlms, smnt, etc.

dem Widerstande in der Mitte der einzelnen Zeiträume, d. h. (nach der Voraussetzung) den Geschwindigkeiten, folglich den beschriebenen Wegen analog. Nimmt man nun die Summen analoger Grössen, so sind die Flächen Bkq, Blr, Bms, Bnt, etc.

den ganzen beschriebenen Wegen, und auch die Flächen

ABqK, ABrL, ABsM, ABtN, etc.

den Zeiten analog.

Der Körper beschreibt daher beim Absteigen in jeder Zeit

ABrL

den Raum Blr,

und in der Zeit LrtN den Weg lrtn. W. z. b. w.

Auf gleiche Weise wird die dargestellte Bewegung während des Aufsteigens erwiesen.

Zusatz 1. Die grösste Geschwindigkeit, welche der Körper während des Niedersteigens erlangen kann, verhält sich daher zu der in jeder gegebenen Zeit erlangten Geschwindigkeit, wie die constante Kraft der Schwere, welche beständig auf ihn einwirkt, zu derjenigen Kraft, welche der Widerstand am Ende jener Zeit ihm entgegenstellt. [86])

Zusatz 2. Nimmt die Zeit in arithmetischer Progression zu, so

nimmt die Summe jener grössten Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit beim Aufsteigen (wie auch ihre Differenz beim Absteigen) in geometrischer Progression ab.[87])

Zusatz 3. Auch die Unterschiede der Wege, welche in gleichen Zeitintervallen beschrieben werden, nehmen in derselben geometrischen Progression ab.[88])

Zusatz 4. Der durch einen Körper beschriebene Raum ist aber dem Unterschiede zweier Räume gleich, deren einer sich wie die Zeit vom Anfang des Absteigens an, deren anderer sich wie die Geschwindigkeit verhält und welche beide Räume im Anfange des Absteigens einander gleich sind.[89])

§. 5. Anfgabe. Es wird vorausgesetzt, dass in irgend einem ähnlichen Mittel die Schwere gleichförmig wirke und perpendikulär gegen die Ebene des Horizonts gerichtet sei; man soll die Bewegung eines Projectils bestimmen, welches im Mittel einen der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand erleidet.

Fig. 136.

Vom Punkte D aus gebe das Projectil längs der beliebigen geraden Linie DP fort, und es drücke die Länge der letztern seine Geschwindigkeit im Anfange der Bewegung aus. Vom Punkte P fälle man auf die horizontale Linie DC das Perpendikel PC und schneide DC so in A, dass DA sich zu AC verhalte, wie der, aus der anfänglichen nach oben gerichteten Bewegung entstandene, Widerstand zur Schwere oder (was dasselbe ist), dass

$$AD . PD \text{ sich zu } AC . CP$$

verhalte, wie der ganze Widerstand im Anfange der Bewegung zur Kraft der Schwere.[90]) Nun beschreibe man eine beliebige Hyperbel GTBS, welche die errichteten Perpendikel DG und AB in G und B schneidet und vollende das Parallelogramm DGKC, dessen Seite GK die Linie AB in Q schneidet. Bestimmt man nun eine Linie N so, dass

$$1.\quad N : QB = DC : CP$$

und errichtet man in dem beliebigen Punkte R der Linie DC das Perpendikel RT, welches die Hyperbel in T und die Linien EH, GK, DP in J, t, V schneidet; nimmt man ferner auf demselben

$$2.\quad Vr = \frac{tGT}{N} \text{ oder } Rr = \frac{GTJE}{N}$$

an; so wird das Projectil in der Zeit DRTG zum Pnnkte r gelangen, indem es die Cūrve DraF beschreibt, in welcher der Pnnkt r stets liegt. Hierauf gelangt es znm höchsten Punkte a in der Linie AB nnd nähert sich beständig der Asymptote PC. Seine Geschwindigkeit im beliebigen Pnnkte r ist der Tangente rL in diesem Punkte proportional. Es ist nämlich $N : QB = DC : CP = DR : RV$,

also

$$3.\quad RV = \frac{DR \,.\, QB}{N}$$

nnd ferner

$$4.\quad Rr = RV - Vr = \frac{DR \,.\, QB - tGT}{N} = \frac{DR \,.\, AB - RDGT}{N}.$$

Die Zeit werde nnn durch die Fläche RDGT ausgedrückt, nnd (nach Gesetze, Zusatz 2.) die Bewegung des Körpers in zwei zerlegt, die eine perpendikulär nach oben, die andere horizontal seitwärts gerichtet. Da ferner der Widerstand der Bewegung proportional ist, so wird man auch diesen in zwei zerlegen können, welche den beiden Seitenbewegungen proportional und entgegengesetzt sind. Die Länge der horizontal gerichteten Seitenbewegung ist (nach dem zweiten Buche, §. 3.) der Linie DR, die aufwärts gerichtete Bewegungaher (nach dem zweitem Buche, §. 4.) $DR \,.\, AB - RDGT$, d. h. Rr proportional.

Beim Anfange der Bewegung selbst ist aber

$$RDGT = DR \,.\, AQ,$$

daher in diesem Falle (nach 4.)

$$Rr = \frac{DR \,.\, AB - DR \,.\, AQ}{N}$$

oder 5. $Rr : DR = AB - AQ : N = BQ : N = CP : DC$ (1.),

d. h. es verhält sich Rr zn Dr, wie die anfängliche aufwärts gerichtete Bewegung zu der horizontalen.

Da nun Rr immer der aufwärts gerichteten, und DR der horizontalen Bewegung proportional ist, da ferner im Anfange Rr sich zu DR wie die erstere zur letzteren verhält; so muss

$$Rr : DR$$

nothwendig immer das Verhältniss beider Seitenbewegungen ausdrücken, und der Körper sich daher in der Curve DraF bewegen, in welcher der Pnnkt r beständig liegt. W. z. b. w.

Zusatz 1. Es ist daher $Rr = \frac{DR \,.\, AB - RDGT}{N}$ (Gl. 4.). Verlängert man nnn RT bis X, so dass

$$6.\quad RX = \frac{DR \,.\, AB}{N}$$

werde, d. h. wenn man das Parallelogramm ACPY vollendet, die Linie DY die CP in Z schneidet nnd RT verlängert, bis sie DY in X schneidet; so wird

$$7.\quad Xr = \frac{RDGT}{N},$$

also der Zeit proportional.

Znsatz 2. Nimmt man also unzählige Linien CR, oder was das-

selbe ist, ZX in geometrischer Progression, so ergeben sich eben so viel Linien Xr in arithmetischer Progression. Hiernach kann man die Curve DraF leicht mittelst der Logarithmentafeln construiren.

Zusatz 3. Man construire zum Scheitel D mit einem abwärts verlängerten Durchmesser DG und einem Parameter, welcher sich zu 2 . DP verhält, wie der ganze Widerstand im Anfange der Bewegung zur Kraft der Schwere, eine Parabel. Alsdann wird die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper vom Orte D längs DP ausgehen muss, um im gleichförmig widerstehenden Mittel die Curve DraF zu beschreiben, dieselbe sein, mit welcher er von demselben Punkte längs DP ausgehen muss, um im nicht widerstehenden Mittel die Parabel zu beschreiben.

Der Parameter dieser Parabel ist nämlich im Anfange der Bewegung selbst

$$= \frac{DV^2}{Vr}$$

und

$$8.\quad Vr = \frac{tGT}{X} = \frac{DR \cdot Tt}{2\,X}.$$

Die gerade Linie, welche, wenn sie gezogen wäre, die Hyperbel GTS in G berühren würde, ist parallel DK, mithin

$$Tt : KC = DR : DC$$

oder

$$9.\quad Tt = \frac{CK \cdot DR}{DC}.$$

Ferner war (Gl. 1) $X = \frac{QB \cdot DC}{CP}$,

daher wird

$$Vr = \frac{DR^2 \cdot CK \cdot CP}{2 \cdot DC^2 \cdot QB},$$

oder weil

$$DR : DC = DV : DP$$

$$Vr = \frac{DV^2 \cdot CK \cdot CP}{2 \cdot DP^2 \cdot QB}$$

und so der Parameter, oder

$$\frac{DV^2}{Vr} = \frac{2 \cdot DP^2 \cdot QB}{CK \cdot CP}$$

d. h. weil

$$QB : CK = DA : AC\ [91])$$

$$10.\quad \frac{DV^2}{Vr} = \frac{2 \cdot DP^2 \cdot DA}{AC \cdot CP}$$

und so

der Parameter : 2 . DP = DP . DA : PC . AC

oder

11. der Parameter : 2 . DP = Widerstand : Schwere.

Zusatz 4. Wird demnach ein Körper von einem gegebenen Orte D, mit gegebener Geschwindigkeit längs einer, der Lage nach gegebenen, geraden Linie DP geworfen und ist der Widerstand des Mittels beim Anfange der Bewegung bekannt; so kann man die Curve DraF bestimmen, welche derselbe beschreiben wird.

Aus der gegebenen Geschwindigkeit erhält man nämlich den Parameter der Parabel, wie bekannt. [92]) Aus der Proportion 11. erhält man hierauf DP. Schneidet man nun CD so in A, dass

CP . AC : DP . DA = Schwere : Widerstand

wird, so erhält man den Punkt A und daraus die Curve DraF.

Zusatz 5 Ist umgekehrt die Curve DraF gegeben, so kennt man auch die Geschwindigkeit des Körpers und den Widerstand des Mittels in den einzelnen Orten r. Aus dem gegebenen Verhältniss

CP . AC : DP . DA

erhält man sowohl den Widerstand des Mittels beim Anfang der Bewegung, als auch den Parameter der Parabel und hieraus dann auch die anfängliche Geschwindigkeit der Bewegung. Aus der Länge der Tangente rL ergiebt sich die ihr proportionale Geschwindigkeit und der der letzteren proportionale Widerstand im beliebigen Punkte r.

Zusatz 6. Es verhält sich 2 . DP zum Parameter der Parabel, wie die Schwere zum Widerstande im Punkte D. Nimmt die Geschwindigkeit zu, so wächst der Widerstand ihr proportional, wogegen der Parameter im doppelten Verhältniss zunimmt Offenbar wird also die Länge 2 . DP in jenem einfachen Verhältniss wachsen und ist daher immer der Geschwindigkeit proportional [93]), auch wird sie durch Veränderung des Winkels CDP weder grösser noch kleiner, wenn nicht die Geschwindigkeit sich verändert.

Zusatz 7. Hieraus ergiebt sich eine Methode, um sehr nahe aus den Erscheinungen die Curve DraF zu bestimmen, und daraus dann den Widerstand und die Geschwindigkeit, womit der Körper geworfen wird, herzuleiten. Es werden zwei gleiche und ähnliche Körper mit derselben Geschwindigkeit vom gegebenen Orte D aus geworfen, und zwar unter verschiedenen Winkeln CDP und cDp (wo die kleinen Buchstaben sich auf unterhalb gelegene Orte beziehen), und man kenne die Punkte F und f, wo die Körper in die horizontale Ebene DC fallen. Nimmt man hierauf für DP oder Dp eine beliebige Länge an, so denke man sich, dass der Widerstand in D zur Schwere in irgend einem Verhältniss stehe und drücke dieses Verhältniss durch die beliebige Länge SM aus.

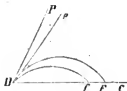


Fig. 137.

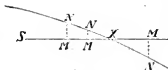


Fig. 138.

Hierauf findet man durch Rechnung aus der angenommenen Länge DP die Längen DF und Df und subtrahire nun von dem, durch Rechnung gefundenen, Verhältniss

$$\frac{Ff}{DF}$$

das durch Versuch gefundene, und drücke den Unterschied durch das Perpendikel MN aus. Dies wiederhole man zum zweiten und dritten

Mal, indem man immer ein neues Verhältniss SM des Widerstandes zur Schwere annimmt und den neuen Unterschied durch ein neues MN ausdrückt. Man errichte die positiven Unterschiede nach der einen, die negativen nach der entgegengesetzten Seite von SM, ziehe hierauf durch die Punkte N die regelmässige Curve NNN, welche die Linie SMMM in X schneidet; es wird alsdann SX das wahre Verhältniss des Widerstandes zur Schwere sein, welches man sucht. Aus diesem Verhältniss hat man die Länge DF durch Rechnung herzuleiten, und es wird alsdann diejenige Linie, welche sich zur angenommenen Länge von DP verhält, wie die eben gefundene Länge von DF zu der durch Versuch erhaltenen, die wahre Länge von DP sein. Hat man diese gefunden, so kennt man die Curve DraF, welche der Körper beschreibt, seine Geschwindigkeit und den Widerstand in den einzelnen Punkten.

§. 6. Anmerkung. Uebrigens ist die Hypothese, dass der Widerstand der Geschwindigkeit proportional sei, mehr eine mathematische, als eine der Natur entsprechende. Dieses Verhältniss findet sehr nahe statt, wenn Körper in ziemlich festen Mitteln sich sehr langsam bewegen. In Mitteln aber, welche von aller Festigkeit frei sind, finden die Körper einen Widerstand, welcher (wie später bewiesen werden wird) im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit steht. Durch die Wirkung des geschwinderen Körpers wird derselben Menge des Mittels in kürzerer Zeit eine, im Verhältniss der grössern Geschwindigkeit, grössere Bewegung und in gleicher Zeit (wegen der grössern Menge des gestörten Mittels) eine im doppelten Verhältniss grössere Bewegung mitgetheilt und es ist (nach Gesetz II. und III. der Bewegung) der Widerstand der mitgetheilten Bewegung proportional. Wir wollen sehen, was für Bewegungen aus diesem Gesetze des Widerstandes hervorgehen.

ABSCHNITT II.

Von der Bewegung solcher Körper, welche einen Widerstand erleiden, der im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit steht.

§. 7. Lehrsatz. Ein Körper erleidet einen Widerstand, welcher dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, und bewegt sich allein vermöge eines, durch eine Kraft ihm beigebrachten Anstosses in einem gleichartigen Mittel; die Zeiten werden dabei in einer ansteigenden geometrischen Progression angenommen. Es stehen alsdann die Geschwindigkeiten beim Anfange der einzelnen Zeittheile in derselben um-

gekehrt genommenen geometrischen Progression, und die Wege, welche in den einzelnen Zeittheilchen beschrieben werden, sind einander gleich.

Der Widerstand des Mittels ist nämlich dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, und es verhält sich das Decrement der Geschwindigkeit wie der Widerstand. Theilt man daher die Zeit in unzählige gleiche Stücke, so verhalten sich die Quadrate der Geschwindigkeiten im Anfange der einzelnen Zeittheile, wie die Unterschiede der einzelnen Geschwindigkeiten.

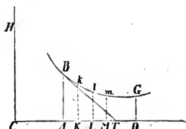


Fig. 139.

Es seien die auf der Linie CD angenommenen Stücke

AK, KL, LM, etc.

jene Zeittheilchen, und man errichte die Perpendikel

AB, Kk, Ll, Mm, etc.

welche die, zum Mittelpunkte C und den rechtwinkligen Asymptoten CD und CH beschriebene Hyperbel BklmG in den Punkten

B, k, l, m, etc.

schneiden. Alsdann haben wir

$$1.\quad AB : Kk = CK : CA$$

oder

$$AB - Kk : Kk = AK : CA$$

$$AB - Kk : AK = Kk : CA$$

und

$$2.\quad AB - Kk : AK = AB \,.\, Kk : AB \,.\, CA.$$

Da nun sowohl AK, als auch AB . CA constant und gegeben sind, so wird AB — Kk proportional AB . Kk

und zuletzt, wenn AB und Kk zusammenfallen;

$$AB - Kk \text{ proportional } AB^2.$$

Auf dieselbe Weise schliessen wir, dass

$$Kk - Ll,\ Ll - Mm, \text{ etc.}$$

respective proportional

$$Kk^2,\ Ll^2, \text{ etc.}$$

sind. Die Quadrate der Linien

AB, Kk, Ll, Mm, etc.

verhalten sich demnach wie ihre Unterschiede, und da die Quadrate der Geschwindigkeiten sich ebenfalls wie die Unterschiede der letzteren verhielten; so wird die Progression beider einander ähnlich sein. Ist dies erwiesen, so folgt auch, dass die durch diese Linien beschriebenen Räume in einer ähnlichen Progression mit den, durch die Geschwindigkeiten beschriebenen Wegen stehen.

Wird demnach die Geschwindigkeit im Anfange des ersten Zeittheilchens AK durch die Linie AB, die im Anfange des zweiten Zeittheilchen KL durch Kk, und der im ersten Zeittheilchen beschriebene Weg durch die

Fläche AKkB ausgedrückt, so werden alle folgenden Geschwindigkeiten durch die Linien

Ll, Mm, etc.

und die beschriebenen Wege durch die Flächen

KLlk, LMml, etc.

ausgedrückt werden. Setzt man dies zusammen und drückt die ganze Zeit durch die Summe AM ihrer Theile aus, so wird der ganze Weg durch die Summe AMmB seiner Theile bezeichnet werden.

Denkt man sich nun die Zeit AM so in die Theile

AK, KL, LM, etc.

zerlegt, dass CA, CK, CL, CM, etc.

in geometrischer Progression stehen, so bilden jene dieselbe Progression; ferner bilden die Geschwindigkeiten

AB, Kk, Ll, Mm, etc.

dieselbe Reihe aber umgekehrt, endlich werden die Räume

AKkB, KLlk, LMml, etc.

einander gleich. W. z. b. w[94].

Zusatz 1. Wird also die Zeit durch einen beliebigen Theil AD der Asymptote, und die Geschwindigkeit im Anfange dieser Zeit durch die Ordinate AB ausgedrückt; so wird die Geschwindigkeit am Ende dieser Zeit durch die Ordinate GD und der ganze beschriebene Weg durch den anliegenden hyperbolischen Flächenraum ABGD dargestellt. Ferner stellt das Rechteck

AB . AD

den Weg dar, welchen ein Körper in derselben Zeit AD, mit der Anfangsgeschwindigkeit AB im nicht widerstehenden Mittel beschreiben könnte.

Zusatz 2. Man erhält also den im widerstehenden Mittel beschriebenen Weg, indem man ihn zu dem, mit gleichförmiger Geschwindigkeit AB und im nicht widerstehenden Mittel beschriebenen Wege in dem Verhältnisse

ABFD : AB . AD

setzt.

Zusatz 3. Man erhält auch den Widerstand des Mittels, indem man annimmt, derselbe sei im Anfange der Bewegung einer gleichförmigen Centripetalkraft gleich, welche beim Falle des Körpers im nicht widerstehenden Mittel, in der Zeit AC die Geschwindigkeit AB erzeugen könnte. Zieht man nämlich die Linie BT, welche die Hyperbel in B berührt und die Asymptote in T schneidet, so wird

AT = AC,[95])

und die erstere Linie drückt die Zeit aus, in welcher der erste, gleichförmig fortgesetzte Widerstand die ganze Geschwindigkeit AB aufheben könnte.

Zusatz 4. Hieraus ergiebt sich auch das Verhältniss dieses

Widerstandes zur Kraft der Schwere, oder jeder anderen gegebenen Centripetalkraft.

Zusatz 5. Ist umgekehrt das Verhältniss des Widerstandes zu irgend einer gegebenen Centripetalkraft bekannt, so kennt man auch die Zeit AC, in welcher die dem Widerstande gleiche Centripetalkraft eine beliebige Geschwindigkeit AB würde erzeugen können, und daraus erhält man den Punkt B, durch welchen die Hyperbel zu den Asymptoten CH und CD beschrieben werden muss. Ferner erhält man den Weg ABGD, welchen der Körper, indem er seine Bewegung mit jener Geschwindigkeit AB beginnt, in einer beliebigen Zeit AD und im gleichartigen widerstehenden Mittel beschreiben kann.

§. 8. Lehrsatz. Vorausgesetzt wird, dass homogene und gleiche sphärische Körper einen Widerstand erleiden, welcher im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit steht, und dass dieselben sich allein vermöge eines, durch eine Kraft ihnen beigebrachten, Impulses bewegen. Alsdann beschreiben sie in Zeiten, welche den Anfangsgeschwindigkeiten umgekehrt proportional sind, gleiche Wege, und verlieren von ihren Geschwindigkeiten Theile, welche den ganzen proportional sind.

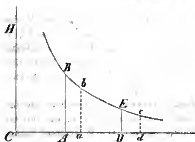


Fig 141.

Die, zu den rechtwinkligen Asymptoten CD und CH beschriebene, beliebige Hyperbel BbEe schneide die Perpendikel AB, ab, DE und de in den Punkten B, b, E und e, und es werden die Anfangsgeschwindigkeiten durch die Perpendikel AB und DE, die Zeiten durch die Linien Aa und Dd ausgedrückt. Es ist daher

1. Aa : Dd = DE : AB (nach der Voraussetzung)
   = CA : CD (nach der Natur der Hyperbel)

also auch

2. Aa : Dd = CA + Aa : CD + Dd
   = Ca : Cd
3. Aa : Dd = de : ab

und nach 1. und 3.

4. AB : DE = ab : de.

Es sind also die Flächen ABba und DEed, d. h. die beschriebenen Wege einander gleich,[36]) und es verhalten sich die Anfangsgeschwindigkeiten AD und DE, wie die Endgeschwindigkeiten ab und de. Da ferner auch

5. AB : DE = AB — ab : DE — de,

so sind auch die Anfangsgeschwindigkeiten ihren verlorenen Theilen proportional. W. z. b. w.

§. 9. Lehrsatz. Sphärische Körper, welche einen Widerstand erleiden, der im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit steht, verlieren in Zeiten, die sich direct wie die Anfangsbewegung und indirect wie der anfängliche Widerstand verhalten, von ihren Bewegungen Theile, die den ganzen proportional sind und beschreiben Wege, welche sich zusammengesetzt wie jene Zeiten und die Anfangsgeschwindigkeit verhalten.

Die verlorenen Theile der Bewegung verhalten sich nämlich, wie die Widerstände und die Zeiten zusammengesetzt. Damit nun die ersteren der ganzen Bewegung proportional seien, muss Widerstand und Zeit vereint der Bewegung proportional sein, es verhält sich also die Zeit direct wie die Bewegung und indirect wie der Widerstand. Nimmt man daher die einzelnen Zeittheilchen in eben diesem Verhältniss an, so verlieren die Körper von ihrer Bewegung Theilchen, die der ganzen proportional sind und behalten die Geschwindigkeit im ersten Verhältniss bei. Wegen des gegebenen constanten Verhältnisses der Geschwindigkeiten beschreiben sie daher stets Wege, welche sich wie die Anfangsgeschwindigkeit und die Zeiten zusammengesetzt verhalten.[97]) W. z. b. w.

Zusatz 1. Erleiden daher gleichgeschwinde Körper einen Widerstand, welcher im doppelten Verhältniss ihrer Durchmesser steht, so werden homogene Kugeln, welche sich mit beliebigen Geschwindigkeiten bewegen, Wege beschreiben, die ihren Durchmessern proportional sind, und Theile der Bewegung verlieren, welche sich wie die letztere verhalten.

Die Bewegung einer jeden Kugel verhält sich nämlich wie ihre Geschwindigkeit und ihre Masse zusammengenommen, d. h. wie ihre Geschwindigkeit und der Cubus des Durchmessers. Der Widerstand verhält sich (nach der Voraussetzung) wie das Quadrat des Durchmessers und das Quadrat der Geschwindigkeit zusammengesetzt; endlich die Zeit (nach diesem Lehrsatz) direct wie die Bewegung und indirect wie der Widerstand, d. h. direct wie der Durchmesser und indirect wie die Geschwindigkeit. Mithin verhält sich der Weg, welcher der Zeit und Geschwindigkeit zusammengesetzt proportional ist, wie der Durchmesser.[98])

Zusatz 2. Erleiden gleichgeschwinde Körper einen Widerstand, der im $^3/_2$ ten Verhältniss der Durchmesser steht, so beschreiben homogene Kugeln, welche sich mit beliebigen Geschwindigkeiten bewegen, Wege, die im $^3/_2$ ten Verhältniss der Durchmesser stehen, und verlieren von ihrer Bewegung Theile, welche der ganzen Bewegung proportional sind.

Die Zeit wächst nämlich in demselben Verhältniss, in welchem der Widerstand abnimmt und der Weg ist der Zeit proportional.[99])

Zusatz 3. Erleiden allgemein gleichschnelle Körper einen Widerstand, der irgend einer Potenz der Durchmesser proportional ist; so verhalten sich die Wege, auf denen homogene mit beliebigen Geschwindig-

keiten sich bewegende Kugeln von ihrer Bewegung Theile verlieren, welche der ganzen proportional sind, wie der Quotient aus dem Cubus des Durchmessers durch jene Potenz desselben.

Sind D und E die Durchmesser, die Widerstände also proportional D^n und E^n, so verhalten sich die Wege, auf denen die verlorenen Theile der Bewegung der letztern proportional sind, wie D^{3-n} und E^{3-n}. Sind daher die Wege proportional D^{3-n} und E^{3-n}, so behalten die Geschwindigkeiten zu einander dasselbe Verhältniss, wie im Anfange der Bewegung.

Zusatz 4. Sind die Kugeln nicht homogen, so muss der von der dichtern beschriebene Weg, im Verhältniss der Dichtigkeit, grösser sein. Die Bewegung ist nämlich bei gleicher Geschwindigkeit grösser im Verhältniss der Dichtigkeit, und die Zeit nimmt (nach dem Lehrsatz) direct wie die Bewegung, der Weg endlich direct wie die Zeit zu.

Zusatz 5. Bewegen sich die Kugeln in verschiedenen Mitteln, so ist der Weg in dem Mittel, welches unter übrigens gleichen Umständen stärker widersteht, im Verhältniss des grössern Widerstandes kleiner. Die Zeit nimmt nämlich ab (nach dem Lehrsatz) umgekehrt wie der Widerstand und der Weg ist der Zeit proportional.

§. 10. Lehnsatz. Das Moment einer Genita[100]) erhält man, indem man das Moment jeder einzelnen erzeugenden Grösse in ihren Exponenten und Coëfficienten multiplicirt und die entstandenen Produkte addirt.

Function (Genita) nenne ich jede Grösse, welche aus gewissen Gliedern, in der Arithmetik durch Multplication, Division und Wurzelausziehung, in der Geometrie durch Aufsuchung des Inhalts und der Seiten, oder der äussern und mittlern Proportionalen, ohne Addition und Subtraction erzeugt wird. Grössen dieser Art sind: Produkte, Quotienten, Wurzeln, Rechtecke, Quadrate, Cuben, Quadratseiten, Würfelseiten und ähnliche. Diese Grössen betrachte ich hier als unbestimmt und veränderlich, und gleichsam durch eine beständige Bewegung oder Fluss fortwährend wachsend oder abnehmend. Ihr augenblickliches Increment oder Decrement begreife ich unter der Benennung Moment, so dass die Incremente als additive oder positive, die Decremente als subtractive oder negative Momente angesehen werden. Die Momente hören auf, Momente zu sein, sobald sie eine endliche Grösse erhalten. Man hat unter ihnen die eben entstehenden Anfänge endlicher Grössen zu verstehen, und betrachtet in diesem Lehnsatze nicht die Grösse der Momente, sondern ihr Verhältniss, wenn sie eben entstehen. Es kommt auf dasselbe hinaus, ob man statt der Momente entweder die Geschwindigkeiten der Zu- und Abnahme (welche man auch Bewegungen, Veränderungen und Fluxionen der Grössen nennen kann), oder beliebige endliche Grössen versteht, welche jenen Geschwindigkeiten proportional sind.

Der Coëfficient eines jeden erzeugenden Gliedes ist der Quo-

tient, welchen man erhält, wenn man die Function durch dieses Glied dividirt.

Der Sinn dieses Lehnsatzes ist daher folgender: Werden die Momente oder Geschwindigkeiten der Veränderung der, durch beständige Bewegung zu- oder abnehmenden, Grössen

$$A, B, C, \text{etc.}$$

bezeichet durch $a, b, c,$ etc.;

so ist das Moment (Differential) des Rechtecks $AB = Ab + aB$[101])

„ „ „ „ Productes $ABC = ABc + AbC + aBC$

Die Momente der Potenzen

$$A^2, A^3, A^4, A^{1/2}, A^{3/2}, A^{1/3}, A^{2/3}, \frac{1}{A}, \frac{1}{A^2}, \frac{1}{A^{1/2}}$$

sind respective

$$2aA, 3aA^2, 4aA^3, {}^1/_2 aA^{-1/2}, {}^3/_2 aA^{1/2}, {}^1/_3 aA^{-2/3}, {}^2/_3 aA^{-1/3}, -aA^{-2}, -2aA^{-3},$$
$$-{}^1/_2 aA^{-3/2}$$

Allgemein ist das Moment (Differential) der beliebigen Potenz

$$A^{\frac{n}{m}}$$

$$\text{gleich } \frac{n}{m} aA^{\frac{n-m}{m}}$$

Ferner das Moment der Function A^2B

gleich $2aAB + A^2b$

Das Moment der Function $A^3.B^4C^2$ ist $= 3aA^2B^4C^2 + 4A^3bB^3C^2 + 2A^3B^4cC$

„ „ „ „ $\frac{A^3}{B^2} = 3aA^2B^{-2} - 2A^3bB^{-3}$ u. s. w. f

Der Beweis des Lehnsatzes wird folgendermassen geführt.

Erster Fall. Ein durch beständige Bewegung wachsendes Rechteck

$$AB$$

war, als an den Seiten A und B die Hälften der Momente ${}^1/_2 a$ und ${}^1/_2 b$ fehlten

$$= (A - {}^1/_2 a)(B - {}^1/_2 b) = AB - {}^1/_2 aB - {}^1/_2 Ab + {}^1/_4 ab,$$

und wird, wenn A und B um dieselben halben Momente zugenommen haben, $= (A + {}^1/_2 a)(B + {}^1/_2 b) = AB + {}^1/_2 aB + {}^1/_2 Ab + {}^1/_4 ab.$

Subtrahirt man vom letztern Rechteck das erstere, so ergiebt sich der Rest $aB + Ab.$

Die ganzen Incremente a und b bringen daher im Rechteck AB das Increment $aB + Ab$ hervor. W. z. b. w.

Zweiter Fall. Man setze $AB = G$, alsdann wird das Moment des Productes ABC oder $GC = gC + Gc$ nach dem ersten Fall);

allein $G = AB, g = aB + Ab,$

mithin das Moment von ABC

$$= aBC + AbC + ABc.$$

Eben so verhält es sich mit einem Produkt beliebig vieler Factoren. W. z. b. w.

Dritter Fall. Setzt man $B = C = A$, so wird
das Moment von AB, d. h. das Moment von $A^2 = aA + Aa = 2aA$
„ „ „ ABC, „ „ „ „ $A^3 = aA^2 + aA^2 + aA^2 = 3aA^2$
und auf dieselbe Weise das Moment von $A^n = naA^{n-1}$. W. z. b. w.

Vierter Fall. Da $\frac{1}{A} \cdot A = 1$, so wird

$$A \,.\, \text{Moment von } \frac{1}{A} + a \,.\, \frac{1}{A} = \text{Moment von } 1 = 0;$$

mithin

$$\text{Moment von } \frac{1}{A}, \text{ d. h. Moment von } A^{-1} = -\frac{a \,.\, \frac{1}{A}}{A} = \frac{-a}{A^2} = -aA^{-2}.$$

Allgemein, da

$$\frac{1}{A^n} \,.\, A^n = 1$$

$$A^n \,.\, \text{Moment von } \frac{1}{A^n} + \frac{1}{A^n} \,.\, naA^{n-1} = 0 \text{ und so}$$

$$\text{Moment von } \frac{1}{A^n} = \text{Moment von } A^{-n} = -\frac{na}{A^n+1} = -naA^{-n-1}.$$

W. z. b. w.

Fünfter Fall. Da ferner

$$A^{1/2} \,.\, A^{1/2} = A,$$

so wird nach dem dritten Fall

$$2A^{1/2} \,.\, \text{Moment von } A^{1/2} = a$$

also $$\text{Moment von } A^{1/2} = \frac{a}{2A^{1/2}} = {}^1/_2 aA^{-1/2}.$$

Setzt man allgemein

$$A^{\frac{m}{n}} = B,$$

so wird $$A^m = B^n$$
also $$maA^{m-1} = nbB^{n-1}$$
und durch Division

$$maA^{-1} = nbB^{-1} = \frac{nb}{A^{\frac{m}{n}}}$$

endlich

$$b \text{ oder Moment von } A^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} aA^{\frac{m-n}{n}}. \quad \text{W. z. b. w.}$$

Sechster Fall. Das Moment einer beliebigen Function

$$A^m \,.\, B^n$$

ist daher

$$B^n \,.\, \text{Moment von } A^m + A^m \,.\, \text{Moment von } B^n$$
$$= maA^{m-1} \,.\, B^n + nbA^m \,.\, B^{n-1},$$

und zwar ist es gleichgültig, ob die Exponenten m und n ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen sind. Dasselbe Verhältniss findet statt, wenn das Produkt aus mehrern Potenzen steht. W. z. b. w.

Zusatz 1. Ist unter mehreren stetig proportionalen Grössen Eine constant, so verhalten sich die Momente der übrigen Glieder wie diese selbst, respective multiplicirt durch die Anzahl der Intervalle zwischen ihnen und dem constanten Gliede. Sind z. B.

A, B, C, D, E, F

stetig proportional und ist C constant, so verhalten sich die Momente der übrigen Glieder zu einander, wie

— 2A, — B, D, 2E, 3F.[102])

Zusatz 2. Sind bei vier proportionalen Grössen die beiden mittleren constant, so verhalten sich die Momente der beiden äussern Glieder wie diese selbst. Dasselbe gilt von den Seiten jedes constanten Rechtecks.[103])

Zusatz 3. Ist die Summe oder Differenz zweier Quadrate constant, so verhalten sich die Momente der Seiten indirect wie diese selbst.[104])

§. 11. Anmerkung. In einem an unsern Landsmann Collinius gerichteten Briefe vom 10. Dec. 1672 beschrieb ich eine Methode der Tangenten, welche meiner Vermuthung nach mit der, damals noch nicht veröffentlichten, Methode von Slusius identisch sei. Ich fügte folgende Bemerkung hinzu: „Dies ist ein besonderer Fall oder vielmehr ein Zusatz zur allgemeinen Methode, welche sich auf jeden mühevollen Calcul „erstreckt, nicht nur auf die Construction von Tangenten an allen geometrischen oder mechanischen Curven, oder die auf andere Curven sich „beziehenden geraden Linien, sondern auch auf die Lösung anderer schwieriger Arten von Aufgaben über die Krümmung, Quadratur, Rectification, „die Schwerpunkte der Curven etc., und sie beschränkt sich nicht (wie „die Methode von Huddenius über Maxima und Minima) blos auf diejenigen Gleichungen, welche frei von unbekannten Grössen sind. Diese „Methode habe ich jener andern eingefügt, nach welcher ich die Gleichungen behandele, indem ich sie auf unendliche Reihen reducire." So weit jener Brief. Diese letzten Worte beziehen sich auf eine Abhandlung, welche ich im Jahre 1671 über diesen Gegenstand geschrieben habe. Die Grundlage dieser allgemeinen Methode ist im vorhergehenden Lehrsatze enthalten.[105])

§. 12. Lehrsatz. Bewegt sich ein Körper in einem homogenen Mittel, unter gleichförmiger Wirkung der Schwere, geradlinig auf oder ab, und theilt man den ganzen beschriebenen Weg in gleiche Theile; werden ferner beim Anfang der einzelnen Theile (indem man beim Aufsteigen den Widerstand des Mittels zur Schwere addirt, beim Absteigen jenen von dieser subtrahirt) die absoluten Kräfte mit einander verbunden: so stehen diese in geometrischer Progression.

Man drücke die Kraft der Schwere durch die constante Linie AC, den Widerstand durch die unbestimmte Linie AK und die absolute Kraft beim Absteigen durch KC, den Unterschied beider, aus. Ferner werde die Geschwindigkeit des Körpers durch die Linie AP (welche die

mittlere Proportionale zwischen AK und AC ist und daher im halben Verhältniss des Widerstandes steht) bezeichnet. Das Increment des

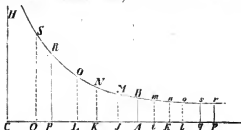


Fig. 112.

Widerstandes, welches in einem gegebenen Zeittheilchen entsteht, werde durch die kleine Linie KL und das gleichzeitige Increment der Geschwindigkeit durch die kleine Linie PQ ausgedrückt.

Zum Mittelpunkt C, und den rechtwinkligen Asymptoten CA und CH beschreibe man die beliebige Hyperbel SRNB, welche die errichteten Perpendikel AB, KN, LO, PR und QS in

B, N, O, R und S

schneidet Da AK proportional AP^2 ist, so wird das Moment (Differential) von AK, nämlich KL proportional

2 AK . Moment von AP, d. h. 2 AP . PQ oder

AP . KC.

Nach Gesetz 2. der Bewegung ist nämlich das Increment PQ der Geschwindigkeit der erzeugenden Kraft KC proportional.

Verbindet man das Verhältniss von KL mit dem von KN, so wird das Rechteck KL . KN

proportional AP . KC . KN,

d. h. weil das Rechteck KC . KN constant ist,

KL . KN proportional AP.

Nun steht die hyperbolische Fläche KNOL zu dem Rechteck KL . KN, wenn die Punkte K und L eben zusammenfallen wollen, im Verhältniss der Gleichheit; also ist die verschwindende hyperbolische Fläche KNOL proportional AP. Die ganze hyperbolische Fläche ABOL wird demnach aus Theilchen KNOL zusammengesetzt, welche der Geschwindigkeit AP stets proportional sind; sie verhält sich daher wie der mit dieser Geschwindigkeit beschriebene Weg. Theilt man nun jene Fläche in die gleichen Stücke

ABMJ, JMNK, KNOL, etc.;

so stehen die absoluten Kräfte

AC, JC, KC, LC, etc.

in geometrischer Progression. W. z. b. w.

Auf gleiche Weise ergiebt sich beim Aufsteigen der Körper, indem man auf der entgegengesetzten Seite von A die gleichen Flächen

ABmi, imnk, knol, etc.

annimmt, dass die absoluten Kräfte

$$AC,\ iC,\ kC,\ lC,\ \text{etc.}$$

stetig proportional sind.

Nimmt man demnach alle Wege beim Auf- und Absteigen einander gleich an, so werden auch alle absoluten Kräfte

$$lC,\ kC,\ iC,\ AC,\ JC,\ KC,\ LC\ \text{etc.}$$

stetig proportional. W. z. b. w.

Zusatz 1. Wird daher der beschriebene Weg durch die hyperbolische Fläche ABNK bezeichnet, so können die Kraft der Schwere, die Geschwindigkeit des Körpers und der Widerstand des Mittels respective durch die Linien AC, AP und AK ausgedrückt werden und umgekehrt.

Zusatz 2. Die grösste Geschwindigkeit, welche der Körper jemals erlangen kann, indem er in's Unendliche fort absteigt, wird durch die Linie AC ausgedrückt.

Zusatz 3. Kennt man bei irgend einer gegebenen Geschwindigkeit den Widerstand des Mittels, so findet man die grösste Geschwindigkeit, indem man sie zu jener gegebenen in demjenigen halben Verhältniss annimmt, welches die Kraft der Schwere zum bekannten Widerstande des Mittels hat.[106])

§. 13. Lehrsatz. Nimmt man unter der Voraussetzung des eben Bewiesenen an, dass die Tangenten der Winkel des Kreissectors und des hyperbolischen Sectors den Geschwindigkeiten proportional gesetzt werden, wobei der Radius die richtige Grösse hat; so wird die ganze Zeit des zukünftigen Aufsteigens zum höchsten Orte dem Kreissector, die Zeit des verflossenen Absteigens vom höchsten Orte dem hyperbolischen Sector proportional.

Auf die gerade Linie AC, welche die Kraft der Schwere ausdrückt, errichte man das Perpendikel AD und mache

$$AD = AC.$$

Aus D als Mittelpunkt schlage man mit dem Halbmesser AD den Kreisquadranten AtE und die rechtwinklige Hyperbel AVZ, deren Axe AX, Hauptscheitelpunkt A und Asymptote CD sei. Man ziehe Dp und DP, und es verhält sich alsdann der Kreissector AtD wie die Zeit des ganzen zukünftigen Aufsteigens zum höchsten Orte, der hyperbolische Sector ATD hingegen wie die Zeit des ganzen verflossenen Absteigens vom höchsten Orte; wenn nur die Tangenten Ap und AP der Sectoren den Geschwindigkeiten proportional sind.

1. Fall. Man ziehe nämlich die Linie Dvq, welche vom Sector ADt und Dreieck ADp Momente oder sehr kleine, zugleich beschriebene Theilchen tDv und pDq abschneidet. Da jene Theilchen, wegen des gemeinschaftlichen Winkels D, im doppelten Verhältniss der Seiten stehen[107]), so ist das Theilchen tDv proportional

$$\frac{qDp}{pD^2} \cdot tD^2,$$

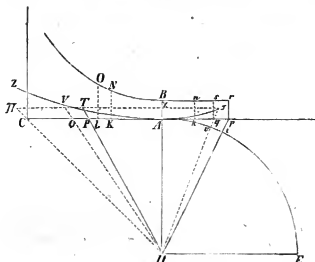


Fig. 143.

d. h. weil tD constant ist,

$$\frac{qDp}{pD^2}.$$

Es ist aber $pD^2 = AD^2 + Ap^2 = AD^2 + AD \,.\, Ak$ (§. 12.)

$$= AD\,(AC + Ak) = AD \,.\, Ck$$

$$qDp = {}^1/_2 AD \,.\, pq;$$

mithin das Theilchen vDt des Sectors proportional

$$\frac{pq}{Ck},$$

d. h. direct dem sehr kleinen Decrement pq der Geschwindigkeit und indirect der Kraft Ck, welche die Geschwindigkeit verändert, also dem Zeittheilchen, welches dem Decrement der Geschwindigkeit entspricht.

Durch Zusammensetzung wird die Summe aller Theilchen tDv des Sectors ADt proportional der Summe der Zeittheilchen, welche den einzelnen verlorenen Theilchen pq der abnehmenden Geschwindigkeit Ap entsprechen, und zwar so weit, bis diese Geschwindigkeit in Nichts vermindert ist und verschwindet. Der ganze Sector ADt verhält sich daher wie die Zeit des ganzen zukünftigen Ansteigens zum höchsten Punkte. W. z. b. w.

2. Fall. Man ziehe die Linie DQV, welche sowohl vom Sector DAV, als auch vom Dreieck DAQ die sehr kleinen Stücke TDV und PDQ abschneidet. Alsdann ist

1. $TDV : PDQ = DT^2 : DP^2$

oder, wenn man $TX \mp AP$ zieht,

$$TDV : PDQ = DX^2 : DA^2 = TX^2 : AP^2,$$

d. h. 2. $TDV : PDQ = DX^2 - TX^2 : DA^2 - AP^2.$

Nach den Gesetzen der Hyperhel ist

$$DX^2 - TX^2 = AD^2$$ [108])

und nach der Voraussetzung

$$AP^2 = AC \,.\, AK = AD \,.\, AK$$

mithin $TDV : PDQ = AD^2 : AD\,(AD - AK)$

und 3. $TDV : PDQ = AC : CK.$

Hiernach wird $TDV = \frac{PDQ \,.\, AC}{CK}$,

d. h. weil $PDQ = {}^1/_2 PQ \,.\, AD$ und $AC = AD$ constant ist,

$$TDV \text{ proportional } \frac{PQ}{CK}.$$

TDV ist daher proportional direct dem Increment der Geschwindigkeit und indirect der, dieses Increment erzeugenden, Kraft, also dem Zeittheilchen, welches dem Increment PQ der Geschwindigkeit entspricht.

Durch Zusammensetzung ergiebt sich, dass die Summe aller Zeittheilchen, in denen sämmtliche Theile PQ der Geschwindigkeit AP erzeugt werden, sich wie die Summe aller Theile des Sectors ADT verhält; demnach ist die ganze Zeit dem ganzen Sector proportional. W. z. b. w.

Zusatz 1. Macht man $AB = {}^1/_4 AC$,
so verhält sich der Raum, welchen der Körper in einer beliebigen Zeit fallend beschreibt, zu demjenigen Raume, welchen er mit der grössten Geschwindigkeit AC in derselben Zeit gleichförmig zurücklegen kann, wie die Fläche ABNK, wodurch der beim Falle beschriebene Weg ausgedrückt wird, zur Fläche ADT, welche die Zeit bezeichnet.

Da nämlich $AC : AP = AP : AK$

so wird (nach §. 10, Zusatz 1.)

$$KL : PQ = 2 \,.\, AK : AP = 2AP : AC$$ [109])

oder $KL : {}^1/_2 PQ = AP : {}^1/_4 AC$

$$= AP : AB$$

ferner $KN : AC = AB : CK,$

also weil $AC = AD$

$$LKNO : DPQ = AP : CK,$$

Es war in 3. $DPQ : DTV = CK : AC,$

also $LKNO : DTV = AP : AC.$

Es verhält sich hiernach LKNO zu DTV, wie die Geschwindigkeit des fallenden Körpers zur grössten Geschwindigkeit, welche derselbe beim Falle erlangen kann. Da nun die Momente LKNO und DTV sich wie die Geschwindigkeiten verhalten, so verhalten sich auch alle zugleich erzeugten Theile jener Flächen wie die zugleich beschriebenen Wege und endlich die ganzen, von Anfang an erzeugten Flächen ABKN und

ATD wie die ganzen, von Anfang des Absteigens an beschriebenen Wege.

Zusatz 2. Dasselbe ergiebt sich auch in Bezug auf den Weg, welcher beim Aufsteigen beschrieben wird. Es verhält sich nämlich jener ganze beschriebene Weg zu demjenigen, welcher mit gleichförmiger Geschwindigkeit AC in derselben Zeit zurückgelegt wird, wie die Fläche ABnk zum Sector ADt.

Zusatz 3. Die Geschwindigkeit des während der Zeit ADT fallenden Körpers verhält sich zu derjenigen Geschwindigkeit, welche er in derselben Zeit im nicht widerstehenden Mittel erlangen würde, wie das Dreieck APD zum hyperbolischen Sector ATD. Die Geschwindigkeit im nicht widerstehenden Mittel würde der Zeit ATD, im widerstehenden hingegen der Linie AP oder dem Dreieck APD proportional sein. Im Anfange des Herabsteigens sind aber jene Geschwindigkeiten ebenso einander gleich, wie dies mit den Flächen ATD und APD der Fall ist.

Zusatz 4. Auf dieselbe Weise folgt auch, dass die Geschwindigkeit beim Aufsteigen sich zu derjenigen Geschwindigkeit, vermöge welcher der Körper in derselben Zeit im widerstehenden Mittel alle seine Bewegung verlieren würde, erhält wie

Dreieck ApD : Kreissector AtD oder wie Ap : ⌒ At.

Zusatz 5. Es verhält sich daher die Zeit, in welcher der Körper bei seinem Falle im widerstehenden Mittel die Geschwindigkeit AP erlangt, zu der Zeit, in welcher er beim Falle im nicht widerstehenden Mittel die grösste Geschwindigkeit AC erlangen könnte, wie

Sector ADT zum Dreieck ADC.

Ferner verhält sich die Zeit, in welcher er beim Aufsteigen im widerstehenden Mittel die Geschwindigkeit Ap verlieren würde, zu der Zeit, in welcher er dieselbe Geschwindigkeit beim Aufsteigen im nicht widerstehenden Mittel verlieren würde, wie

⌒ At : Ap.

Zusatz 6. Hiernach ergiebt sich aus der gegebenen Zeit der beim Auf- oder Absteigen beschriebene Weg. Die grösste Geschwindigkeit eines in's Unendliche absteigenden Körpers ergiebt sich nämlich aus §. 12., Zusatz 2. und 3., und daraus der Weg, welchen er mit jener Geschwindigkeit in der gegebenen Zeit beschreiben kann, wie auch die Zeit, in welcher er jene Geschwindigkeit bei seinem Falle im nicht widerstehenden Mittel erlangen könnte. Nimmt man nun den Sector ADT oder ADt zum Dreieck ADC im Verhältniss der gegebenen zur eben gefundenen Zeit; so erhält man sowohl die Geschwindigkeit AP oder Ap, als auch die Fläche ABKN oder ABkn, welche sich zum Sector ADT oder ADt verhält, wie der gesuchte Weg zu demjenigen Wege, der in der gegebenen Zeit mit der schon vorher gefundenen grössten Geschwindigkeit gleichförmig beschrieben werden kann.

Zusatz 7. Auf umgekehrte Weise erhält man aus dem gegebenen

Wege ABnk oder ABNK des Auf- oder Absteigens die Zeit ADt oder ADT.

§. 14. **Aufgabe.** Die gleichförmige Kraft der Schwere ist geradlinig gegen die Ebene des Horizontes gerichtet, und der Widerstand steht im zusammengesetzten Verhältniss der Dichtigkeit des Mittels und des Quadrats der Geschwindigkeit. Man sucht die Dichtigkeit des Mittels an den einzelnen Orten, welche bewirkt, dass ein Körper sich auf einer beliebigen gegebenen Curve bewege und ferner die Geschwindigkeit des Körpers und den Widerstand des Mittels an denselben Orten.

Es stellte PQ jene Ebene vor, welche auf der Ebene des Papiers perpendikulär steht, PFHQ sei die Curve, welche diese Ebene in P und Q schneidet. G, H, J und K seien vier Orte des Körpers, welcher sich auf dieser Curve von F gegen Q hin bewegt. Ferner seien GB, HC, JD und KE vier parallele von jenen Punkten auf die Horizontale PQ gefällte Ordinaten. Es seien die Abstände BC, CD, DE der Ordinaten von einander gleich. Aus den Punkten G und H ziehe man die Linien GL und HN, welche die Curve G und H berühren und die nach oben verlängerten Ordinaten CH und DJ in L und N schneiden und ergänze das Parallelogramm HCDM. Die Zeiten, in denen der Körper die Bogen GH und HJ beschreibt, stehen im halben Verhältniss der Höhen LH und NJ, welche der Körper in denselben Zeiten beim Falle von den Tangenten beschreiben könnte. Ferner verhalten sich die Geschwindigkeiten direct wie die beschriebenen Wege GH und HJ, und indirect wie die Zeiten. Man drücke die Zeiten durch T und t, und die Geschwindigkeiten durch $\frac{GH}{T}$ und $\frac{HJ}{t}$ aus, alsdann wird das Decrement der Geschwindigkeit, welches während der Zeit t entsteht, durch

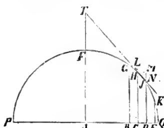


Fig. 144.

$$1.\quad \frac{GH}{T} - \frac{HJ}{t}$$

bezeichnet werden. Dieses Decrement entspringt aus dem verzögernden Widerstande und der beschleunigenden Schwere. Die letztere erzeugt in dem fallenden Körper, welcher den Weg NJ zurücklegt, eine Geschwindigkeit, mit welcher er in derselben Zeit das Doppelte jenes Weges zurücklegen könnte, wie Galilei gezeigt hat, also

$$2.\quad \frac{2NJ}{t}.$$

In dem Körper, welcher den Bogen HJ beschreibt, vermehrt sie jenen Bogen nur um die Länge

$$3.\quad HJ - HN = \frac{MJ \,.\, NJ}{HJ},$$ [110]

und sie erzeugt daher nur die Geschwindigkeit

$$4.\quad \frac{2MJ \,.\, NJ}{t \,.\, HJ}.$$

Addirt man diese zum oben in 1. aufgeführten Decrement, so erhält man das, aus dem Widerstande allein entspringende, Decrement der Geschwindigkeit gleich

$$5.\quad \frac{GH}{T} - \frac{HJ}{t} + \frac{2 \,.\, MJ \,.\, NJ}{t \,.\, HJ}.$$

Da ferner die Schwere während derselben Zeit im fallenden Körper die Geschwindigkeit $\frac{2NJ}{t}$ erzeugt, so verhält sich der Widerstand zur Schwere wie

$$6.\quad \frac{GH}{T} - \frac{HJ}{t} + \frac{2 \,.\, MJ \,.\, NJ}{t \,.\, HJ} : \frac{2 \,.\, NJ}{t} = \frac{t \,.\, GH}{T} - HJ + \\ + \frac{2MJ \,.\, NJ}{HJ} : 2 \,.\, NJ.$$

Setzt man nun die Abscissen

$$7.\quad \begin{cases} CB = -\xi,\ CD = \xi,\ CE = 2\,\xi \\ \text{die Ordinate } CH = P \end{cases}$$

und beliebig

$$8.\quad MJ = Q\xi + R\xi^2 + S\xi^3 + \text{etc.};$$

so wird

$$9.\quad \begin{cases} NJ = R\xi^2 + S\xi^3 + \text{etc.} \\ DJ = P - Q\xi - R\xi^2 - S\xi^3 \text{ etc.} \\ EK = P - 2Q\xi - 4R\xi^2 - 8S\xi^3 \text{ etc.} \\ BG = P + Q\xi - R\xi^2 + S\xi^3 \text{ etc.} \end{cases}$$ [111])

Quadrirt man die Unterschiede der Ordinaten

BG — CH und CH — DJ,

und addirt zu den entstehenden Quadraten respective die Quadrate von BC und CD, so erhält man die Quadrate der Bogen GH und HJ. Es wird hiernach

$$GH^2 = \xi^2 + Q^2\xi^2 - 2QR\xi^3 + \ldots..$$
$$HJ^2 = \xi^2 + Q^2\xi^2 + 2QR\xi^3 + \ldots..$$

und nun

$$10.\quad \begin{cases} GH = \xi\,\sqrt{1 + Q^2} - \frac{QR\xi^2}{\sqrt{1 + Q^2}} \\ HJ = \xi\,\sqrt{1 + Q^2} + \frac{QR\xi^2}{\sqrt{1 + Q^2}} \end{cases}$$

Subtrahirt man ferner von der Ordinate CH die halbe Summe der Ordinaten BG und DJ, und von DJ die halbe Summe $\frac{1}{2}$ (CH + EK); so bleiben die Pfeile der Bogen GJ und HK übrig, und zwar wird

$$1!).\quad \begin{cases} \text{ersterer} = R\xi^2 \\ \text{letzterer} = R\xi^2 + 3S\xi^3. \end{cases}$$

Diese sind den kleinen Linien LH und NJ proportional, und stehen

daher im doppelten Verhältnisse der unendlich kleinen Zeiten T und t. Hiernach ist also

$$12.\quad t : T = \sqrt{R + 3S\xi} : \sqrt{R} = R + {}^3/_2\, S\xi \ldots : R$$

Substituirt man nun die gefundenen Werthe von

$$\frac{t}{T},\ GH,\ HJ,\ MJ \text{ und } NJ$$

aus 12., 10., 8. und 9. im Gl. 6.; so verhält sich der Widerstand zur Schwere, wie

$$13.\quad \frac{3S\xi^2}{2R}\sqrt{1 + Q^2} : 2R\xi^2 = 3S\sqrt{1 + Q^2} : 4R^2.$$ [112]

Die Geschwindigkeit ist ferner diejenige, mit welcher der von H längs der Tangente HN ausgehende Körper sich im leeren Raume in einer Parabel bewegen könnte, deren

$$\text{Durchmsser} = HC$$

$$\text{Parameter} = \frac{HN^2}{NJ} = \frac{1 + Q^2}{R}.$$ [113]

Der Widerstand verhält sich wie die Dichtigkeit des Mittels und das Quadrat der Geschwindigkeit zusammengesetzt. Mithin die Dichtigkeit direct wie der Widerstand, und indirect wie das Quadrat der Geschwindigkeit, d. h.

$$\text{direct wie } \frac{3S\sqrt{1 + Q^2}}{4R^2} \text{ und indirect wie } \frac{1 + Q^2}{R},$$

also wie

$$14.\quad \frac{S}{R\sqrt{1 + Q^2}}$$ [114]

Zusatz 1. Verlängert man die Tangente HN beiderseits, bis sie die beliebige Ordinate AF in T schneidet, so wird

$$\frac{HT}{AC} = \sqrt{1 + Q^2}$$

und es kann daher dieser Quotient statt $\sqrt{1 + Q^2}$ in den obigen Werthen gesetzt werden. Nach Gl. 13. verhält sich also der Widerstand zur Schwere, wie

$$3S\,.\,HT : 4R^2\,AC.$$

Die Geschwindigkeit wird proportional $\frac{HT}{AC\,.\,\sqrt{R}}$,

die Dichtigkeit des Mittels wird proportional $\frac{S\,.\,AC}{R\,.\,HT}$,

Zusatz 2. Bestimmt man die Curve PFHQ (wie es gebräuchlich ist) durch eine Relation zwischen der Basis oder Abscisse AC und der Ordinate HC, und löst man den Werth der letzteren in eine convergirende Reihe auf; so dienen die ersten Glieder der letzteren kurz zur Auflösung der Aufgabe. Wir werden dies an den folgenden Beispielen sehen.

Beispiel 1. Es sei PFHQ ein Halbkreis, der über dem Durchmesser PQ beschrieben ist; man sucht die Dichtigkeit des Mittels, welche

bewirkt, dass das Projectil sich auf dieser Curve bewege. Man halbire den Durchmesser PQ in A, nnd setze

$$AQ = r$$
$$AC = x$$
$$CH = y$$
$$CD = \xi;$$

alsdann wird

$$DJ^2 = AQ^2 - AD^2 = r^2 - x^2 - 2x\xi - \xi^2$$
$$= y^2 - 2x\xi - \xi^2.$$

Zieht man die Wurzel nach nnserer Methode[115]) aus, so ergiebt sich

$$DJ = y - \frac{x\xi}{y} - \frac{\xi^2}{2y} - \frac{x^2\xi^2}{2y^3} - \frac{x\xi^3}{2y^3} - \frac{y^3\xi^3}{2y^5} - \text{etc.}$$

oder, indem man $x^2 + y^2 = r^2$ setzt,

$$DJ = y - \frac{x\xi}{y} - \frac{r^2\xi^2}{2y^3} - \frac{xr^2\xi^3}{2y^5} - \text{etc.}$$

In derartigen Reihen nnterscheide ich die verschiedenen Glieder folgendermaassen von einander. Das erste Glied nenne ich dasjenige, in welchem die nnendlich kleine Grösse ξ gar nicht vorkommt; das zweite dasjenige, in welchem diese Grösse sich in der ersten Potenz befindet; auf dieselbe Weise wird das dritte Glied die zweite, das vierte die dritte Potenz enthalten u. s. w. f. in's Unendliche. Ferner bezeichnet das erste Glied, welches hier $= y$ ist, stets die Ordinate CH, die im Anfangspunkte C der unbestimmten Grösse ξ errichtet ist. Das zweite Glied, hier $= \frac{x\xi}{y}$, bezeichnet den Unterschied zwischen CH nnd DN, d. h. die kleine Linie MN, welche durch Vollendung des Parallelogrammes HCDM abgeschnitten wird. Dieses Glied bestimmt also immer die Lage der Tangente HN, wie in diesem Falle, indem man setzt

$$MN : HM = \frac{x\xi}{y} : \xi = x : y.$$

Das dritte Glied, welches hier $= \frac{r^2\xi^2}{2y^3}$ ist, bezeichnet die kleine Linie JN, die zwischen der Tangente nnd der Cnrve liegt und so den Berührnngswinkel JHN oder die Krümmung bestimmt, welche die Curve in H hat. Ist die kleine Linie JN von endlicher Grösse, so wird sie durch das dritte und alle in's Unendliche folgenden Glieder bestimmt; wird aber diese Linie in's Unendliche vermindert, so werden die folgenden Glieder unendlich kleiner als das dritte nnd können daher vernachlässigt werden. Das vierte Glied, hier $= \frac{xr^2\xi^3}{2y^5}$, stellt die Aenderung der Krümmung, das fünfte die Aenderung der Aenderung dar u. s. w. f. Hieraus geht beiläufig der nicht zu verachtende Gebrauch hervor, den man von diesen Reihen bei der Auflösung von Aufgaben machen kann, welche von den Tangenten und der Krümmung der Curve abhängen.

Vergleicht man nun die vorliegende Reihe

$$y - \frac{x\xi}{y} - \frac{r^2\xi^2}{2y^3} - \frac{xr^2\xi^3}{2y^5}\ldots$$

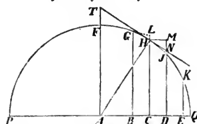


Fig. 145.

mit der im §. 14. unter 9. aufgeführten

$$P - Q\xi - R\xi^2 - S\xi^3\ldots;$$

so hat man

$$P = y,\ Q = \frac{x}{y},\ R = \frac{r^2}{2y^3},\ S = \frac{xr^2}{2y^5},$$

also

$$\sqrt{1+Q^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{r}{y}$$

und nach 14. die Dichtigkeit des Mittels proportional

$$\frac{x}{ry}$$

oder (weil r constant ist) proportional $\frac{x}{y} = \frac{AC}{CH} = \frac{HT}{AH}$,
d. h. der Länge der Tangente HT, welche durch den auf PQ perpendikulären Halbmesser AF begrenzt wird.

Nach §. 14., 12. verhält sich der Widerstand des Mittels zur Schwere, wie $3x : 2r$, d. h. wie $3 . AC : PQ$;
die Geschwindigkeit endlich wird proportional $\sqrt{HC}$.
Geht daher der Körper mit der richtigen Geschwindigkeit vom Punkt F, und längs einer PQ parallelen Linie aus, ist die Dichtigkeit des Mittels in den einzelnen Punkten H der Länge der Tangente HT proportional, verhält sich endlich der Widerstand in H zur Kraft der Schwere, wie

$$3AC : PQ;$$

so beschreibt der Körper den Quadranten FHQ des Kreises.

Ginge aber der Körper vom Punkt P, längs einer auf PQ perpendikulären Linie aus, und finge er an, sich im Halbkreise PFQ zu bewegen; so müsste man AC oder r nach der entgegengesetzten Seite vom Mittelpunkte A annehmen, also das Zeichen von x ändern. Hiernach würde die Dichtigkeit des Mittels proportional

$$-\frac{x}{y};$$

eine negative Dichtigkeit (d. h. eine solche, welche die Bewegung der Körper beschleunigt) lässt aber die Natur nicht zu, und desshalb kann

der Körper naturgemäss, indem er von P aufsteigt, keinen Kreisquadranten PF beschreiben. Um dies zu erreichen, müsste der Körper durch ein antreibendes Mittel beschleunigt, nicht durch das widerstehende verhindert werden.

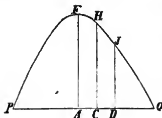


Fig. 146.

Beispiel 2. Es sei PFQ eine Parabel, deren Axe die auf den Horizont PQ senkrechte Linie AF ist; man sucht die Dichtigkeit des Mittels, welche bewirkt, dass das Projectil sich auf jener bewege.

Nach der Natur der Parabel ist das Rechteck

$$PD \, . \, DQ$$

gleich dem Rechteck aus der Ordinate DJ und einer constanten Linie[116]), d. h. wenn man die letztere Linie $= b$, $PC = a$, $PQ = c$, $CH = e$, $CD = \xi$ setzt, $(a + \xi)(c - a - \xi) = b \, . \, DJ$

oder $$DJ = \frac{ac - a^2}{b} + \frac{c - 2a}{b}\xi - \frac{1}{b}\xi^2.$$

In Bezug auf die in §. 14. unter 9. aufgeführte Reihe ist hier

$$Q = \frac{c - 2a}{b}$$

$$R = \frac{1}{b}$$

S und die Coefficienten der folgenden Glieder $= 0$.

Nach 14. wird daher die Dichtigkeit des Mittels $= 0$. Es existirt demnach keine Dichtigkeit des Mittels, bei welcher das Projectil sich auf einer Parabel bewegen wird, wie einst Galilei bewiesen hat.

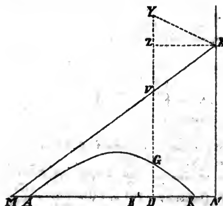


Fig. 147.

Beispiel 3. Es sei AGK eine Hyperbel, deren Asymptote NX auf der Horizontalebene AK perpendikulär steht; man sucht die Dichtigkeit des Mittels, welche bewirkt, dass das Projectil sich auf dieser Curve bewege.

Es sei MX die andere Asymptote, welche die verlängerte Ordinate DG in V schneidet; alsdann ist nach der Natur der Hyperbel

$$VX \, . \, VG = \text{Constans}.$$

Es ist aber auch $DN : VX = \text{Constans}$,
mithin $DN \cdot VG = \text{Constans} = b^2$.

Man vollende das Parallelogramm DNXZ, und setze

$$BN = a$$
$$BD = \xi$$
$$Nx = c$$

und das constante Verhältniss

$$\frac{VZ}{ZX} = \frac{VZ}{DN} = \frac{m}{n}.$$

Es wird alsdann

$$DN = a - \xi,\ VG = \frac{b^2}{a-\xi},\ VZ = \frac{m}{n}(a-\xi),$$
$$GD = NX - VZ - VG$$
$$= c - \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}\xi - \frac{b^2}{a-\xi}$$
$$= c - \frac{m}{n}a - \frac{b^2}{a} + \frac{m}{n}\xi - \frac{b^2}{a^2}\xi - \frac{b^2}{a^3}\xi^2 - \frac{b^2}{a^4}\xi^3 \ldots$$

Nach der eingeführten Bezeichnung in 9. ist in diesem Falle (GD statt DJ)

$$Q = \frac{b^2}{a^2} - \frac{m}{n}$$
$$R = \frac{b^2}{a^3}$$
$$S = \frac{b^2}{a^4}$$

und es wird nach 14. die Dichtigkeit des Mittels proportional

$$\frac{S}{R\sqrt{1+Q^2}} = \frac{\frac{b^2}{a^4}}{\frac{b^2}{a^3}\sqrt{1+\frac{m^2}{n^2}-\frac{2mb^2}{na^2}+\frac{b^4}{a^4}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+\frac{m^2}{n^2}a^2-\frac{2mb^2}{n}+\frac{b^4}{a^2}}}$$

d. h. wenn $VY = VG$ genommen wird, proportional

$$\frac{1}{XY};$$

indem für $\xi = 0$,

$$XY^2 = YZ^2 + ZX^2 = \left(\frac{b^2}{a} - \frac{m}{n}a\right)^2 + a^2$$
$$= \frac{b^4}{a^2} - \frac{2mb^2}{n} + \frac{m^2}{n^2}a^2 + a^2.$$

Das Verhältniss des Widerstandes zur Schwere findet man

$$= 3\,XY : 2\,YG\ ^{117});$$

die Geschwindigkeit endlich ist dieselbe, mit welcher der Körper auf einer Parabel zum Scheitel G, Durchmesser DG und Parameter $= \frac{XY^2}{VG}$ [118]) fortgehen würde.

Setzt man also voraus, dass die Dichtigkeit des Mittels in den einzelnen Punkten G sich **umgekehrt** wie der Abstand XY, und der Widerstand in G sich zur Schwere, wie 3 XY : 2 YG verhalte; so wird der vom Orte A mit der richtigen Geschwindigkeit ausgehende Körper jene Hyperbel AGK beschreiben.

Beispiel 4. Man setze unbestimmt voraus, dass die Linie AGK eine Hyperbel sei, welche zum Mittelpunkte X und den Asymptoten MX und NX, und zwar so construirt ist, dass nach der Construction des Rechtecks XZDN, dessen Seite ZD die Hyperbel in G und die Asymptote in V schneidet, VG proportional werde

$$\frac{1}{XZ^n} = \frac{1}{DN^n}.$$

Man sucht die Dichtigkeit des Mittels, vermöge dessen das Projectil auf dieser Curve fortschreite. Man setze

$$BN = A,$$
$$BD = \xi,$$
$$NX = C,$$

es sei ferner $VZ : ZX = VZ : DN = d : e$,

$$VG = \frac{b^2}{DN^n};$$

alsdann wird $DN = A - \xi$,

$$VG = \frac{b^2}{(A - \xi)^n},$$
$$VZ = \frac{d}{e}(A - \xi),$$

endlich

$$GD = NX - VZ - VG$$
$$= C - \frac{d}{e}(A - \xi) - \frac{b^2}{(A - \xi)^n}$$

$$GD = C - \frac{d}{e}A - \frac{b^2}{A^n} + \frac{d}{e}\xi - \frac{nb^2}{A^{n+1}}\xi - \frac{n^2 + n}{2A^{n+2}} b^2 \xi^2$$
$$- \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{bA^{n+3}} b^2 \xi^3 \ldots$$

In Bezug auf diese Reihe ist (nach 9., GD statt DJ)

$$Q = \frac{d}{e} - \frac{nb^2}{A^{n+1}}$$
$$R = \frac{n^2 + n}{2A^n + 2} b^2$$
$$S = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6A^n + 3} b^2$$

und so (nach 14.) die Dichtigkeit am Orte G proportional

$$\frac{S}{R\sqrt{1 + Q^2}} = \frac{n(n+1)(n+2)b^2}{6A^{n+3}\,\frac{n(n+1)}{2A^{n+2}}b^2\sqrt{1 + \frac{d^2}{e^2} - \frac{2dnb^2}{eA^{n+1}} + \frac{n^2b^4}{A^{2n+2}}}}$$
$$= \frac{(n+2)}{3\sqrt{A^2 + \frac{d^2}{e^2}A^2 - \frac{2dnb^2}{eA^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}}}$$

Nimmt man nnn in der Richtnng von VZ die Länge

$$VY = n.VG$$

an, so wird die Dichtigkeit proportional $\frac{1}{XY}$.

Es ist nämlich für ξ unendlich klein oder = Null

$$XZ^2 = A^2,\ YZ^2 = (VY - VZ)^2 = (n\frac{b^2}{A^n} - \frac{d}{e}A)^2$$
$$= \frac{d^2}{e^2}A^2 - \frac{2dnb^2}{eA^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}},$$

mithin

$$\sqrt{A^2 + \frac{d^2}{e^2}A^2 - \frac{2dnb^2}{eA^n}A + \frac{n^2b^4}{A^{2n}}} = \sqrt{YZ^2 + XZ^2} = XY.$$

Der Widerstand des Mittels im Punkt G verhält sich zur Schwere, wie

$$3S.\frac{XY}{A} : 4R^2 = XY : \frac{2n^2 + 2n}{n + 2}VG.$$

Endlich ist die Geschwindigkeit des Körpers in diesem Pnnkte dieselbe, mit welcher er in einer Parabel fortgehen würde, deren Scheitel G, deren Dnrchmesser GD nnd deren

$$\text{Parameter} = \frac{1 + Q^2}{R} = \frac{\frac{1}{A^2}XY^2}{\frac{n^2 + n}{2A^{n+2}}b^2} = \frac{2.XY^2}{(n^2 + n)VG}$$

§. 15. Anmerknng. Nach derselben Weise, wie im Zusatz 1., die Dichtigkeit des Mittels proportional wird

$$\frac{S.AC}{R.HT},$$

wenn man den Widerstand proportional V^2 annimmt, wo V die Geschwindigkeit bezeichnet; wird die Dichtigkeit des Mittels proportional

$$\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}.\left(\frac{AC}{HT}\right)^{n-1},$$

wenn der Widerstand proportional

$$V^n$$

angenommen wird. Kann man daher eine Curve finden, die so gestaltet ist, dass das Verhältniss

$$\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} : \left(\frac{HT}{AC}\right)^{n-1} \text{ oder das } \frac{S^2}{R^{4-n}} : (1 + Q^2)^{n-1}$$ [119])

constant werde; so wird sich der Körper anf derselben im gleichförmigen Mittel bei einem Widerstande bewegen, welcher

$$V^n$$

proportional ist.

Wir kehren nnn zu einfacheren Curven znrück. Da die Bewegung nur dann in einer Parabel erfolgt, wenn das Mittel gar keinen Widerstand ausübt, in den eben beschriebenen Hyperbeln aber, wenn fort-

während ein Widerstand stattfindet; so wird offenbar die Curve, welche das Projectil in einem gleichförmig widerstehenden Mittel beschreibt, sich mehr diesen Hyperbeln, als einer Parabel nähern. Jene Curve ist demnach hyperbolischer Natur, jedoch in der Nähe des Scheitels von den Asymptoten weiter entfernt, in den vom Scheitel entlegenen Punkten ihnen näher, als es bei den eben beschriebenen Hyperbeln der Fall ist. Der Unterschied zwischen diesen und jener ist jedoch nicht so gross, dass man in der Praxis nicht die hier beschriebenen Hyperbeln an die Stelle jener Curve setzen könnte. Vielleicht sind dieselben auch vortheilhafter, als eine genauere und zusammengesetztere Hyperbel, und für die Anwendung richtet man sie folgendermaassen ein.

Vollendet man das Parallelogramm XYGT, so schliesst man leicht aus der Natur der Hyperbeln, dass GT die Hyperbel in G berühre.[120] Die Dichtigkeit des Mittels in G ist daher proportional

$$\frac{1}{GT},$$

die Geschwindigkeit daselbst proportional

$$\sqrt{\frac{GJ^2}{GV}},$$

Fig. 148.

endlich verhält sich der Widerstand des Mittels in G zur Schwere, wie

$$GT : \frac{2n^2 + 2n}{n + 2} VG.$$

Beschreibt ferner ein von A aus längs der geraden Linie AH geworfener Körper die Hyperbel AGK, und schneidet die verlängerte Linie AH die Asymptote NX in H, dagegen die perpendikulär gezogene Linie AJ die andere Asymptote MX in J; so ist die Dichtigkeit des Mittels in A porportional

$$\frac{1}{AH},$$

die Geschwindigkeit des Körpers

$$\sqrt{\frac{AH^2}{AJ}},$$

und es verhält sich der daselbst stattfindende Widerstand zur Schwere, wie

$$AH : \frac{2n^2 + 2n}{n + 2} . AJ,$$

Hieraus ergeben sich folgende Regeln.

Regel 1. Wird die Dichtigkeit des Mittels in A und die Geschwindigkeit des Körpers beibehalten, der Winkel NAH aber geändert;

so bleiben die Linien AH, AJ und HX unverändert. Sind dieselben daher in irgend einem Falle gefunden, so kann man für jeden gegebenen Winkel NAH leicht die Hyperbel construiren.

Regel 2. Wird so wohl der Winkel NAH, als auch die Dichtigkeit des Mittels in A beibehalten, die Geschwindigkeit aber, mit welcher der Körper geworfen wird, geändert; so bleibt die Linie AH unverändert, die Linie AJ ändert sich aber im umgekehrten doppelten Verhältniss, in welchem die Geschwindigkeit sich verändert.[121])

Regel 3. Bleibt der Winkel NAH, die Geschwindigkeit des Körpers in A und die beschleunigende Kraft der Schwere unverändert; wird aber das Verhältniss des Widerstandes in A zur Schwere in irgend einem Grade vergrössert; so wächst in demselben Grade das Verhältniss

$$AH : AJ,$$

wobei der Parameter oder die ihm proportionale Linie

$$\frac{AH^2}{AJ}$$

unverändert bleibt. Daher nimmt AH in demselben, AJ in dem doppelten Verhältniss ab. Das Verhältniss des Widerstandes zum Gewicht nimmt aber zu, wenn entweder das specifische Gewicht bei gleichem Volumen kleiner, oder die Dichtigkeit des Mittels grösser, oder der Widerstand bei vermindertem Volumen in einem kleineren Verhältniss abnimmt, als das Gewicht.

Regel 4. Da die Dichtigkeit des Mittels in der Nähe des Scheitels grösser ist, als in A, so muss man, um eine mittlere Dichtigkeit zu erhalten, das Verhältnies der kleinsten Tangente GT zur Tangente AH bestimmen und die Dichtigkeit in A nach Regel 3. vermehren in einem Verhältniss, welches um ein wenig grösser ist, als das der halben Summe der Tangenten zur kleinsten Tangente GT.[122])

Regel 5. Sind die Linien AH und AJ gegeben und soll man die Figur AGK beschreiben, so verlängere man HN bis X, dergestalt, dass

$$HX = (n + 1) AJ$$

werde. Hierauf beschreibe man zum Mittelpunkte X und den Asymptoten MX und NX eine Hyperbel, welche durch den Punkt A geht, und zwar mit dem Gesetze, dass

$$AJ : VG = XV^n : XJ^n$$ [123])

sei.

Regel 6. Je grösser die Zahl n ist, desto genauer sind diese Hyperbeln beim Aufsteigen des Körpers von A, und desto ungenauer bei seinem Absteigen bis K, und umgekehrt. Die conische Hyperbel hält die Mitte, und ist einfacher als die übrigen. Ist daher die Curve von dieser Art, und sucht man den Punkt K, in welchem das Projectil die beliebige gerade, durch den Punkt A gehende Linie AB trifft; so mache man, wenn AB die Asymptoten MX und NX in M und N schneidet, NK = AM.

Regel 7. Hieraus ergiebt sich eine einfache Methode, diese Hy-

perbel durch Versuche zu bestimmen. Man werfe zwei ähnliche und gleiche Körper mit derselben Geschwindigkeit, unter verschiedenen Winkeln HAK und hAk; dieselben mögen die Horizontalebene bezüglich in K und k treffen und es sei

AK : Ak = d : e.

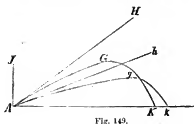


Fig. 149.

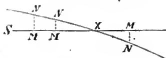


Fig. 150.

Man errichte alsdann das Perpendikel AJ von beliebiger Länge, nehme die Länge AH oder Ah beliebig an und leite daraus nach Regel 6. die Linien AK und Ak her. Zeigt sich nun, dass

AK : Ak = d : e

ist, so hat man die Linie AH von der richtigen Länge angenommen. Ist dies nicht der Fall, so nehme man auf der unbestimmten geraden Linie SM,

SM = AH

an, errichte darauf das Perpendikel MN und mache dieses gleich

$$\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e},$$

multiplicirt in irgend eine constante Linie. Auf dieselbe Weise suche man aus mehreren angenommenen Längen AH eben so viel Punkte N, ziehe hierauf durch die letztern die reguläre Curve NNXN; alsdann wird durch diese SX = AH abgeschnitten. Hieraus findet man aufs neue die Länge AK und die Längen, welche sich zur angenommenen Länge AJ und der letzten Länge AH verhalten, wie die durch Versuche gefundene Länge von AK zu der zuletzt gefundenen Länge dieser Linie, werden die wahren Werthe von AJ und AH sein, welche zu finden waren. Sind diese bekannt, so kennt man auch den Widerstand des Mittels in A, welcher sich nämlich zur Kraft der Schwere verhält, wie AH : $^4/_3$. AJ.

Die Dichtigkeit des Mittels ist ferner nach Regel 4. zu vermehren, und der eben gefundene Widerstand wird genauer, wenn man ihn in demselben Verhältniss vergrössert.

Regel 8. Sind die Längen AH und HX gefunden, und verlangt man nun die Lage der geraden Linie AH zu wissen, längs welcher der mit gegebener Geschwindigkeit geworfene Körper fortgehen muss, um den Punkt K zu treffen; so errichte man in A und K auf den Horizont die Perpendikel AC und KF, ziehe AC abwärts und mache

AC = AJ = $^1/_2$HX.

Zu den Asymptoten AK und KF construire man eine Hyperbel, deren conjugirter Zweig durch den Punkt C geht, und schlage aus A

als Mittelpunkt, mit dem Radius AH, einen Kreis, welcher jene Hyperbel in H schneidet; alsdann wird das längs AH geworfene Projectil in den Punkt K fallen.

Fig. 151.

Der Punkt H wird sich nämlich, wegen der für AH gegebenen Länge, irgendwo auf dem beschriebenen Kreise befinden. Man ziehe CH, welche AK in E und KF in F schneidet, alsdann wird, weil

$$CH \mathrel{\ddagger} MX$$

und $AC = AJ$

$$AE = AM = KN.$$

Da aber ferner

$$CE : AE = FH : KN,$$

so wird auch

$$CE = FH,$$

und es fällt daher der Punkt H auf die Hyperbel, welche zu den Asymptoten AK und KF beschrieben ist und deren conjugirter Zweig durch den Punkt C geht. H befindet sich demnach in dem Durchschnittspunkte der Hyperbel und des beschriebenen Kreises [124]) W. z. b. w.

Es ist noch zu bemerken, dass diese Operation auf die dargestellte Weise stattfindet, mag die gerade Linie AKN dem Horizonte parallel, oder unter einem beliebigen Winkel gegen ihn geneigt sein, und dass aus den beiden Durchschnittspunkten H und H^1 zwei Winkel NAH und NAH^1 hervorgehen, von denen man den kleinern zu wählen hat. Bei der mechanischen Ausführung ist es hinreichend, den Kreis einmal zu beschreiben, und hierauf die zwischenliegende Linie CH so am Punkt C anzulegen, dass ihr Theil FH, welcher zwischen dem Kreise und der geraden Linie FH sich befindet, gleich werde dem Theile CE, welcher zwischen dem Punkte C und der Linie AK liegt.

Fig. 152.

Was von den Hyperbeln gesagt worden ist, lässt sich leicht auf Parabeln anwenden. Es bezeichne nämlich XAGK eine Parabel, welche XV im Scheitel X berührt und es sei

$$JX^n : VX^n = JA : VG.$$

Man ziehe $XT \mathrel{\ddagger} VG$

und in G und A die Tangenten GT und AH. Der von einem Orte A längs AH mit der richtigen Geschwindigkeit geworfene Körper wird nun diese Parabel be-

schreiben, wenn nur in den einzelnen Punkten G die Dichtigkeit des Mittels der Tangente GT umgekehrt proportional ist. Die Geschwindigkeit in G ist aber diejenige, mit welcher das Projectil im nicht widerstehenden Mittel, auf einer conischen Parabel fortgehen würde, deren Scheitel in G, deren Durchmesser die abwärts verlängerte VG und deren Parameter

$$\sqrt{\frac{2TG^2}{(n^2-n)VG}}\ [125])$$

wäre. Der Widerstand im Punkt G verhält sich ferner zur Kraft der Schwere, wie

$$GT : \frac{2n^2 - 2n}{n - 2}\ VG.$$

Bezeichnet daher NAK eine Horizontallinie, und wird, indem die Dichtigkeit des Mittels in A und die Geschwindigkeit, womit man den Körper wirft, dieselben bleiben, der Winkel NAH irgendwie verändert; so bleiben die Linien AH, AJ und HX unverändert und es wird der Scheitel X der Parabel und die Lage von XJ gegeben. Setzt man hieranf $VG : JA = VX^n : XJ^n$,
so erhält man alle Punkte G der Parabel, durch welche das Projectil geben wird.

ABSCHNITT III.

Von der Bewegung der Körper, welche einen Widerstand erleiden, der zum Theil der Geschwindigkeit selbst, zum Theil ihrem Quadrate proportional ist.

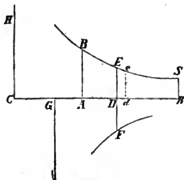


Fig. 158.

§. 16. Lehrsatz. Erleidet ein Körper einen Widerstand, welcher zum Theil der Geschwindigkeit selbst, zum Theil ihrem Quadrat proportional ist, und bewegt er sich lediglich vermöge eines, durch eine Kraft ihm beigebrachten Anstosses, im gleichförmigen Mittel; werden endlich die Zeiten in arithmetischer Progression angenommen; so stehen die den Geschwindigkeiten umgekehrt

proportionalen Grössen, wenn sie um irgend eine Grösse zunehmen, in geometrischer Progression.

Man beschreibt zum Mittelpunkt C und den rechtwinkligen Asymptoten CADd und CH eine Hyperbel BEeS, und es seien AB, DE und de der Asymptote CH parallel. Auf der Asymptote CD seien die Punkte A und G gegeben. Wird alsdann die Zeit durch die gleichförmig wachsende hyperbolische Fläche ABED ausgedrückt, so kann die Geschwindigkeit durch die Länge DF ausgedrückt werden, deren reciproke Länge GD, in Verbindung mit der Constanten CG, die Linie CD darstellt, welche in geometrischer Progression zunimmt.

Es sei nämlich DEed ein gegebenes möglichst kleines Increment der Zeit, alsdann verhält sich

Dd umgekehrt wie DE und daher direct wie CD.

Das Increment von $\frac{1}{GD}$ ist (nach zweitem Buch, §. 10.) $= \frac{Dd}{GD^2}$, und verhält sich daher wie

$$\frac{CD}{GD^2} = \frac{CG + GD}{GD^2} = \frac{1}{GD} + \frac{CG}{GD^2}.$$

Nimmt also die Zeit ABED, durch Addition constanter Theilchen EDde gleichförmig zu, so nimmt $\frac{1}{GD}$ in demselben Verhältniss wie die Geschwindigkeit ab. Das Decrement der Geschwindigkeit verhält sich nämlich wie der Widerstand, d. h. (nach der Voraussetzung) wie die Summe zweier Grössen, deren eine der Geschwindigkeit selbst, deren andere ihrem Quadrat proportional ist, und das Decrement von $\frac{1}{GD}$ verhält sich wie die Summe

$$\frac{1}{GD} + \frac{CG}{GD^2},$$

deren erster Summand $\frac{1}{GD}$ selbst, deren zweiter $\frac{1}{GD}$ proportional ist. Wegen des analogen Decrementes verhält sich $\frac{1}{GD}$ demnach wie die Geschwindigkeit. Wird nun die Grösse GD, welche $\frac{1}{GD}$ umgekehrt proportional ist, um die constante Grösse CG vergrössert, so nimmt ihre Summe CD, während die Zeit ABED gleichförmig wächst, in geometrischer Progression zu. W. z. b. w.

Zusatz 1. Sind die Punkte A und G gegeben, und wird die Zeit durch die hyperbolische Fläche ABED bezeichnet; so kann die Geschwindigkeit durch $\frac{1}{GD}$ welches GD umgekehrt proportional ist, ausgedrückt werden.

Zusatz 2. Nimmt man an, dass GA sich zu GD umgekehrt wie die Anfangsgeschwindigkeit zur Geschwindigkeit am Ende der be-

liebigen Zeit ABED verhalte; so erhält man den Punkt G. Ist dieser gefunden, so kann man aus jeder andern gegebenen Zeit die Geschwindigkeit herleiten.

§. 17. Lehrsatz. Unter denselben Voraussetzungen behaupte ich, dass, wenn die beschriebenen Wege in arithmetischer Progression angenommen werden, die um irgend eine Grösse zunehmenden Geschwindigkeiten in geometrischer Progression stehen.

Auf der Asymptote CD sei der Punkt R gegeben, und es stelle, indem man das, die Hyperbel in S schneidende, Perpendikel RS errichtet, die hyperbolische Fläche RSED den beschriebenen Weg dar. Alsdann wird sich die Geschwindigkeit wie die Linie GD verhalten, welche, zur constanten CG addirt, die Linie CD ergiebt, die in geometrischer Progression abnimmt, während der Weg RSED in arithmetischer Progression zunimmt.

Wegen des constanten Increments EDde des Weges wird die kleine Linie Dd, welche das Decrement der Linie GD ist, sich indirect wie ED, also direct wie CD = CG + GD verhalten. Allein das Decrement der Geschwindigkeit, welches in einer ihr proportionalen Zeit stattfindet, während welcher Zeit das Theilchen EDde des Weges beschrieben wird, verhält sich wie der Widerstand und die Zeit zusammengesetzt. d. h. direct wie die Summe zweier Grössen, deren eine der Geschwindigkeit selbst, deren andere dem Quadrat der letztern proportional ist und indirect wie die Geschwindigkeit. Es verhält sich demnach direct wie die Summe zweier Grössen, deren eine constant, deren andere der Geschwindigkeit proportional ist. Daher verhält sich sowohl das Decrement der Geschwindigkeit, als auch das der Linie GD, wie die Summe einer constanten und einer abnehmenden Grösse. Wegen der analogen Decremente sind die abnehmenden Grössen selbst, d. h. die Geschwindigkeit und die Linie GD analog. W. z. b. w.

Zusatz 1. Wird daher die Geschwindigkeit durch die Linie GD bezeichnet, so ist der beschriebene Weg der hyperbolischen Fläche DERS proportional.

Zusatz 2. Nimmt man den Punkt R beliebig an, so findet man den Punkt G, indem man voraussetzt, dass GR sich zu GD verhalte, wie die Anfangsgeschwindigkeit zu der, nach Beendigung des Weges RSED stattfindenden Geschwindigkeit. Ist der Punkt G gefunden, so erhält man den Weg aus der gegebenen Geschwindigkeit und umgekehrt.

Zusatz 3. Da nach §. 16. aus der gegebenen Zeit die Geschwindigkeit, und nach diesem §. aus der gegebenen Geschwindigkeit der Weg sich ergiebt; so erhält man den Weg aus der gegebenen Zeit, und umgekehrt.

§. 18. Lehrsatz. Ein Körper, welcher durch die gleichförmige Kraft der Schwere abwärts gezogen wird, steigt geradlinig auf oder ab, und erleidet einen Widerstand, welcher zum Theil der Geschwindigkeit selbst, zum Theil ihrem Quadrat proportional ist. Zieht man nun durch

die Endpunkte der conjugirten Durchmesser eines Kreises oder einer Hyperbel Linien, welche den Durchmessern parallel sind, und verhalten sich die Geschwindigkeiten wie bestimmte Stücke dieser Parallelen, von einem gegebenen Punkte an gerechnet; so verhalten sich die Zeiten wie die Sectoren der Flächen, welche man erhält, indem man den Mittelpunkt mit den Endpunkten jener Stücke durch gerade Linien verbindet, und umgekehrt.

1. Fall. Gesetzt, der Körper steige aufwärts, es werde zum Mittelpunkt D und mit irgend einem Halbmesser DB der Kreisquadrant BETF beschrieben. Durch den Endpunkt B des Halbmessers DB ziehe man die unbegrenzte Gerade

$$BAP \mp DF.$$

Fig. 154.

Auf ersterer sei der Punkt A gegeben, und man nehme das Stück AP der Geschwindigkeit proportional an. Da der eine Theil des Widerstandes der Geschwindigkeit selbst der andere Theil ihrem Quadrat proportional ist, so verhält sich der ganze Widerstand in P wie $AP^2 + 2AP.AB$,[126])

Zieht man nun DA und DP, welche den Kreis in E und T schneiden, und drückt man die Schwere durch DA^2 aus, so dass dieselbe sich zum Widerstande in P verhalte wie

$$DA^2 : AP^2 + 2AP.AB;$$

so wird die Zeit des ganzen zukünftigen Aufsteigens dem Sector EDTE proportional sein.

Man ziehe DVQ, welche von der Geschwindigkeit AP das Moment PQ, und vom Sector DET das Moment DVT, beide den Moment der Zeit entsprechend, abschneidet. Jenes Decrement PQ der Geschwindigkeit verhält sich wie die Summe der Schwere und des Widerstandes, d. h. wie $DA^2 + AP^2 + 2AP.AB = DP^2$

Ferner ist die Fläche DPQ der Linie PQ[127]), also DP^2 proportional, und endlich verhält sich die Fläche DTV (indem $DTV : DPQ = DT^2 : DP^2$) wie die Constante DT^2. Demnach nimmt die Fläche EDT nach der Weise der zukünftigen Zeit, durch Subtraction der constanten Theilchen DTV gleichförmig ab, und ist daher der Zeit des zukünftigen Aufsteigens proportional. W. z. b. w.

Fig. 155.

2. Fall. Es werde, wie vorhin, die Geschwindigkeit des Körpers beim Aufsteigen durch die Linie AB ausgedrückt und der Widerstand der Summe.

$$AP^2 + 2AP . AB$$

proportional angenommen. Ist nun die Kraft der Schwere zu klein, um durch

$$AD^2$$

ausgedrückt zu werden; so nehme man BD so gross an, dass diese Kraft sich wie

$$AB^2 - BD^2$$

verhalte. Es sei DF perpendikulär auf DB und gleich DB, und man beschreibe durch F als Scheitel die Hyperbel FTVE, deren conjugirte Halbmesser DB und DF sind und welche DA in E, DP in F und DQ in V schneidet; alsdann wird die Zeit des ganzen zukünftigen Aufsteigens dem hyperbolischen Sector DTE proportional. Das Decrement PQ der Geschwindigkeit, welches in einem gegebenen Zeittheilchen hervorgebracht wird, verhält sich nämlich wie die Summe

aus dem Widerstande $= AP^2 + 2AB . AP$

und der Schwere $= AB^2 - BD^2$

d. h. wie $BP^2 - BD^2$.

Es verhält sich aber ferner die Fläche DTV zu der DPQ, wie

$$DT^2 : DP^2,$$

d. h. wenn man auf DF das Perpendikel TG fällt,

$$DTV : DPQ = GT^2 : BD^2$$
$$= GD^2 - DF^2 : BD^2 \text{ [128])}$$
$$= GD^2 : BP^2$$
$$= DF^2 : PB^2 - BD^2.$$

Da nun DPQ sich verhält wie PQ, d. h. wie $BP^2 - BD^2$, so wird DTV proportional DF^2.

Die Fläche EDT nimmt daher in den einzelnen gleichen Zeittheilchen, durch Subtraction eben so vieler constanter Theilchen DTV, gleichförmig ab und ist somit der Zeit proportional. W. z. b. w.

3. Fall. Es sei AP die Geschwindigkeit beim Herabsteigen des Körpers, ferner der Widerstand $= AP^2 + 2 . AP . AB$ die Kraft der Schwere $= DB^2 - AB^2$, wobei DBA ein rechter Winkel ist. Beschreibt man zum Mittelpunkt D und Hauptscheitelpunkt B die rechtwinklige Hyperbel BETV, welche die verlängerten Linien DA, DP und DQ in E, T und V schneidet; so wird der Sector DET dieser Hyperbel der Zeit des Herabsteigens proportional.

Fig. 156.

Das Increment PQ der Geschwindigkeit und die ihm proportionale Fläche DPQ verhält

sich nämlich wie der Ueberschuss der Schwere über den Widerstand, d. h. wie $DB^2 - AB^2 - 2 . AB . AP - AP^2 = DB^2 - BP^2$.

Ferner ist
$$DTV : DPQ = DT^2 : DP^2$$
$$= GT^2 : BP^2$$
$$= DG^2 - DB^2 : BP^2$$
$$= DG^2 : DB^2$$
$$= DB^2 : DB^2 - BP^2.$$

Da nun die Fläche DPQ sich wie PQ oder wie $DB^2 - BP^2$ verhält, so ist die Fläche DTV der Constanten DB^2 proportional. Die Fläche EDT wächst also gleichförmig in den einzelnen gleichen Zeittheilchen, durch Addition eben so vieler constanter Theilchen DTV, und daher ist sie der Zeit des Herabsteigens proportional. W. z. b. w.

Zusatz. Construirt man zum Mittelpunkt D, Halbmesser A und Scheitel A den Bogen $At \sim ET$, so dass der erstere auf ähnliche Weise den Winkel ADT unterspannt, so verhält sich die Geschwindigkeit AP zu derjenigen, welche der Körper in der Zeit EDT, im nicht widerstehenden Mittel aufsteigend verlieren oder absteigend gewinnen könnte, wie das Dreieck DAP zum Sector DAt. Man erhält sie daher aus der gegebenen Zeit. Im nicht widerstehenden Mittel ist nämlich die Geschwindigkeit der Zeit, also diesem Sector proportional, im widerstehenden Mittel dem Dreieck DAP. In beiden Mitteln nähert sie sich, wenn sie sehr klein ist, dem Verhältniss der Gleichheit, wie dies beim Sector und Dreieck der Fall ist.

Anmerkung. Dasselbe könnte auch beim Aufsteigen des Körpers bewiesen werden, wenn die Kraft der Schwere zu klein ist, um durch
$$AD^2 = AB^2 + BD^2$$
und zu gross, um durch $AB^2 - BD^2$ ausgedrückt zu werden, und daher durch AB^2 ausgedrückt werden muss. Ich gehe aber zu andern Untersuchungen über.

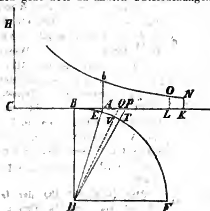


Fig 137.

§. 19. Lehrsatz. Unter denselben Voraussetzungen verhält sich der beim Auf- oder Absteigen beschriebene Weg, wie die Summe oder Differenz derjenigen Fläche, durch welche die Zeit ausgedrückt wird und einer andern Fläche, welche in arithmetischer Progression zu- oder abnimmt; wenn die aus dem Widerstande und der Schwere zusammengesetzten Kräfte in geometrischer Progression angenommen werden.

Man nehme AC der Schwere und AK dem Widerstande pro-

portional an, und zwar beide nach derselben Seite von A, wenn der Körper absteigt, nach entgegengesetzten Seiten, wenn er aufsteigt.

Man errichte das Perpendikel Ab, und mache dasselbe so gross, dass

$$1.\quad Ab : DB = DB^2 : 4AB \,.\, AC$$

werde, construire zu den rechtwinkligen Asymptoten CH und CK die Hyperbel bN, und errichte das Perpendikel KN auf CK. Alsdann wird die Fläche AbNK in arithmetischer Progression zu- oder abnehmen, während die Kräfte CK in geometrischer angenommen werden. Ich behaupte aber, dass der Abstand des Körpers von seiner grössten Höhe sich verhalte wie

$$2.\quad AbNK - DET.$$

Da nämlich AK dem Widerstande, d. h.

$$3.\quad AP^2 + 2 \,.\, AB \,.\, AP$$

proportional ist, so nehme man irgend eine constante Grösse Z an und setze

$$4.\quad AK = \frac{AP^2 + 2 \,.\, AB \,.\, AP}{Z}.$$

Nach §. 10. des zweiten Buches ist alsdann das Differential von AK, d. h.

$$5.\quad KL = \frac{2AP \,.\, PQ + 2AB \,.\, PQ}{Z} = \frac{2BP \,.\, PQ}{Z}.$$

Ferner wird das Differential der Fläche

$$KLON = KL \,.\, OL = \frac{2BP \,.\, PQ \,.\, OL}{Z}$$

oder, weil nach der Proportion 1.

$$LO : DB = DB^2 : 4AB \,.\, LC$$

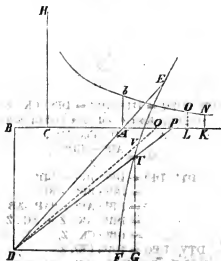


Fig. 158

also 6. $LO = \frac{DB^3}{4AB \cdot LC} = \frac{DB^3}{4 \cdot AB \cdot KC}$

7. $KLON = \frac{BP \cdot PQ \cdot DB^3}{2Z \cdot CK \cdot AB}$.

1. Fall. Steigt nun der Körper aufwärts, so sei BET (Fig. 157.) ein Kreis und die Schwere proportional

$$AB^2 + BD^2.$$

Alsdann ist die Linie AC, welche sich wie die Schwere verhält,

$$= \frac{AB^2 + BD^2}{Z},$$

und

$$DP^2 = AP^2 + 2AP \cdot AB + AB^2 + BD^2 = AK \cdot Z + AC \cdot Z = CK \cdot Z,$$

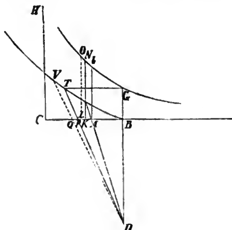


Fig. 159.

so wie $DTV : DPQ = DT^2 : DP^2 = DB^2 : CK \cdot Z.$

2. Fall. Steigt der Körper auf, und verhält sich die Schwere wie $AB^2 - BD^2$ (Fig. 158),

so wird $AC = \frac{AB^2 - BD^2}{Z}$.

Ferner ist $DT^2 : DP^2 = DF^2 : BP^2 - BD^2$

$= DB^2 : BP^2 - BD^2$

$= DB^2 : AP^2 + 2AP \cdot AB + AB^2 - BD^2$

$= DB^2 : AK \cdot Z + AC \cdot Z$

$= DB^2 : CK \cdot Z,$

endlich $DTV : DPQ = DB^2 : CK \cdot Z.$

3. Fall. Auf dieselbe Weise erhält man, wenn der Körper herabsteigt, und die Schwere sich daher wie

$BD^2 - AB^2$ (Fig. 159.)

verhält, also $AC = \frac{BD^2 - AB^2}{Z}$ ist;

$$DTV : DPQ = DB^2 : CK . Z, \text{ wie vorhin.}$$

Da mithin jene Flächen stets in diesem Verhältniss stehen, so setze man statt der Fläche DTCV, wodurch das sich selbst immer gleiche Moment der Zeit bezeichnet wird, irgend ein bestimmtes Rechteck, wie

$$BD . m;$$

alsdann wird, weil $DPQ = \frac{1}{2}BD . PQ$

$$\tfrac{1}{2}BD . PQ : BD . m = CK . Z : DB^2,$$

also $PQ . BD^3 = 2BD . m . CK . Z.$

Für die Fläche AbNK wird nun das oben (in 7.) gefundene zugehörige Moment (Differential)

$$KLON = \frac{BP}{AB} \cdot \frac{PQ . BD^3}{2CK . Z} = \frac{BP . BD . m}{BA},$$

und da ferner $DTV = BD . m;$

$$KLON - DTV = \frac{AP . BD . m}{AB}.$$

Der Unterschied der Momente, d. h. das Moment des Unterschiedes beider Flächen ist daher

$$= \frac{AP . BD . m}{AB},$$

und (weil $\frac{AD . m}{AB}$ constant ist) der Geschwindigkeit AP, d. h. dem Momente desjenigen Weges proportional, welchen der Körper auf- oder absteigend beschreibt. Demnach nimmt einerseits der Unterschied jener Flächen, andererseits der Weg mit einander proportionalen Momenten zu und ab, sie beginnen und verschwinden zugleich und sind daher selbst einander proportional. W. z. b. w.

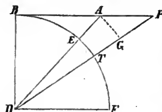


Fig. 160.

Zusatz. Setzt man eine Linie

$$M = \frac{DET}{BD},$$

und nimmt man irgend eine Linie V so an, dass

$$V : M = DA : DE^{129)}$$

wird; so verhält sich der ganze Weg, welchen der Körper auf- oder absteigend im widerstehenden Mittel beschreibt, zu dem in derselben Zeit im nicht widerstehenden Mittel beschriebenen Wege, wie der Unterschied jener Flächen, d. h. wie

$$AbNK - DET : \frac{BD . V^2}{AB}.$$

Der erstere ist daher bei gegebener Zeit selbst gegeben. Der Weg im nicht widerstehenden Mittel ist nämlich dem Quadrat der Zeit, oder V^2 [130]), und weil BD und AB constant sind, auch

$$\frac{BD \cdot V^2}{AB} = \frac{DA^2 \cdot BD \cdot M^2}{DE^2 \cdot AB}$$

proportional. Setzt man nnn das Moment von $M = m$,

so wird das Moment der Fläche $\frac{DA^2 \cdot BD \cdot M^2}{DE^2 \cdot AB}$

$$= \frac{2DA^2 \cdot BD \cdot M \cdot m}{DE^2 \cdot AB}.$$

Dieses Moment verhält sich zu demjenigen von AbNK — DET, welches

$$= \frac{AP \cdot BD \cdot m}{BA} \text{ ist,}$$

wie $\frac{DA^2 \cdot BD \cdot M}{DE^2} : \frac{1}{2} BD \cdot AP = \frac{DA^2}{DE^2} \cdot DET : DAP = 1 : 1$

wenn nämlich DET nnd DAP möglichst klein werden.

Die Fläche $\frac{BD \cdot V^2}{AB}$ und der Unterschied der Flächen AbNK — DET haben, wenn alle diese Flächen sehr klein sind, gleiche Momente und sind daher selbst einander gleich. Da nun die Geschwindigkeiten und daher auch die Wege, welche in beiden Mitteln beim Anfange des Fallens oder Ende des Steigens zugleich beschrieben sind, sich der Gleichheit nähern und sich daher wie

$$\frac{BD \cdot V^2}{AB} : AbNK - DET$$

verhalten; da ferner der Weg im nicht widerstehenden Mittel stets

$$\frac{BD \cdot V^2}{AB},$$

der im widerstehenden Mittel aber

AbNK — DET

proportional ist: so müssen nothwendig die in beiden Mitteln während beliebiger gleicher Zeiten beschriebenen Wego sich verhalten wie

$$\frac{BD \cdot V^2}{AB} : AbNK - DET. \quad \text{W. z. h. w.}$$

§. 19. a. Anmerkung. Der Widerstand sphärischer Körper in Flüssigkeiten entspringt theils ans der Zähigkeit, theils ans der Reibung und theils ans der Dichtigkeit des Mittels. Jener Theil desselben, welcher aus der Dichtigkeit des Mittels entspringt, steht, wie wir ausgesprochen haben, im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit, der andere aus der Zähigkeit entspringende Theil ist gleichförmig, oder dem Moment der Zeit proportional. Wir könnten daher nun znr Bewegung von Körpern übergehen, welche einen Widerstand erleiden, der zum Theil dnrch eine gleichförmige Kraft hervorgebracht wird, oder dem Moment der Zeit proportional ist, zum Theil im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit steht. Es ist aber hinreichend, den Zugang zu dieser Betrachtung in den §§. 12. nnd 13. nebst ihren Zusätzen eröffnet zn haben. In denselben kann man statt des gleichförmigen Widerstandes,

welcher beim Aufsteigen aus der Schwere des Körpers entspringt, den gleichförmigen Widerstand substituiren, welchen die Zähigkeit des Mittels erzengt, wenn der Körper sich allein vermöge des Anstosses einer ihm innewohnenden Kraft bewegt. Beim geradlinigen Aufsteigen des Körpers kann man diesen Widerstand zur Kraft der Schwere addiren, beim Absteigen ihn von derselben subtrahiren.

Wir könnten auch zur Bewegung von Körpern übergehen, welche einen Widerstand erleiden, der theils gleichförmig, theils der Geschwindigkeit, theils dem Quadrat der letztern proportional ist. Den Weg hierzu habe ich in den §§. 18. und 19. eröffnet, in denen ebenfalls der gleichförmige, aus der Zähigkeit des Mittels entspringende, Widerstand statt der Schwerkraft substituirt, oder wie vorhin mit ihr zusammengesetzt werden kann. Ich eile aber zu andern Untersuchungen.

ABSCHNITT IV.

Von der kreisförmigen Bewegung der Körper in widerstehenden Mitteln.

---

§. 20. Lehnsatz. Es sei PQRr eine Spirallinie, welche alle Radien SP, SQ, SR, etc. unter gleichen Winkeln schneidet. Man ziehe die gerade Linie PT, welche die Curve in einem beliebigen Punkte P berührt und den verlängerten Radius SQ in T schneidet, errichte auf der Spirallinie die Perpendikel PO und QO, welche einander in O schneiden und ziehe SO. Alsdann behaupte ich, dass, wenn die Punkte P und Q sich einander nähern und zusammenfallen, der Winkel PSO ein Rechter und zuletzt

$$TQ \cdot 2PS = PQ^2$$ werde.

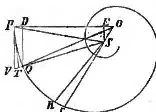


Fig. 161.

Da der Winkel

$$OPQ = OQR = 90^0$$

und $SPQ = SQR$,

so ergiebt sich

$$\angle\, OPS = OQS.$$

Der durch die Punkte O, S und P gehende Kreis trifft daher auch den Punkt Q. Fallen nun die Punkte P und Q zusammen, so wird dieser Kreis im Punkte des Zusammentreffens die Spirallinie berühren und die Linie OP perpendikulär schneiden. OP wird demnach Durchmesser dieses Kreises und der Winkel im Halbkreise

$$OSP = 90^0.$$

Ferner fälle man anf OP die Perpendikel QD und SE, alsdann fallen die letzten Verhältnisse der Linien folgendermassen aus:

$$TQ : PD = TS : PE = PS : PE \text{ [131]} = 2PO : 2PS,$$

ferner ist $PD : PQ = PQ : 2PO;$[132]

also durch Zusammensetzung

$$TQ : PQ = PQ : 2PS$$

oder $PQ^2 = TQ \cdot 2PS.$ W. z. b. w.

§. 21. Lehrsatz. Verhält sich die Dichtigkeit des Mittels in den einzelnen Orten umgekehrt, wie der Abstand der letztern von einem unbeweglichen Centrum, und steht die Centripetalkraft im doppelten Verhältniss der Dichtigkeit; so kann der Körper sich in einer Spirale bewegen, welche alle von jenem Centrum ans gezogenen Radien unter einem constanten Winkel schneidet.

Man setze alles voraus, was im vorhergehenden Lehrsatze ausgesprochen worden ist und verlängere SQ bis V, so dass

$$SV = SP$$

wird. In gleichen Zeiten beschreibe der Körper die sehr kleinen Bogen PQ und QR. Die Decremente dieser Bogen, welche aus dem Widerstande des Mittels entspringen, oder diese Unterschiede zwischen diesen Bogen und denjenigen, welche in denselben Zeiten im nicht widerstehenden Mittel beschrieben werden würden, verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der Zeiten, in denen sie erzeugt werden. Es ist daher das Decrement des Bogens PQ gleich $^1/_4$ Decrement des Bogens PR. Nimmt man die Fläche $PSQ = QSr,$

so wird das Decrement des Bogens PQ

$$= {}^1/_2 Rr,$$

und es verhält sich daher die Kraft des Widerstandes zur Centripetalkraft, wie 1. $^1/_2 Rr : TQ,$

welche Linien beide Kräfte respective gleichzeitig erzeugen. Da die Centripetalkraft, welche in P auf den Körper wirkt, sich umgekehrt wie SP^2 verhält (nach erstem Buche, §. 10.) die kleine Linie TQ, welche durch jene Kraft erzeugt wird, in einem Verhältniss steht, das aus dieser Kraft und dem Quadrat der Zeit, worin der Bogen PQ beschrieben wird, zusammengesetzt ist (denn den Widerstand vernachlässige ich in diesem Falle, da er unendlich kleiner als die Centripetalkraft ist); $TQ \cdot SP^2$ oder (nach §. 20.) $^1/_2 PS^2 \cdot SP$ dem Quadrate jener Zeit proportional. Die Zeit verhält sich daher wie

$$2.\quad PQ \sqrt{SP},$$

und die Geschwindigkeit, womit der Körper den Bogen PQ in jener Zeit beschreibt, wie

$$3.\ \frac{PQ}{PQ \sqrt{SP}} = \frac{1}{\sqrt{SP}},$$

d. h. umgekehrt wie die Quadratwurzel aus dem Abstande SP. Auf dieselbe Weise findet man die Geschwindigkeit, womit der Bogen QR beschrieben wird, im halben umgekehrten Verhältniss von SQ. Die

Bogen PQ und QR verhalten sich aber zu einander, wie die Geschwindigkeiten, mit denen sie beschrieben werden; also ist

$$4.\quad PQ : QR = \frac{1}{\sqrt{SP}} : \frac{1}{\sqrt{SQ}} = QS : \sqrt{SP \,.\, SQ}.$$

Da $\angle SPQ = SQr$ und Fläche $PSQ = QSr$,
ist aber auch $5.\quad PQ : Qr = QS : SP.$[133])

Durch Verbindung der beiden Proportionen 4. und 5. erhalten wir ferner $PQ : Qr - QR = QS : PS - \sqrt{PS \,.\, QS}$
oder $6.\quad PQ : Rr = QS : \tfrac{1}{2} VQ;$
denn wenn die Punkte P und Q zusammenfallen, ist das letzte Verhältniss von $SP - \sqrt{SP \,.\, SQ} : \tfrac{1}{2} QV$
das der Gleichheit.[134]) Da das aus dem Widerstande des Mittels entspringende Decrement des Bogens PQ, d. h $\tfrac{1}{2}Rr$ sich verhält, wie der Widerstand und das Quadrat der Zeit zusammengenommen; so ist der Widerstand (nach 2.) proportional

$$\frac{Rr}{PQ^2 \,.\, SP}.$$

Mittelst der Proportion 6. wird aber

$$7.\quad \frac{Rr}{PQ^2 \,.\, SP} \text{ proportional } \frac{\tfrac{1}{2}VQ}{SQ \,.\, PQ \,.\, SP} = \frac{\tfrac{1}{2}OS}{OP \,.\, SP^2}.$$

Fallen nämlich P und Q zusammen, so geschieht dasselbe mit SP und SQ und es wird $SQ = SP$ und $\angle PVQ = 90^0$,
und da ferner $\triangle PVQ \sim PSO$[135]),
so wird $8.\quad PQ : \tfrac{1}{2}VQ = OP : \tfrac{1}{2}OS.$

Es ist demnach $\frac{OS}{OP \,.\, PS^2}$ dem Widerstande proportional, welcher letztere sich auch verhält, wie die Dichtigkeit des Mittels in P und das Quadrat der Geschwindigkeit zusammengesetzt. Nimmt man daher das letztere Verhältniss, oder (nach 3.) $\frac{1}{SP}$ vom obigen Ausdruck 7. fort, so ergiebt sich die Dichtigkeit des Mittels in P proportional

$$9.\quad \frac{OS}{OP \,.\, SP}.$$

Ist die Spirallinie gegeben, so kennt man auch das Verhältniss

$$OS : OP,$$

und es verhält sich die Dichtigkeit des Mittels in P wie

$$10.\quad \frac{1}{SP}.$$

In einem Mittel, dessen Dichtigkeit dem Abstande SP vom Centrum umgekehrt proportional ist, kann sich daher der Körper längs dieser Spirallinie bewegen. W. z. b. w.

Zusatz 1. Die Geschwindigkeit in jedem Orte P ist stets diejenige, mit welcher der Körper im nicht widerstehenden Mittel auf einem Kreise zum Radius SP bei derselben Centripetalkraft sich bewegen kann.[136])

Zusatz 2. Die Dichtigkeit des Mittels ist, wenn der Abstand SP gegeben ist, proportional $\frac{OS}{OP}$.
Ist der Abstand nicht gegeben, so wird sie proportional

$$\frac{OS}{OP \cdot PS}.$$

Hiernach kann also die Spirallinie jeder Dichtigkeit des Mittels angepasst werden.

Zusatz 3. Die Kraft des Widerstandes an jedem Orte P verhält sich zur Centripetalkraft in demselben, wie

$$\tfrac{1}{2}OS : OP.$$

Jene Kräfte sind nämlich respective proportional den Linien

$$\tfrac{1}{2}Rr = \frac{\tfrac{1}{4}VQ \cdot PQ}{QS} \text{ und } TQ = \frac{\tfrac{1}{2}PQ^2}{PS},$$

welche sie in derselben Zeit erzeugen. Sie verhalten sich daher auch zu einander, indem man QS = PS setzt, wie

$$\tfrac{1}{2}VQ : PQ \text{ oder wie } \tfrac{1}{2}OS : OP.$$

Ist daher die Spirallinie gegeben, so kennt man auch das Verhältniss des Widerstandes zur Centripetalkraft, und umgekehrt ergiebt sich aus diesem Verhältniss die Spirallinie.

Zusatz 4. Der Körper kann sich daher nur dann auf dieser Spirallinie bewegen, wenn die Kraft des Widerstandes kleiner ist, als die Hälfte der Centripetalkraft. Wird der Widerstand gleich der halben Centripetalkraft, so fällt die Spirale mit der geraden Linie PS zusammen,[137]) und es bewegt sich der Körper auf der derselben nach dem Centrum hin mit derjenigen Geschwindigkeit, welche sich zu der Geschwindigkeit im nicht widerstehenden Mittel für den Fall einer Parabel wie $1 : \sqrt{2}$
verhält. (Erstes Buch, §. 24.) Die Zeiten des Herabsteigens verhalten sich daher umgekehrt wie die Geschwindigkeiten und sind demnach constant.

Zusatz 5. Da in gleicher Entfernung vom Centrum die Geschwindigkeit auf der Spirale PQR und der geraden Linie SP dieselbe ist und da die Länge der Spirale zu der der geraden Linie in dem constanten Verhältniss OP : OS[138])
steht; so wird die Zeit des Herabsteigens auf jener zur Zeit des Herabsteigens auf dieser in demselben constanten Verhältniss stehen. Erstere ist daher constant.

Zusatz 6. Werden aus dem Mittelpunkte S mit zwei gegebenen Radien Kreise beschrieben, und ändert sich bei denselben beliebig der Winkel, welchen die Spirale mit dem Radius PS bildet; so verhält sich die Zahl der Umläufe, welche der Körper zwischen den Peripherien beider Kreise vollenden kann, wie

$$PS : OS,$$

oder wie die Tangente des Winkels, welchen die Spirallinie mit dem Radius PS bildet. Die Zeit derselben Umläufe verhält sich aber wie

$$OP : OS,$$

d. h. wie die Secante jenes Winkels, oder *umgekehrt* wie die Dichtigkeit des Mittels.[139])

Zusatz 7. Ein Körper bewegt sich in einem Mittel, dessen Dichtigkeit sich *umgekehrt* wie der Abstand vom Centrum verhält, auf einer beliebigen Curve AEB um jenes Centrum herum und schneidet den ersten Radius AS in B unter demselben Winkel, wie früher in A. Die Geschwindigkeit in B verhält sich zur ersten in A *umgekehrt* wie die Quadratwurzeln aus den Abständen vom Centrum d. h. wie

$$\sqrt{AS} : \sqrt{BS}.$$

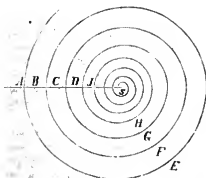


Fig. 162.

Alsdann wird der Körper fortfahren, unzählige ähnliche Umläufe BFC, CGD etc, auszuführen und in den Durchschnittspunkten den Radius AS in stetig proportionale Stücke AS, BS, CS, DS etc. theilen. Die Umlaufszeiten werden sich verhalten *direct* wie die Umfänge der Bahnen

AEB, BFC, CGD, etc.

und *indirect* wie die Geschwindigkeiten in den Anfangspunkten

A, B, C, etc.

d. h. wie $AS^{3/2}, BS^{3/2}, CS^{3/2}$, etc,

Ferner verhält sich die ganze Zeit, innerhalb welcher der Körper zum Centrum gelangt, zur Zeit des ersten Umlaufes, wie

$$AS^{3/2} + BS^{3/2} + CS^{3/2} + \text{in infin.} : AS^{3/2}$$

d. h. wie $AS^{3/2} : AS^{3/2} - BS^{3/2}$

oder sehr nahe wie $\frac{2}{3}AS : AB$.[140])

Hieraus findet man leicht jene ganze Zeit.

Zusatz 8. Hiernach kann man auch beiläufig die Bewegung der Körper in solchen Mitteln, deren Dichtigkeit entweder gleichförmig ist, oder irgend ein anderes gegebenes Gesetz beobachtet, erschliessen.

Man beschreibe nämlich aus dem Mittelpunkte S, mit den stetig proportionalen Radien AS, BS, CS etc. beliebig viel Kreise und setze voraus, dass die Zeit der Umläufe zwischen den Peripherieen zweier beliebiger von diesen Kreisen, in dem oben behandelten Mittel, sich sehr nahe verhalte zur Zeit der Umläufe zwischen denselben Peripherieen in dem hier aufgestellten Mittel, wie die mittlere Dichtigkeit des neuen Mittels

zwischen diesen Kreisen zur mittleren Dichtigkeit des obigen Mittels zwischen denselben Kreisen. In demselben Verhältniss stehe dann ferner die Secante des Winkels, unter welchem die oben behandelte Spirallinie im dortigen Mittel den Radius AS schneidet, zur Secante desselben Winkels im neuen Mittel. Endlich setze man auch noch voraus, dass die Anzahl aller Umläufe zwischen denselben zwei Kreisen sich sehr nahe verhalten, wie die Tangenten derselben Winkel. Findet dies zwischen je zwei Kreisen statt, so wird auf diese Weise auch die Bewegung zwischen allen Kreisen fortgesetzt werden.

Wir könnten uns eben so leicht vorstellen, wie und in welchen Zeiten die Körper sich in jedem regulären Mittel werden bewegen müssen.

Zusatz 9. Wenn auch die excentrischen Bewegungen auf Spirallinien erfolgen, welche sich der ovalen Form nähern, so kann man doch annehmen, dass die einzelnen Umläufe solcher Spiralen gegenseitig um dieselben Intervalle von einander abstehen und sich in demselben Grade dem Centrum nähern, wie in der oben beschriebenen Spirallinie. Auf diese Weise sehen wir daher ein, wie die Bewegung der Körper in derartigen Spirallinien erfolgt.

§. 22. Lehrsatz. Verhält sich die Dichtigkeit in den einzelnen Orten umgekehrt wie der Abstand derselben vom Centrum, und die Centripetalkraft umgekehrt wie irgend eine Potenz desselben Abstandes; so kann der Körper sich in einer Spirallinie bewegen, welche alle vom Centrum aus gezogenen Radien unter gegebenem Winkel schneidet.

Der Beweis wird eben so, wie im vorhergehenden Satze geführt. Verhält sich nämlich die Centripetalkraft in P umgekehrt wie

$$SP^{n+1}$$

so schliesst man wie oben, dass die Zeit, in welcher der Körper den beliebigen Bogen PQ beschreibt, sich verhalte wie

$$PQ : SP^{1/2 n}.$$

Der Widerstand in P ist proportional

$$\frac{Rr}{PQ^2 . SP^n} = \frac{(1-{}^1/_2 n)VQ}{PQ . SP^n . QS} = \frac{(1-{}^1/_2 n) . OS}{OP . SP^{n+1}},$$

d. h. umgekehrt SP^{n+1}.

Da nun die Geschwindigkeit sich umgekehrt wie $SP^{1/2 n}$ verhält, so wird die Dichtigkeit in P sich umgekehrt wie SP verhalten.[141])

Zusatz 1. Der Widerstand verhält sich zur Centripetalkraft, wie

$$(1-{}^1/_2 n)\ OS : OP.$$

Zusatz 2. Wenn die Centripetalkraft umgekehrt SP^3 proportional ist, so wird $1-{}^1/_2 n = 0$, also der Widerstand und die Dichtigkeit beide $= 0$, wie im ersten Buche, §. 25.

Zusatz 3. Wenn die Centripetalkraft umgekehrt SP^n proportional ist, wo $n > 3$, so geht der positive Widerstand in einen negativen über.

§. 23. Anmerkung. Uebrigens sind diese und die vorhergehenden Sätze, welche von ungleich dichten Mitteln handelten, nur in Bezug auf so kleine Körper zu verstehen, dass die Verschiedenheit der Dichtigkeit an beiden Seiten des Körpers nicht in Betracht kommen kann. Ferner setze ich den Widerstand, unter übrigens gleichen Umständen der Dichtigkeit proportional. Daher muss in solchen Mitteln, wo die Kraft des Widerstandes sich nicht wie die Dichtigkeit verhält, die letztere so weit vermehrt oder vermindert werden, dass entweder das Uebermaass des Widerstandes aufgehoben oder der Mangel ersetzt wird.

§. 24. Aufgabe. Man soll die Centripetalkraft und den Widerstand des Mittels bestimmen, bei denen ein Körper sich in einer gegebenen Spirallinie und nach einem gegebenen Gesetze der Geschwindigkeit bewegen kann.

Es sei (Figur 161.) PQR jene Spirale. Aus der Geschwindigkeit, mit welcher der Körper den sehr kleinen Bogen PQ durchläuft, erhält man die Zeit, und aus der Höhe TQ, welche sich wie die Centripetalkraft und das Quadrat der Zeit verhält, diese Kraft. Hierauf ergiebt sich aus dem Unterschiede RSr der, in gleichen Zeittheilchen beschriebenen, Flächen PSQ und QSR die Verzögerung des Körpers, endlich aus der Verzögerung der Geschwindigkeit die Dichtigkeit des Mittels, wie im vorhergehenden Paragraphen.

§. 25. Aufgabe. Die Centripetalkraft ist gegeben; man soll die Dichtigkeit des Mittels in den einzelnen Orten bestimmen, bei welcher der Körper eine gegebene Spirallinie beschreiben wird.

Aus der Centripetalkraft sucht man die Geschwindigkeit an den einzelnen Orten, und hierauf aus der Verzögerung der Geschwindigkeit die Dichtigkeit des Mittels, wie im vorhergehenden Paragraphen.

Eine Methode zur Behandlung dieser Aufgaben habe ich in den §§. 14 und 10. dieses Buches dargelegt, und will daher den Leser nicht länger mit verwickelten Untersuchungen dieser Art aufhalten. Hinzuzufügen ist noch einiges über die Kräfte zur Beschleunigung der Körper, und über die Dichtigkeit und den Widerstand des Mittels, in welchem die bisher auseinandergesetzten und die ihnen verwandten Bewegungen erfolgen.

ABSCHNITT V.

Von der Dichtigkeit und der Zusammendrückung der Flüssigkeiten und von der Hydrostatik.

§. 26. Erklärung. Eine Flüssigkeit ist jeder Körper, dessen Theile einer jeden einwirkenden Kraft nachgeben und, indem sie nachgeben, leicht unter einander bewegt werden.

§. 27. Lehrsatz. Alle Theile einer gleichartigen und unbewegten Flüssigkeit, welche in einem beliebigen unbewegten Gefässe eingeschlossen und von allen Seiten zusammengedrückt wird, werden (indem wir die Betrachtung der Verdichtung, der Schwere und aller Centripetalkräfte zur Seite liegen lassen) überall gleich stark gedrückt und bleiben, ohne jede aus dem Druck entspringende Bewegung, an ihren Orten.

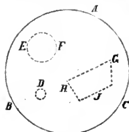


Fig. 163.

1. Fall. In einem sphärischen Gefässe ABC werde eine Flüssigkeit eingeschlossen und von allen Seiten gleichmässig gedrückt; alsdann wird kein Theil derselben durch jenen Druck in Bewegung gesetzt werden. Sollte nämlich etwa ein Theil D sich bewegen, so müssten nothwendig alle derartigen Theile, welche überall gleich weit vom Mittelpunkte abstehen, sich auf ähnliche Weise und zugleich bewegen, weil alle einen ähnlichen und gleichen Druck erleiden und alle Bewegung ausgeschlossen wird, welche nicht aus jenem Drucke entspringt. Allein es können sich alle nur dann dem Centrum nähern, wenn die Flüssigkeit sich gegen das letztere hin verdichtet, was gegen die Voraussetzung ist. Eben so können sie sich nur dann von ihm entfernen, wenn die Verdichtung der Flüssigkeit gegen den Umfang zu erfolgt, was ebenfalls gegen die Voraussetzung ist. Sie können sich auch nicht, indem sie gleichen Abstand vom Centrum beibehalten, nach irgend einer Seite hin bewegen, weil sie sich aus demselben Grunde nach der entgegengesetzten Seite hin bewegen würden, derselbe Theil sich aber nicht zugleich nach zwei einander entgegengesetzten Richtungen bewegen kann. Es wird daher kein Theil der Flüssigkeit sich von seinem Orte entfernen. W. z. b. w.

2. Fall. Ich behaupte jetzt, dass alle sphärischen Theile dieser Flüssigkeit von allen Seiten gleich stark gedrückt werden. Es sei EF ein kugelförmiger Theil derselben, und man nehme an, derselbe werde von allen Seiten nicht gleich stark gedrückt. Alsdann würde der geringere Druck wachsen, bis von allen Seiten her gleicher Druck stattfände, und seine Theile würden, nach 1. Fall, ebenfalls an ihren Orten

verharren, und sie würden nach der Hinzufügung des neuen Druckes, nach §. 26., von ihren Orten sich bewegen. Beides widerspricht einander. Es war daher die Annahme, dass die Kugel EF nicht überall stark gedrückt werde, falsch. W. z. b. w.

3. Fall. Ich behaupte ferner, dass verschiedene sphärische Theile gleichen Druck erleiden.

Sphärische Theile, welche sich berühren, drücken einander im Berührungspunkte, nach 3. Gesetz der Bewegung, gleich stark. Nach 2. Fall werden sie aber überall durch dieselbe Kraft gedrückt. Daher werden auch zwei beliebige, sich nicht berührende, kugelförmige Theile durch dieselbe Kraft gedrückt werden, weil ein zwischenliegender kugelförmiger Theil beide berühren kann. W. z. b. w.

4. Fall. Alle Theile der Flüssigkeit erleiden überall gleichen Druck. Zwei beliebige Theile können nämlich von sphärischen Stücken in beliebigen Punkten berührt werden, üben dort auf die letztern, nach 3. Fall, gleichen Druck aus und erleiden nun umgekehrt, nach 3. Gesetz der Bewegung, denselben Druck von ihnen. W. z. b. w.

5. Fall. Da also ein beliebiges Stück GHJ der Flüssigkeit in dem übrigen Theile der letztern wie in einem Gefässe eingeschlossen ist, und von allen Seiten gleich stark gedrückt wird; da seine einzelnen Theile aber sich wechselseitig gleich stark drücken, und unter sich ruhen: so müssen offenbar bei einem jeden Stücke GHJ, welches von allen Seiten gleich stark gedrückt wird, alle Theile auf einander gleichen Druck ausüben und unter sich ruhen.

6. Fall. Wird jene Flüssigkeit in einem nicht festen Gefässe eingeschlossen, und nicht gleich stark von allen Seiten gedrückt, so wird sie, nach §. 26., dem stärkeren Drucke nachgeben.

7. Fall. In einem festen Gefässe wird demnach eine Flüssigkeit von der einen Seite keinen stärkern Druck erleiden, als von der andern, wird aber vor demselben zurückweichen und zwar augenblicklich, weil die feste Seite des Gefässes der zurückweichenden Flüssigkeit nicht nachfolgen kann. Beim Zurückweichen wird die Flüssigkeit auf die entgegengesetzte Seite drücken und so der Druck sich von allen Seiten der Gleichheit nähern. Da nun die Flüssigkeit, sobald sie von der stärker gedrückten Seite zurückzuweichen sucht, durch den Widerstand des Gefässes an der entgegengesetzten Seite zu stehen kommt, so wird der Druck von allen Seiten augenblicklich zur Gleichheit zurückgebracht, ohne lokale Bewegung. Plötzlich werden die Theile der Flüssigkeit, nach 5. Fall, sich wechselseitig gleich stark drücken und unter sich ruhen. W. z. b. w.

Zusatz. Die Bewegung der Theile der Flüssigkeit unter sich wird daher durch einen, beliebig an der äusseren Oberfläche der Flüssigkeit beigebrachten, Druck nur dann sich ändern können, wenn entweder die Figur der Oberfläche irgendwo eine andere wird, oder alle Theile

der Flüssigkeit, bei einem stärkeren oder schwächeren gegenseitigen Druck, sich schwerer oder leichter unter einander bewegen.

§. 28. Lehrsatz. Die einzelnen Theile eines kugelförmigen flüssigen Körpers, der in gleichen Abständen vom Centrum gleichartig ist, liegen auf einer concentrischen sphärischen Fläche und gravitiren gegen den Mittelpunkt des Körpers. Unter diesen Umständen trägt die Grundfläche das Gewicht eines Cylinders, dessen Basis gleich der Grundfläche und dessen Höhe gleich derjenigen der aufliegenden Fläche ist.

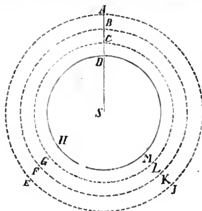


Fig. 164.

Es sei DHM die Grundfläche und AEJ die äusserste Oberfläche der Flüssigkeit. Durch unzählige sphärische Oberflächen BFK, CGL werde die Flüssigkeit in gleichdicke concentrische Schalen getheilt, und man denke sich, dass die Schwere nur auf die obere Fläche jeder Schale wirke und ihre Wirkung auf gleiche Theile aller Oberflächen gleich sei. Die oberste Fläche AEJ wird daher nur durch die einfache Kraft ihrer eigenen Schwere gedrückt, welche dann auch auf alle Theile der oberen Schale und die zweite Oberfläche BFK (nach §. 27.) einen nach ihrer Grösse gleichen Druck ausübt. Ausserdem erleidet diese zweite Oberfläche BFK durch ihre eigene Schwere einen Druck, welcher zur ersteren Kraft addirt, einen doppelten Druck hervorbringt. Diesen ihrer Grösse entsprechenden und ausserdem den Druck der eigenen Schwere, d. h. einen dreifachen Druck erleidet die dritte Oberfläche CGL. Auf ähnliche Weise erleidet die vierte Fläche einen vierfachen, die fünfte einen fünffachen Druck u. s. w. f. Der Druck also, welchen eine jede Oberfläche erleidet, verhält sich nicht wie die ganze Menge der aufliegenden Flüssigkeit, sondern wie die Zahl der Schalen bis zur äusseren Grenze des flüssigen Körpers und wird gleich der Schwere der untersten Schale, multiplicirt durch die Zahl aller Schalen,

d. h. der Schwere eines festen Körpers, dessen letztes Verhältniss zum vorausgesetzten Cylinder (wenn man nur die Zahl der Schalen ins Unendliche vermehrt und ihre Dicke eben so vermindert, so dass die Wirkung der Schwere von der untersten zur obersten Fläche eine continuirliche werde) das der Gleichheit wird.

Die unterste Fläche hat daher das Gewicht des besagten Cylinders zu tragen. W. z. b. w.

Auf ähnliche Weise ergiebt sich die Wahrheit des Satzes, wenn die Schwere in irgend einem angegebenen Verhältniss des Abstandes vom Centrum abnimmt; wie auch, wenn die Flüssigkeit nach oben lockerer, nach unten dichter ist. W. z. b. w.

Zusatz 1. Die Grundfläche wird daher nicht durch das ganze Gewicht der aufliegenden Flüssigkeit gedrückt, sondern sie hat nur den im Lehrsatze beschriebenen Theil des Gewichtes zu tragen; indem der übrige Theil desselben durch die gewölbte Figur der Flüssigkeit angehoben wird.

Zusatz 2. In gleichen Entfernungen vom Centrum findet aber immer ein gleich grosser Druck statt, mag die gedrückte Oberfläche dem Horizonte parallel, perpendikulär oder schief gegen ihn liegen; mag die Flüssigkeit von der gedrückten Fläche aufwärts perpendikulär längs einer geraden Linie fortgehen, oder schief durch gedrehte Höhlungen und Kanäle fortfliessen; mögen die letzteren regulär oder höchst irregulär, eng oder weit sein. Dass durch diese Umstände der Druck sich nicht ändere, wird bewiesen, indem man die Beweismethode des §. 28. auf die einzelnen Fälle anwendet.

Zusatz 3. Durch denselben Beweis wird auch (nach §. 27.) dargethan, dass die Theile der schweren Flüssigkeit durch den Druck des aufliegenden Gewichtes eine Bewegung unter sich annehmen, wenn nur die Bewegung ausgeschlossen wird, welche aus der Verdichtung entspringt.

Zusatz 4. Wird daher ein anderer Körper von demselben specifischen Gewicht, welcher keine Verdichtung erleidet, in diese Flüssigkeit getaucht, so wird er durch den Druck des aufliegenden Gewichtes keine Bewegung erlangen. Er wird weder auf-, noch absteigen, noch gezwungen werden, seine Gestalt zu ändern. Ist er kugelförmig, so wird er es bleiben, wenn kein Druck hinzukommt; ist er würfelförmig, so bleibt er es, er mag weich oder flüssig sein, frei in der Flüssigkeit schwimmen oder auf dem Grunde liegen. Jeder innere Theil der Flüssigkeit befindet sich nämlich in der Lage eines untergetauchten Körpers, und in derselben Lage befinden sich alle untergetauchten Körper von derselben Grösse, Gestalt und demselben specifischen Gewicht. Wenn nun der untergetauchte Körper, unter Beibehaltung seines Gewichtes, flüssig würde und so die Form der Flüssigkeit annähme; so würde er, wenn er vorher auf- oder abstieg, oder eine neue Gestalt annahm, auch jetzt auf- oder abzusteigen, oder eine neue Gestalt anzunehmen gezwungen werden und zwar deshalb, weil die Schwere und andere Ursachen der Bewegung unverändert bleiben. Nach §. 27., 5. Fall würde er aber jetzt ruhen und seine Figur beibehalten, daher ist dies, auch früher der Fall.

Zusatz 5. Ein Körper, welcher specifisch schwerer als die ihn

umgebende Flüssigkeit ist, wird untersinken, ein specifisch leichterer Körper wird aufsteigen, und beide werden eine Bewegung und Gestaltänderung erlangen, soweit jener Ueberschuss oder Mangel an Schwere es bewirken kann. Beide, Ueberschuss und Mangel, stehen nämlich in der Kategorie einer Kraft, durch welche der, übrigens mit den Theilen der Flüssigkeit im Gleichgewicht stehende, Körper getrieben wird, und sie kann mit dem Mehr- oder Mindergewicht in einer Wagschale verglichen werden.

Zusatz 6. Körper, welche sich in Flüssigkeiten befinden, haben daher eine zweifache Schwere, die eine, welche die wahre und absolute, die andere, welche die scheinbare, gewöhnliche und relative genannt wird. Die absolute Schwere ist die ganze Kraft, mit welcher ein Körper sich abwärts zu bewegen strebt, die relative oder gewöhnliche ist das Uebermaass der Schwere, mit welchem ein Körper stärker als die ihn umgebende Flüssigkeit abwärts strebt. Vermöge der Schwere der ersten Art gravitiren die Theile aller Flüssigkeiten und Körper an ihren eigenen Orten, und bilden daher, durch Verbindung ihrer Gewichte, das Gewicht des Ganzen. Denn jedes Ganze ist schwer, wie man in Gefässen sehen kann, welche mit einer Flüssigkeit angefüllt sind, und das Gewicht des Ganzen ist der Summe der Gewichte aller Theile gleich und wird daher aus ihnen zusammengesetzt. Durch die Schwere der anderen Art gravitiren die Körper nicht an ihren Orten, d. h. unter einander verglichen, überwiegen sie nicht an Schwere, sondern verhindern die gegenseitigen Versuche herabzusteigen, und verbleiben daher an ihren Orten, als ob sie gar nicht schwer wären.

Was sich in der Luft befindet und nicht überwiegend schwer ist, hält man gewöhnlich nicht für schwer. Was an Schwere überwiegt, nennt man gewöhnlich schwer, so weit es nicht durch das Gewicht der Luft getragen wird. Die Gewichte sind nach der gewöhnlichen Bezeichnung nichts anderes, als das Uebermaass der wahren Gewichte über das der Luft. Man nennt daher gewöhnlich auch dasjenige leicht, was weniger schwer als die Luft ist und, indem es der schweren Luft nachgiebt, in die Höhe steigt. Die relativ leichten Körper sind dies aber nicht in Wahrheit, weil sie im leeren Raume herabsteigen. So sind auch im Wasser Körper, welche wegen ihres grösseren oder kleineren Gewichtes ab- oder aufsteigen, vergleichsweise und scheinbar schwer oder leicht, und ihre relative und scheinbare Schwere oder Leichtigkeit ist das Uebermaass oder der Mangel an Gewicht, um welches das wahre Gewicht derselben dasjenige des Wassers respective übertrifft, oder von ihm übertroffen wird. Was aber weder durch überwiegendes Gewicht sinkt, noch der überwiegenden Flüssigkeit nachgebend aufsteigt, wird, wenn es auch durch sein wahres Gewicht dasjenige des Ganzen vermehrt, relativ und im gewöhnlichen Sinne nicht schwer im Wasser genannt. Der Beweis dieser Fälle ist einander ähnlich.

Zusatz 7. Was von der Schwere bewiesen worden ist, findet auch bei allen anderen beliebigen Centripetalkräften statt.

Zusatz 8. Wird ein Mittel, in welchem irgend ein Körper sich bewegt, entweder durch sein eigenes Gewicht, oder durch irgend eine andere Centripetalkraft, und der Körper durch dieselbe Kraft, aber stärker angetrieben; so ist der Unterschied der Kräfte jene bewegende Kraft, welche wir in den vorhergehenden Sätzen als Centripetalkraft betrachtet haben. Dasselbe ist der Fall, wenn der Körper durch jene Kraft schwächer angetrieben wird, indem alsdann jener Unterschied die Centripetalkraft bildet.

Zusatz 9. Da aber Flüssigkeiten durch den Druck auf die in ihnen eingeschlossenen Körper die äussere Gestalt der letzteren nicht ändern, so werden sie auch, wie aus den Zusätzen zu §. 27. folgt, die gegenseitige Lage der inneren Theile dieser Körper nicht ändern. Werden Thiere darin eingetaucht, deren Gefühl nur aus der Bewegung ihrer Theile entspringt; so werden sie weder durch Untertauchung ihrer Körper eine Verletzung erleiden, noch irgend eine Empfindung haben, wofern ihr Körper nicht durch Zusammendrückung verdichtet werden kann.

Dasselbe Verhältniss findet bei jedem Systeme von Körpern statt, welches von einer comprimirenden Flüssigkeit umgeben ist. Alle Theile der Systems werden durch dieselben Bewegungen angetrieben, als wenn sie sich im leeren Raume befänden und behalten nur ihre relative Schwere bei, ausser in so weit die Flüssigkeit ihren Bewegungen einen Widerstand leistet, der erforderlich ist, um sie durch Zusammendrückung zu verbinden.

§. 29. Lehrsatz. Ist die Dichtigkeit irgend einer Flüssigkeit der Zusammendrückung proportional, und werden ihre Theile durch eine ihren Abständen vom Centrum umgekehrt proportionale, Centripetalkraft abwärts gezogen; werden ferner jene Abstände stetig proportional angenommen: so sind auch die Dichtigkeiten in denselben Entfernungen stetig proportional.

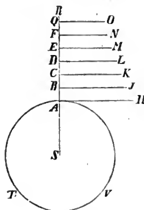


Fig. 165.

Es bezeichne ATV eine Kugelfläche, auf welcher die Flüssigkeit ruhet, S das Centrum und SA, SB, SC, SD, SE, etc. die stetig proportionalen Abstände. Man errichte die Perpendikel AH, BJ, CK, DL, EM etc., welche den Dichtigkeiten des Mittels in den Punkten A, B, C, D, E, etc. proportional sind. Alsdann werden die specifischen Gewichte in denselben Punkten

$$\frac{AH}{AS}, \frac{BJ}{BS}, \frac{CK}{CS}, \text{ etc.},$$

oder was dasselbe ist, $\frac{AH}{AB}, \frac{BJ}{BC}, \frac{CK}{CD}$ proportional.[142])

Man denke sich zuerst, dass diese specifischen Gewichte gleichförmig von A his B, von B his C, von C bis D, etc. fortgesetzt werden, indem die Decremente nach und nach in B, C, D, etc. stattfinden. Multiplicirt man nun diese Gewichte respective in die Höhen

AB, BC, CD, etc.,

so erhält man die verschiedenen Theile des Druckes

AH, BJ, CK, etc.,

welche auf die Grundfläche ATV wirken. (§. 28.)

Es erleidet demnach das Theilchen A alle Druckmengen

AH, BJ, CK, DL. etc. in infinitum;

das Theilchen B alle dieselben, mit Ausnahme des ersten AK; das Theilchen C alle ausser den beiden ersten AH und BJ; u. s. w. f. Es verhält sich demnach die Dichtigkeit des ersten Theilchens A zu derjenigen des zweiten B, oder

$$AH : BJ = AH + BJ + CK + DL + \text{etc. in inf.} : BJ + CK + DL + \text{etc. in inf.}$$
$$BJ : CK = BJ + CK + DL + \text{etc. in inf.} : CK + DL + \text{efc. in inf. u. s. w. f.}$$

Es sind daher die Summen auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen ihren Unterschieden AH, BJ, CK, etc.

proportional, und stehen mithin (nach zweitem Buche, §. 2.) selbst in stetiger Proportion; dasselbe gilt auch von ihren eben angeführten Differenzen, welche den Summen proportional sind. Es werden demnach die in den Orten A, B, C, etc.

den Linien AH, BJ, CK, etc.

proportionalen Dichtigkeiten selbst stetig proportional sein. Geht man ferner sprungweise fort, so werden auch in den stetig proportionalen Entfernungen SA, SC, SE, etc.

die entsprechenden Dichtigkeiten

AH, CK, EM, etc.

in stetiger Proportion stehen. Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass die, den stetig proportionalen Abständen

SA, SD, SQ, etc.

entsprechenden Dichtigkeiten

AH, DL, QO, etc.

in stetiger Proportion stehen.

Nähern sich nun die Punkte

A, B, C, D, E, etc.

einander so weit, dass die Progression der specifischen Gewichte, vom Grunde A bis zur Oberfläche der Flüssigkeit eine continuirliche werde; so werden die in den beliebigen stetig proportionalen Abständen

SA, SD, SQ, etc.

immer stetig proportionalen Dichtigkeiten AH, DL, QO etc. dies auch jetzt bleiben, W. z. b. w.

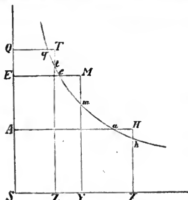


Fig. 166.

Zusatz. Ist daher die Dichtigkeit der Flüssigkeit in zwei Punkten A und E gegeben, so kann man daraus auf die Dichtigkeit in irgend einem anderen beliebigen Orte Q schliessen.

Man beschreibe nämlich zum Mittelpunkte S und den rechtwinkligen Asymptoten SQ und SX eine Hyperbel, welche die Perpendikel AH, EM, QT in den Punkten a, e, q, die auf die Asymptote SX gefällten Perpendikel HX, MY, TZ in den Punkten h, m, t schneidet. Hierauf setze man ZYmt : YmhX = EeqQ : EeaA, in welcher Proportion die drei letzten Flächen gegeben sind; alsdann wird die verlängerte Linie Zt die Linie QT der Dichtigkeit proportional abschneiden.

Sind nämlich die Linien SA, SE und SQ stetig proportional, so wird Fläche EeqQ = EeaA,[143]) daher auch nach obiger Proportion

ZYmt = YmhX,

und so SX : SY = SY : SZ

oder auch AH : EM = EM : QT

wie es sein muss. Nehmen die Linien SA, SE und SQ eine andere Stelle in einer Reihe stetig proportionaler Grössen ein, so werden die Linien AH, EM und QT, wegen der proportionalen hyperbolischen Flächen dieselbe Stelle in einer anderen Reihe stetig proportionaler Grössen einnehmen.

§. 30. Lehrsatz. Es sei die Dichtigkeit einer Flüssigkeit dem Drucke proportional, welchen die letztere erleidet, und es mögen ihre Theile durch die Schwere, welche dem Quadrat des Abstandes vom Centrum umgekehrt proportional ist, abwärts gezogen werden. Nimmt man nun die Entfernungen in harmonischer Progression an, so stehen die Dichtigkeiten der Flüssigkeit, in eben diesen Entfernungen, in geometrischer Progression.

Es bezeichnet S das Centrum, ferner seien

SA, SB, SC, SD, SE, etc.

die in geometrischer Progression stehenden Entfernungen. Man errichte die Perpendikel AH, BJ, CK, etc., welche den Dichtigkeiten der Flüssigkeit in den Punkten

A, B, C, etc.

proportional seien. Alsdann wird ihr specifisches Gewicht in denselben Punkten respective proportional

$$\frac{AH}{SA}, \frac{BJ}{SB^2}, \frac{CK}{SC^2}, \text{ etc.}$$

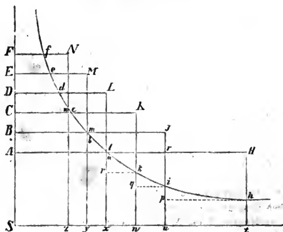


Fig. 167.

Man denke sich, dass diese specifischen Gewichte gleichförmig fortgesetzt würden, nämlich das erste von A bis B,
„ zweite „ B „ C,
„ dritte „ C „ D, u. s. w. f.

Multiplicirt man diese specifischen Gewichte bezüglich in die Höhen

AB, BC, CD, etc.,

oder, was wegen der gegenseitigen Proportionalität auch geschehen kann, in die Abstände SA, SB, SC, etc.,

so erhält man die entsprechenden Theile des ganzen stattfindenden Druckes ausgedrückt durch $\frac{AH}{AS}, \frac{BJ}{BS}, \frac{CK}{CS}$, etc.

Da nun die Dichtigkeiten den Summen dieser Theile des Druckes proportional sind, so verhalten sich die Unterschiede der Dichtigkeiten, d. h.

AH — BJ, BJ — CK, CK — DL, etc.

wie die Unterschiede jener Summen, d. h. wie

$$\frac{AH}{AS}, \frac{BJ}{BS}, \frac{CK}{CS}, \text{ etc.}$$

Zum Mittelpunkte S und zu den Asymptoten SA und Sx beschreibe man eine beliebige Hyperbel, welche die Perpendikel

AH, BJ, CK, etc. in den Punkten a, b, c, etc.,

hingegen die auf die Asymptote Sx gefällten Perpendikel Ht, Ju, Kw, etc. in den Punkten h, i, k, etc. schneidet. Nun verhalten sich die Unterschiede der Dichtigkeiten, d. h.

tu, uw, wx, etc. wie $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BJ}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, etc. und die Rechtecke

tu. th, uw. iu, etc. oder thpu, uiqw, etc. wie $\frac{AH}{AS} \cdot th$, $\frac{BJ}{BS} \cdot ni$, etc.

Ans der Natur der Hyperhel folgt nämlich

SA : St = th : Aa, oder auch SA : AH = th : Aa,

also

$$\text{1.}\quad \begin{cases} Aa = \frac{AH}{AS} \cdot th \\ Bb = \frac{BJ}{BS} \cdot ui. \text{ etc.} \end{cases}$$

und eben so

Nun sind Aa, Bb, etc. stetig proportional, verhalten sich daher wie ihre Unterschiede Aa — Bh, Bh — Cc, etc.; also sind auch die Rechtecke thpu, uiqw etc. diesen letztern Unterschieden respective proportional. Eben so sind die Summen der Unterschiede

Aa — Cc oder Aa — Dd

proportional den Summen der Rechtecke

thpu + uiqw oder thpu + niqw + wkrx.

Nun seien jener Glieder so viel als möglich da, alsdann wird die Summe aller Unterschiede, nämlich Aa — Ff der Summe aller Rechtecke proportional sein. Vermehrt man die Zahl der Glieder nnd vermindert man den Abstand der Punkte A, B, C, etc. ins Unendliche; so geht die Summe jener Rechtecke in die hyperbolische Fläche zthn über, welcher der Unterschied Aa — Pf proportionasein wird.

Nun nehme man die heliebigen Abstände, etwa

SA, SD, SF

in harmonischer Progression;[144]) so wird

Aa — Dd = Dd — Ff,

also werden auch die, diesen Unterschieden proportionalen, hyperholischen Flächen einander gleich, d. h. thlx = xlnz und so die Dichtigkeiten St, Sx, Sz oder AH, DL, FN stetig proportional. W. z. h. w.

Znsatz. Sind daher zwei beliehige Dichtigkeiten einer Flüssigkeit, etwa AH und CK gegeben, so kennt man auch die, ihrem Unterschiede tw entsprechende Fläche thkw. Hieraus findet man die, einer beliehigen Höhe SF entsprechende, Dichtigkeit mittelst der Proportion

thnz : thkw = Aa — Ff : Aa — Cc.

§. 31. Anmerknng. Durch eine ähnliche Beweisführung kann man darthun, dass, wenn die Schwere der Theilchen einer Flüssigkeit im dreifachen Verhältniss der Entfernungen vom Centrum ahnimmt, und die umgekehrten Quadrate dieser Entfernungen (nämlich $\frac{1}{SA^2}$, $\frac{1}{SB^2}$, $\frac{1}{SC^2}$, etc.) in arithmetischer Progression genommen werden; alsdann die Dichtigkeiten AH, BJ, CK, etc. in geometrischer Progression stehen.[145])

Nimmt ferner die Schwere im vierfachen Verhältniss der Entfernungen ab, und werden die Cuben dieser Entfernungen umgekehrt (nämlich $\frac{1}{SA^3}$, $\frac{1}{SB^3}$, $\frac{1}{SC^3}$ etc.), in arithmethischer Progression angenommen, so stehen die Dichtigkeiten

AH, BI, CK, etc.

in geometrischer Progression[146]) u. s. w. f. in infinitum.

Ist die Schwere der Theilchen der Flüssigkeit überall dieselbe, und stehen die Entfernungen in arithmethischer Progression, so stehen die Dichtigkeiten in geometrischer Progression, wie Edmund Halley gefunden hat.[147]) Ist die Schwere dem Abstande proportional und stehen die Quadrate der Entfernungen in arithmetischer Progression, so stehen die Dichtigkeiten in geometrischer Progression.[148]) Alles dieses findet auf die dargestellte Weise statt, wenn die Dichtigkeit der durch Zusammendrückung verdichteten Flüssigkeit der zusammendrückenden Kraft proportional ist, oder, was dasselbe besagt, wenn der von der Flüssigkeit eingenommene Raum sich umgekehrt wie diese Kraft verhält.

Man kann sich noch andere Gesetze der Verdichtung denken, etwa dass der Cubus der zusammendrückenden Kraft dem Biquadrat der Dichtigkeit proportional oder das dreifache Verhältniss der Kraft dem vierfachen der Dichtigkeit gleich sei. Wenn in diesem Falle die Schwere sich umgekehrt verhält, wie das Quadrat des Abstandes vom Centrum; so wird die Dichtigkeit dem Cubus des Abstandes umgekehrt proportional sein.[149]) Denkt man sich den Cubus der zusammendrückenden Kraft proportional der 5ten Potenz der Dichtigkeit und die Schwere dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional; so steht die Dichtigkeit im umgekehrten $^3/_2$ten Verhältniss des Abstandes.[150])

Denkt man sich die zusammendrückende Kraft im doppelten Verhältniss der Dichtigkeit, und ist die Schwere dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional; so ist die Dichtigkeit dem Abstande umgekehrt proportional.[150])

Alle Fälle durchzugehen, würde zu weitläufig sein. Uebrigens weiss man durch Versuche, dass die Dichtigkeit der Luft entweder genau, oder wenigstens sehr nahe der zusammendrückenden Kraft proportinal ist. Daher verhält sich die Dichtigkeit der Luft in der Atmosphäre unserer Erde, wie das Gewicht der ganzen aufliegenden Luft, d. h. wie die Höhe des Quecksilbers im Barometer.

§ 32. Lehrsatz. Theilchen, welche von einander fliehen in Folge von Kräften, die den Entfernungen ihrer Mittelpunkte umgekehrt proportional sind, bilden eine elastische Flüssigkeit, deren Dichtigkeit der Zusammendrückung proportional ist. Umgekehrt, verhält sich die Dichtigkeit einer, aus einander fliehenden Theilchen zusammengesetzten Flüssigkeit, wie die Zusammendrückung; so sind die Centrifugalkräfte der Theilchen den Abständen ihrer Mittelpunkte umgekehrt proportional.

Man denke sich die Flüssigkeit in dem Würfel ACE eingeschlossen,

und hierauf durch Zusammendrückung auf den kleinern Raum ace gebracht. Behalten nun die Theilchen in beiden Räumen eine ähnliche gegenseitige Lage bei, so verhalten sich ihre Abstände von einander

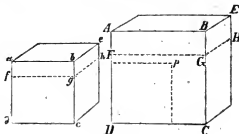


Fig. 168.

wie die Seiten der Würfel, d. h. wie AB : ab; die Dichtigkeiten des Mittels verhalten sich aber umgekehrt, wie die es einschliessenden Räume, d. h. direct wie $ab^3 : AB^3$.

Auf der Seitenfläche ABCD des grössern Würfels nehme man das Quadrat DP gleich der Seitenfläche db des kleinern Würfels an. Nach der Voraussetzung verhält sich alsdann der Druck, welchen DP auf die eingeschlossene Flüssigkeit ausübt, zu dem von db auf die eingeschlossene Flüssigkeit ausgeübten Drucke, wie die gegenseitigen Dichtigkeiten des Mittels, d. h. wie $ab^3 : AB^3$.

Der Druck, welchen das Quadrat DB auf die eingeschlossene Flüssigkeit ausübt, verhält sich aber zu dem vom Quadrat DP ausgeübten Drucke, wie DB : DP, d h. wie $AB^2 : ab^2$.

Durch Zusammensetzung beider Proportionen erhält man den von DB auf die Flüssigkeit ausgeübten Druck zu dem Drucke, mit welchem db wirkt, wie ab : AB.

Durch die Ebene FGH und fgh, welche man auch durch das Innere der Würfel gelegt denkt, theile man die Flüssigkeit in zwei Stücke, welche sich wechselweise mit denselben Kräften drücken werden, mit denen sie selbst durch die Ebenen AC und ac gedrückt werden, d. h. in dem Verhältniss ab : AB.

Die Centrifugalkräfte, durch welche jener Druck getragen wird, stehen in demselben Verhältniss. Wegen derselben Anzahl der Theilchen und ihrer ähnlichen Lage in beiden Würfeln verhalten sich die Kräfte, welche alle Theilchen in den Ebenen FGH und fgh auf alle ausüben, wie diejenigen Kräfte, womit ein einzelnes auf ein einzelnes wirkt. Es verhalten sich daher die Kräfte, welche die einzelnen Theilchen auf die einzelnen längs der Ebene FGH im grossen Würfel ausüben zu den im kleinen Würfel ihnen entsprechenden Kräften, wie

ab : AB,

d. h. umgekehrt wie der gegenseitige Abstand der Theilchen. W. z. b. w.

Verhalten sich ferner die Kräfte der einzelnen Theilchen umgekehrt wie ihre Abstände, also direct wie

$$ab : AB;$$

so stehen die Summen dieser Kräfte in demselben Verhältniss. Der Druck der Seitenflächen DB und dh verhält sich wie diese Summen und der Druck der Fläche DP : Druck der Fläche DB $= ab^2 : AB^2$. Durch Zusammensetzung beider Proportionen ergieht sich das Verhältniss des Druckes der Seitenfläche DP zum Druck der Fläche db, wie

$$ab^3 : AB^3,$$

d. h. es verhalten sich die zusammendrückenden Kräfte wie die Dichtigkeiten. W. z. b. w.

§. 33. Anmerkung. Auf ähnliche Weise ergieht sich, wenn die Centrifugalkräfte im umgekehrten doppelten Verhältniss der Abstände ihrer Mittelpunkte stehen, dass die Cuben der zusammendrückenden Kräfte den Biquadraten der Dichtigkeiten proportional sind. Stehen die Centrifugalkräfte im umgekehrten drei- oder vierfachen Verhältniss der Abstände, so verhalten sich die Cuben der zusammendrückenden Kräfte bezüglich wie die fünften oder sechsten Potenzen der Dichtigkeiten.

Setzt man allgemein

den Abstand der Theilchen von einander $= D$

die Dichtigkeit der zusammengedrückten Flüssigkeit $= E$

und die Centrifugalkraft proportional $\frac{1}{D^n}$;

so verhalten sich die zusammendrückenden Kräfte wie

$$\sqrt[3]{E^{n+2}}$$

und umgekehrt. Alles dieses ist aber nur von denjenigen Centrifugalkräften zu verstehen, welche auf die einander sehr nahe liegenden Theile beschränkt werden, oder sich nicht weit jenseits erstrecken.

Ein Beispiel haben wir an den magnetischen Körpern. Die anziehende Kraft derselben beschränkt sich fast nur auf sehr nahe Körper ihrer Art. Die Kraft des Magneten wird durch ein zwischengelegtes Eisenblech zusammengezogen und beinahe auf das letztere beschränkt. Entfernte Körper werden nämlich nicht so sehr durch den Magneten, als durch das Blech angezogen.

Nach derselben Weise werden die Flüssigkeiten, von denen hier die Rede war, aus solchen Theilchen zusammengesetzt, welche nur von den, ihnen sehr nahe liegenden Theilchen ihrer Art zurückweichen, auf entferntere aber nur mittelst der zwischenliegenden einwirken, welche letztere durch jene ursprüngliche Kraft verstärkt worden sind. Wenn die Kraft irgend eines Theilchens sich in's Unendliche fortpflanzt, so ist eine grössere Kraft zur gleichen Verdichtung einer grösseren Menge von Flüssigkeit erforderlich.

Ob die elastischen Flüssigkeiten aber aus Theilchen bestehen,

welche von einander wechselseitig fliehen, ist eine Frage der Physik. Wir haben auf mathematische Weise die Eigenschaften von Flüssigkeiten hergeleitet, welche aus derartigen Theilchen bestehen, um den Naturforschern Veranlassung zu geben, jene Frage zu behandeln.

ABSCHNITT VI.

Von der Bewegung und dem Widerstande der Pendel.

§. 34. Lehrsatz. Die Menge der Materie bei Pendeln, deren Schwingungspunkte gleich weit vom Aufhängepunkte entfernt sind, verhält sich wie die Gewichte und die Quadrate der Schwingungszeiten im leeren Raume zusammengesetzt.

Die Geschwindigkeit, welche eine gegebene Kraft in gegebener Materie und Zeit erzeugen kann, ist nämlich direct der Kraft und Zeit und indirect der Materie proportional. Je grösser die Kraft oder die Zeit, oder je kleiner die Materie ist, desto grösser wird die erzeugte Geschwindigkeit. Dies erhellt aus dem 2. Gesetze der Bewegung. Haben nun Pendel dieselbe Länge, so verhalten sich die bewegenden Kräfte in Punkten, welche gleichweit vom Aufhängepunkte entfernt sind, wie die Gewichte. Beschreiben daher zwei schwingende Körper gleiche Bogen und theilt man die letztern in gleiche Stücke; so verhalten sich die Zeiten, in denen die Körper einzelne correspondirende Theile der Bogen beschreiben, wie die ganzen Schwingungszeiten. Ihre Geschwindigkeiten in den einzelnen correspondirenden Theilen der Schwingungen verhalten sich zu einander direct wie die bewegenden Kräfte und die ganzen Schwingungszeiten und indirect wie die Menge der Materie. Diese Menge der Materie verhält sich daher direct wie die Kräfte und die ganzen Schwingungszeiten und indirect wie die Geschwindigkeiten; oder weil die Geschwindigkeiten sich indirect wie die Zeiten verhalten, so verhält sich die Menge der Materie direct wie die bewegenden Kräfte und die Quadrate der Zeiten, d. h. wie die Gewichte und die Quadrate der Schwingungszeiten. W. z. b. w.

Zusatz 1. Sind daher die Zeiten einander gleich, so verhalten sich die Mengen der Materie in beiden Körpern, wie die Gewichte.

Zusatz 2. Bei gleichen Gewichten verhalten sich die Mengen der Materie wie die Quadrate der Zeiten.

Zusatz 3. Ist die Menge der Materie in beiden Körpern gleich, so verhalten sich die Gewichte umgekehrt wie die Quadrate der Zeiten.

Zusatz 4. Da die Quadrate der Zeiten, unter übrigens gleichen Umständen, den Pendellängen proportional sind, so verhalten sich bei gleichen Zeiten und gleicher Menge der Materie die Gewichte wie die Pendellängen.

Zusatz 5. Allgemein ist die Menge der Materie des Pendels direct seinem Gewichte und dem Quadrate der Zeit und indirect der Pendellänge proportional.[151])

Zusatz 6. In einem nicht widerstehenden Mittel verhält sich die Menge der Materie des Pendels direct wie sein relatives Gewicht und das Quadrat der Zeit, und indirect wie die Pendellänge. Denn das relative Gewicht ist in jedem schweren Mittel die bewegende Kraft, wie ich oben erklärt habe; es leistet daher in einem solchen nicht widerstehenden Mittel dasselbe, was das absolute Gewicht im leeren Raume bewirkt.

Zusatz 7. Hieraus ergiebt sich ein Verfahren, sowohl die Körper in Bezug auf die Menge ihrer Materie mit einander zu vergleichen, als auch den Unterschied des Gewichtes eines und desselben Körpers an verschiedenen Orten zu bestimmen und so die Aenderung der Schwere zu finden. Durch die schärfsten Versuche habe ich stets gefunden, dass die Menge der Materie in einzelnen Körpern ihrem Gewichte proportional ist.

§. 35. Lehrsatz. Pendel, welche in einem beliebigen Mittel einen Widerstand erleiden, der den Zeitmomenten proportional ist und sich in einem nicht widerstehenden Mittel von demselben specifischen

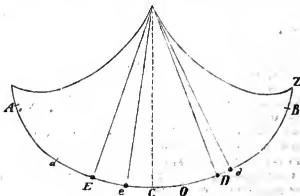


Fig. 169.

Gewichte bewegen, vollenden ihre Schwingungen auf einer Cycloïde in derselben Zeit und beschreiben zugleich proportionale Theile der Bogen.

Es sei AB der Bogen einer Cycloïde, welchen der Körper D, in beliebiger Zeit und im nicht widerstehenden Mittel schwingend, beschreibt.

Man halbire denselben in C, so dass C der tiefste Punkt sei; alsdann verhält sich die beschleunigende Kraft, welche den Körper in jedem beliebigen Orte D, d oder E antreibt, wie die Bogenlängen CD, Cd oder CE. Man drücke jene Kraft respective durch dieselben Bogen aus, und da der Widerstand dem Momente (Differentiale) der Zeit proportional, also constant ist, bezeichne man denselben durch den gegebenen Theil CO des cycloïdischen Bogens, und bestimme den Bogen Od durch die Proportion Od : CD = OB : CB.

Die Kraft, welche im widerstehenden Mittel den Körper im Punkte d antreibt, wird ausgedrückt durch den Ueberschuss der Kraft Cd über den Widerstand CO, d. h. durch den Bogen Od, und sie verhält sich daher zu derjenigen Kraft, welche den Körper D im nicht widerstehenden Mittel im Punkte D antreibt, wie

Od : CD

und im Orte B wie OB : BB.

Gehen nun zwei Körper D und d vom Orte B aus, und werden sie durch diese Kräfte angetrieben, so verhalten sich die letztern im Anfange wie CB : OB,

und in demselben Verhältnisse werden ihre ersten Geschwindigkeiten und die anfänglich beschriebenen Bogen stehen. Es seien BD und Bd diese Bogen, und es werden die noch übrigen Bogen CD und Od in demselben Verhältniss stehen. Die den Bogen CD und Od proportionalen Kräfte bleiben ferner in demselhen Verhältniss wie beim Anfange, und daher fahren die Körper fort, zugleich in demselben Verhältniss Bogen zu beschreiben. Es verhalten sich demnach die Kräfte, die Geschwindigkeiten und die noch übrigen Bogen CD und Od stets wie die ganzen Bogen CB und OB und es werden daher die übrigen Bogen zugleich beschrieben. Die beiden Körper D und d gelangen also zugleich nach den Orten C und O, jedoch der erstere im nicht widerstehenden, der andere im widerstehenden Mittel. Da nun aber die Geschwindigkeiten in C und O den Bogen CB und OB proportional sind, so stehen die Bogen, welche die Körper weitergehend zugleich beschreiben, in demselben Verhältniss. Dieselben seien CE und Oe. Die Kraft, durch welche der Körper D im nicht widerstehenden Mittel in E verzögert wird, ist CE proportional, und diejenige Kraft, welche den Körper d im widerstehenden Mittel im Punkte e verzögert, ist der Summe der Kraft Ce und des Widerstandes CO, d. h. Oe proportional. Die Kräfte, welche die Körper verzögern, verhalten sich demnach wie CE : Oe,

d. h. wie CB : OB,

und die in demselben Verhältniss verzögerten Geschwindigkeiten werden auch darin bleiben.

Die Geschwindigkeiten und die mit ihnen beschriebenen Bogen stehen daher stets zu einander in dem constanten Verhältniss

CB : OB

und nimmt man daher die ganzen Bogen AB und aB in demselben Ver-

hältniss, so beschreiben die Körper D und d dieselben zugleich und verlieren auch zugleich ihre ganze Bewegung in A und a. Die ganzen Schwingungen sind daher isochronisch, und die beliebigen Theile BD und Bd oder BE und Be, welche gleichzeitig beschrieben werden, sind den ganzen Bogen BA und Ba proportional. W. z. h. w.

Zusatz. Die grösste Geschwindigkeit im widerstehenden Mittel fällt daher nicht in den untersten Punkt C, sondern findet sich in jenem Punkte O, durch welchen der ganze beschriebene Bogen aB halbirt wird. Geht der Körper weiter nach a zu, so wird er in demselben Grade verzögert, in welchem er vorher bei seinem Falle von B nach O beschleunigt wurde.

§. 36. Lehrsatz. Die Wendeschwingungen in einer Cycloïde, bei denen ein der Geschwindigkeit proportionaler Widerstand stattfindet, sind isochronisch. Fig. 169.

Beschreiben nämlich zwei gleich weit vom Aufhängepunkte entfernte Körper, indem sie schwingen, ungleiche Bogen, und sind die Geschwindigkeiten in den correspondirenden Theilen derselben den ganzen Bogen proportional; so verhalten sich die, den Geschwindigkeiten proportionalen Widerstände ebenfalls wie die ganzen Bogen. Wenn man nun diese Widerstände von den, aus der Schwere entspringenden und denselben Bogen proportionalen, bewegenden Kräften subtrahirt oder erstere zu letzteren addirt; so stehen die Unterschiede oder Summen zu einander in demselben Verhältniss wie die Bogen. Da die Incremente oder Decremente diesen Unterschieden oder Summen proportional sind, verhalten sich die Geschwindigkeiten immer wie die ganzen Bogen.

Die Geschwindigkeiten werden nun, wenn sie in irgend einem Falle den ganzen Bogen proportional sind, immer in demselben Verhältniss bleiben. Im Anfange der Bewegung aber, wenn die Körper herabzusteigen beginnen und jene Bogen beschreiben wollen, erzeugen die, den Bogen selbst proportionalen Kräfte, Geschwindigkeiten, welche in demselben Verhältniss stehen.. Diese verhalten sich also immer wie die ganzen zu beschreibenden Bogen, und die letzteren werden daher gleichzeitig beschrieben. W. z. b. w.

§. 37. Lehrsatz. Erleiden Pendel einen Widerstand, welcher im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit steht; so sind die Unterschiede der Schwingungszeiten im widerstehenden Mittel und der Zeiten in einem nicht widerstehenden Mittel von demselben specifischen Gewichte sehr nahe den zu beschreibenden Schwingungsbogen proportional. Fig. 169. Es mögen gleiche Pendel im widerstehenden Mittel ungleiche Bogen A und B beschreiben, alsdann steht der Widerstand des Körpers im Bogen A zum Widerstande im correspondirenden Theile des Bogens B im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeiten, d. h. sehr nahe in dem Verhältnisse $A^2 : B^2$.

Verhielte sich nun der Widerstand im Bogen B zu dem in A stattfindenden, wie $AB : A^2$,

so würden nach dem vorigen Paragraphen die Zeiten in den Bogen A und B einander gleich sein. Der Widerstand A^2 in A, oder der Widerstand AB in B bewirkt also im Bogen A den Ueberschuss der im widerstehenden Mittel erforderlichen Zeit über die im nicht widerstehenden Mittel erforderliche, und der Widerstand B^2 bewirkt im Bogen B den Ueberschuss der im widerstehenden Mittel erforderlichen Zeit über die im nicht widerstehenden Mittel erforderliche Zeit. Jener Ueberschuss ist aber sehr nahe den bewirkenden Kräften AB und B^2 proportional, d. h. die Zeitunterschiede verhalten sich, wie sehr nahe

A : B. W. z. b. w.

Zusatz 1. Hiernach kann man aus den Zeiten der Schwingungen, welche im widerstehenden Mittel bei ungleichen Bogen stattfinden, die Schwingungszeiten in einem nicht widerstehenden Mittel von demselben specifischem Gewicht erkennen. Der Unterschied der Zeiten beider verhält sich nämlich zum Ueberschuss der Zeit des kleinern Bogens im widerstehenden Mittel, über die im nicht widerstehenden Mittel, wie der Unterschied der Bogen zum kleinern von beiden.

Zusatz 2. Kleinere Schwingungen sind im höhern Grade isochronisch, und äusserst kleine werden nahezu in derselben Zeit zurückgelegt, als im nicht widerstehenden Mittel. Die Zeiten der in grössern Bogen stattfindenden Schwingungen sind etwas grösser, weil der Widerstand beim Herabsteigen des Körpers, wodurch die Zeit verlängert wird, grösser ist im Verhältniss der beschriebenen Länge, als der Widerstand beim folgenden Aufsteigen, wodurch die Zeit verkürzt wird. Die Zeit der Schwingungen aber, sowohl der kurzen als langen, scheint auch etwas durch die Bewegung des Mittels verlängert zu werden. Körper, welche verzögert werden, erleiden nach Verhältniss der Geschwindigkeit einen etwas kleinern, beschleunigte Körper hingegen einen etwas grössern Widerstand, als solche Körper, welche sich gleichförmig bewegen. Dies rührt daher, dass das Mittel, vermöge der von den Körpern erhaltenen Bewegung, nach derselben Richtung fortschreitet und im erstern Falle mehr, im andern weniger angetrieben wird und deshalb mehr oder weniger mit den sich bewegenden Körpern übereinstimmt. Der Widerstand des Pendels ist daher grösser beim Absteigen als beim Aufsteigen, und zwar nach Verhältniss der Geschwindigkeit; beide Ursachen verlängern die Dauer.

§. 38. Lehrsatz. Fig. 169. Erleidet ein in einer Cycloïde schwingendes Pendel einen den Zeitmomenten proportionalen Widerstand, so verhält sich der letztere zur Schwerkraft, wie der Ueberschuss des beim ganzen Fallen beschriebenen Bogens über den beim nächstfolgenden Steigen beschriebenen zur doppelten Länge des Pendels.

Unter Voraussetzung der Construction und des Beweises zu §. 35. bezeichne BC den beim Fallen, Ca den beim Steigen beschriebenen Bogen und Aa den Unterschied beider. Alsdann verhält sich die Kraft,

durch welche der Körper im beliebigen Orte D angetrieben wird, zur Kraft des Widerstandes wie CD : CO,
wo CO = $^1/_2$Aa ist. Daher verhält sich die Kraft, welche den Körper im Anfangspunkte der Cycloïde antreibt, d. h. die Schwerkraft zum Widerstande, wie der Bogen der Cycloïde zwischen jenem höchsten und dem niedrigsten Punkte zum Bogen CO, oder (wenn man beide Bogen verdoppelt) wie der Bogen der ganzen Cycloïde, d. h. die doppelte Pendellänge zum Bogen Aa. W. z. b. w.

§. 39. Aufgabe. Vorausgesetzt wird, dass ein in einer Cycloïde schwingender Körper einen dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand erleide; man soll den Widerstand in den einzelnen Orten bestimmen.

Es sei Ba (Figur 169.) der in einer ganzen Schwingung beschriebene Bogen, C der unterste Punkt der Cycloïde und CZ die Hälfte des ganzen cycloïdischen Bogens, also der Pendellänge gleich; man sucht den Widerstand, welchen der Körper am beliebigen Orte D erleidet.

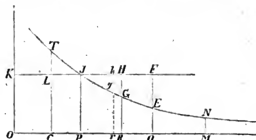


Fig. 170.

Man schneide die unbestimmte gerade Linie OQ in den Punkten O, C, P, Q, so dass (wenn man die Perpendikel OK, CT, PJ, QE, errichtet, und zum Mittelpunkte O und den Asymptoten OK und OQ die Hyperbel TJGE construirt, welche die Perpendikel CT, PJ und QE in den Punkten T, J und E schneidet, hierauf durch den Punkt J die Linie KF ∓ OQ zieht, welche die Asymptote OK in K und die Perpendikel CT und QE in L und F schneidet) alsdann

Fläche JEF : PJTC = Bogen BC : Ca

werde, wo BC den beim Herabsteigen, Ca den beim Aufsteigen beschriebenen Bogen bezeichnet. Ferner sei

1. Fläche JEF : JLT = OQ : OC,

und es werde das Perpendikel MN so errichtet, dass

2. Fläche PJNM : PJEQ = Bogen CZ : BC.

Errichtet man endlich das Perpendikel RG dergestalt, dass

3. Fläche PJGR : PJEQ = Bogen CD : BC;

so verhält sich der Widerstand im Orte D zur Schwerkraft, wie

4. Fläche $\frac{OR}{OQ}$. JEF — JGH : PJNM.

Die aus der Schwere entspringenden Kräfte, durch welche der Körper in den Punkten Z, B, D, a angetrieben wird, sind nämlich bezüglich den Bogen ZC, BC, DC, aC,
und diese wieder den hyperbolischen Flächen

PJNM, PJEQ, PJGR, PJTC

proportional; man kann daher sowohl die Bogen, als auch die Kräfte durch diese Flächen ausdrücken. Ferner sei Dd ein sehr kleiner, vom fallenden Körper beschriebener Bogen, und man drücke denselben durch die ebenfalls sehr kleine Fläche RGgr aus, welche zwischen den Parallelen GR und gr liegt. Endlich verlängere man rg bis h, so dass GHhg und RGgr die gleichzeitigen Decremente von JGH und PJGR werden. Das Increment der Fläche

$$\frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH \text{ ist } = \frac{OR - rR}{OQ} \cdot JEF - [JGH - GHhg]$$

$$- \left[\frac{OR}{OQ} JEF - JGH\right]$$

$$= GHhg - \frac{rR}{OQ} \cdot JEF$$

5. $$= Rr \cdot GH - \frac{rR}{OQ} \cdot JEF.$$

Das gleichzeitige Decrement der Fläche

6. PJGR ist = Rr · RG;

daher verhält sich ersteres Increment zum letztern Decrement, wie

$$GH - \frac{JEF}{OQ} : RG = OR \cdot GH - \frac{OR}{OQ} \cdot JEF : OR \cdot RG$$

$$= OR \cdot GH - \frac{OR}{OQ} \cdot JEF : OP \cdot PJ,$$

d. h. (weil OR · HG = OR (HR — GR)
= OR · HR — OR · GR
OR · HG = ORHK — OPJK = PJHR,
und PJHR = PJGR + JGH)

wie 7. $$PJGR + JGH - \frac{OR}{OQ} \cdot JEF : OPJK.$$

Setzt man demnach die Fläche

$$\frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH = Y,$$

und ist das Decrement RGgr der Fläche PJGR gegeben; so wird das Increment der Fläche Y proportional

8. PJGR — Y.

Bezeichnet nun V die, aus der Schwere entspringende und dem zu beschreibenden Bogen CD proportionale Kraft, welche den Körper in D antreibt, und wird der Widerstand = R gesetzt; so ist

V — R

die ganze Kraft, durch welche der Körper in D fortgetrieben wird. Das Increment der Geschwindigkeit verhält sich daher, wie V — R und jenes

Zeittheilchen, in welchem es entstanden ist, zusammengesetzt; aber auch die Geschwindigkeit selbst verhält sich direct, wie das gleichzeitige Jncrement des Weges und indirect wie jenes Zeittheilchen. Der Widerstand R ist nun (nach der Voraussetzung) dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional, und das Increment des Widerstandes verhält sich daher (nach §. 10) wie die Geschwindigkeit und ihr Increment zusammengesetzt,[152]) d. h. wie der in einem gegebenen Zeittheilchen beschriebene Moment des Weges und V — R zusammengesetzt. Ist das Differential des Weges constant, so verhält sich also das Increment des Widerstandes, wie V — R, d. h. indem man statt V die sie bezeichnende Fläche PJGR setzt, und den Widerstand R durch eine beliebige andere Fläche Z ausdrückt, es wird das Increment des Widerstandes proportional

9. PJGR — Z.

Nimmt nun die Fläche PJGR durch Substraction constanter Momente gleichförmig ab, so wächst die Fläche Y in dem Verhältniss

PJGR — Y (nach 8.)

und die Fläche Z in dem PJGR — Z.

Entstehen daher die Flächen Y und Z zugleich, und sind sie im Anfange einander gleich, so werden sie durch Addition gleicher Momente fortwährend einander gleich bleiben, und eben so werden sie, indem sie um gleiche Momente abnehmen, gleichzeitig verschwinden. Umgekehrt, wenn sie gleichzeitig entstehen und verschwinden, so werden sie gleiche Momente haben und immer einander gleich bleiben.

Wenn nämlich der Widerstand Z wächst, so nimmt die Geschwindigkeit zugleich mit jenem Bogen Ca, welcher beim Aufsteigen des Körpers beschrieben wird, ab und wenn der Punkt, in welchem alle Bewegung zugleich mit dem Widerstande aufhört, näher nach C rückt; so wird der Widerstand schneller verschwinden, als die Fläche Y. Das Gegentheil geschieht, wenn der Widerstand kleiner wird.

Die Fläche Z entsteht nun aber und verschwindet, wenn der Widerstand gleich Null ist, d. h. beim Anfang und Ende der Bewegung, wenn der Bogen CD gleich CB und Ca wird, und die gerade Linie RG daher auf QE und CT fällt.

Die Fläche $Y = \frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH$

entsteht und verschwindet, wenn sie $= 0$ ist, d. h. wenn

$$\frac{OR}{OQ} \cdot JEF = JGH,$$

oder (nach der Construction) wenn RG auf QE oder CT fällt.[153]) Beide Flächen entstehen und verschwinden daher zugleich, und sind daher stets einander gleich. Es ist also

$$\frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH = Z,$$

und weil Z den Widerstand und PJNM die Schwere bezeichnet, verhält sich

$$\text{Fläche } \frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH : \text{zur Fläche } PJNM$$

wie der Widerstand zur Schwerkraft. W. z. b. w.

Zusatz 1. Im untersten Punkte C verhält sich daher der Widerstand zur Schwere, wie $\frac{OP}{OQ} \cdot JEF : PJNM$.

Zusatz 2. Der Widerstand wird am grössten, wenn

$$PJHR : JEF = OR : OQ.$$

In diesem Falle wird nämlich sein Moment (d. h. PJGR — Y) = 0.[154])

Zusatz 3. Hieraus ergiebt sich auch die Geschwindigkeit an den einzelnen Orten, indem dieselbe im halben Verhältniss des Widerstandes steht und beim Anfange der Bewegung der Geschwindigkeit eines Körpers gleich ist, welcher in derselben Cycloïde ohne allen Widerstand schwingt.

Wegen der schwierigen Rechnung, durch welche nach diesem Paragraphen der Widerstand und die Geschwindigkeit gefunden werden, erschien es zweckmässig, den folgenden Lehrsatz hinzuzufügen.

§. 40. Lehrsatz. Die Linie aB sei dem cycloïdischen Bogen gleich, welchen der schwingende Körper beschreibt, und in ihren einzelnen Punkten D werden Perpendikel DK errichtet, welche sich zur Länge des Pendels verhalten, wie der Widerstand, welchen der Körper in den entsprechenden Punkten des Bogens erleidet, zur Schwere. Alsdann ist der Unterschied der, während des ganzen Steigens und Fallens beschriebenen Wege, multiplicirt in ihre halbe Summe, sehr nahe gleich der Fläche BK, welche alle Perpendikel DK umfasst.

Es werde der, in einer ganzen Schwingung beschriebene, cycloïdische Bogen durch die ihm gleiche gerade Linie aB und der Bogen, welcher im leeren Raume beschrieben werden würde, durch die Linie AB ausgedrückt. Man halbire AB in C, alsdann bezeichnet C den

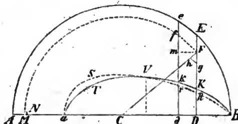


Fig. 171.

untersten Punkt der Cycloïde und es ist CD der aus der Schwere entspringenden Kraft proportional, durch welche der Körper in D längs der Tangente der Cycloïde angetrieben wird. Diese Linie hat dasselbe Verhältniss zur Länge des Pendels, welches die Kraft in D zur Schwere

hat. Man bezeichne daher diese Kraft durch die Linie CD und die Kraft der Schwere durch die Länge des Pendels. Nimmt man nun auf DE die Länge in dem Verhältniss zur Pendellänge, welches der Widerstand zur Schwere hat, so wird DK den erstern ausdrücken. Zum Mittelpunkt C und mit dem Radius CA = CB construire man den Halbkreis BEeA.

Der Körper wird in einer sehr kurzen Zeit den Weg Dd beschreiben, und errichtet man die Perpendikel DE und de, welche die Peripherie in E und e schneiden; so sind dieselben den Geschwindigkeiten proportional. welche der Körper beim Herabsteigen vom Punkt B im leeren Raume in den Punkten D und d erlangen würde. Dies erhellt aus §. 93. des ersten Buches. Man drücke daher diese Geschwindigkeiten durch jene Perpendikel aus, und es sei DF diejenige Geschwindigkeit, welche der Körper bei seinem Falle von B im widerstehenden Mittel, im Punkt D erlangen würde. Construirt man nun aus C als Mittelpunkt mit dem Radius CF den Kreis FfM, welcher die geraden Linien de und AB in f und M schneidet; so ist M der Ort, zu welchem hierauf der Körper ohne allen weitern Widerstand aufsteigen würde und df die Geschwindigkeit, welche er im Punkt d erlangen würde. Bezeichnet daher ferner Fg das Moment der Geschwindigkeit, welches der Körper, während er den sehr kleinen Weg Dd zurücklegt, durch den Widerstand des Mittels verliert und nimmt man CN = Cg
an; so ist N der Ort, zu welchem der Körper hierauf ohne allen fernern Widerstand aufsteigen würde, so wie MN das Decrement des Aufsteigens, welches aus jenem Verluste der Geschwindigkeit entspringen wird.

Auf df fälle man das Perpendikel Fm, alsdann verhält sich das Decrement Fg der Geschwindigkeit DF, welches durch den Widerstand DK erzeugt wird, zum Increment fm derselben Geschwindigkeit, welches aus der Kraft CD entspringt, wie die erzeugenden Kräfte selbst. Wir haben also 1. $Fg : fm = DK : CD$.

Da nun $\triangle Fmf \sim Fhg \sim FDC$, haben wir aber

2. $Fm : Fm = CD : DF$,

also durch Zusammensetzung und weil $Fm = Dd$ ist,

3. $Fg : Dd = DK : DF$.

Ferner ist 4. $Fg : Fh = CF : DF$,

also weil $Fh = MN$ und $CM = CF$,

5. Die Summe $MN \cdot CM =$ der Summe aller $Dd \cdot DK$.

An dem beweglichen Punkte M denke man sich immer eine rechtwinklige Ordinate = MC errichtet, welche in stetiger Bewegung über die ganze Länge Aa geführt wird; alsdann wird das durch diese Bewegung entstehende Trapez oder das ihm gleiche Rechteck $Aa \cdot \frac{1}{2}aB$ gleich der Summe aller $MN \cdot CM$ und daher gleich der Summen aller $Dd \cdot DK$, d. h. gleich der Fläche BKVTa.[304]) W. z. b. w.

Zusatz. Hiernach kann man aus dem Gesetze des Widerstandes

und dem Unterschiede der Bogen $Aa = CB - Ca$ sehr nahe das Verhältniss des Widerstandes zur Schwere finden.

Wäre der Widerstand DK etwa gleichförmig, so würde die Figur BKTa ein Rechteck unter Ba und DK. also

$$\frac{1}{2}Ba \cdot Aa = Ba \cdot DK$$

oder

$$\frac{1}{2}Aa = DK$$

sein. Da nun DK den Widerstand und die Länge des Pendels die Schwerkraft ausdrückt, so verhält sich der Widerstand zur Schwere, wie $\frac{1}{2}Aa$ zur Pendellänge; ganz wie im §. 38. bewiesen worden ist.

Ist der Widerstand der Geschwindigkeit proportional, so wird die Figur BKTa sehr nahe eine Ellipse. Wenn nämlich der Körper im nicht widerstehenden Mittel während einer ganzen Schwingung die Länge BA beschriebe, so würde die Geschwindigkeit im beliebigen Orte D der Ordinate DE proportional sein, welche zu dem über AB als Durchmesser beschriebenen Kreise gehört. Da ferner Ba im widerstehenden, und BA im nicht widerstehenden Mittel ungefähr in gleichen Zeiten beschrieben werden; da also die Geschwindigkeiten in den einzelnen Punkten von Ba sich sehr nahe zu den Geschwindigkeiten in den entsprechenden Punkten von BA verhalten, wie $Ba : BA$:
so ist die Geschwindigkeit in D und im widerstehenden Mittel der Ordinate des Kreises oder der Ellipse, welche über BA als Durchmesser construirt ist, proportional.[156] Die Figur BKVTa ist daher sehr nahe eine halbe Ellipse. Da der Widerstand als der Geschwindigkeit proportional vorausgesetzt wird, so drücke OV den erstern im mittlern Punkte O aus, und es wird die halbe Ellipse BRVSa, welche man zu O als Mittelpunkt, und zu OB und OV als halben Axen beschreibt, sehr nahe der Figur aBKVT und dem ihr gleichen Rechtek $Aa \cdot BO$ gleich. Es verhält sich daher $Aa \cdot BO$ zu $OV \cdot BO$, wie die Fläche dieser halben Ellipse zu $OV \cdot BO$, d. h. beiläufig.

$$Aa : OV = 11 : 7.$$[157]

Es verhält sich daher $\frac{7}{11}Aa$ zur Pendellänge, wie der Widerstand des schwingenden Körpers in O zur Schwerkraft.[158]

Steht der Widerstand DK im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit, so wird die Figur BKVTa sehr nahe eine Parabel, deren Scheitel in V liegt und deren Axe OV ist;[159] es wird also

$$BKVTa = \frac{2}{3}Ba \cdot OV.$$

Demnach ist

$$\frac{1}{2}Ba \cdot Aa = \frac{2}{3}Ba \cdot OV$$

oder

$$OV = \frac{3}{4}Aa$$

und der Widerstand des schwingenden Körpers im Punkt O zur Schwerkraft, wie $\frac{3}{4}Aa$ zur Pendellänge.

Ich halte diese Schlüsse für hinreichend genau in der Praxis. Denn da die Ellipse oder Parabel im mittlern Punkte V mit der Figur BKVTa zusammentrifft, so wird diese, wenn sie an der einen von beiden Seiten BRV oder VSa jene überschreitet, auf der andern Seite von jener übertroffen und so derselben sehr nahe gleich werden.

§. 41. Lehrsatz. Wird der Widerstand eines schwingenden Körpers in den einzelnen proportionalen Theilen der beschriebenen Bogen in einem gegebenen Verhältniss vergrössert oder verkleinert, so wird der Unterschied der beim Fallen und nächstfolgenden Steigen beschriebenen Bogen sehr nahe in demselben Verhältniss vergrössert oder verkleinert.

Es entspringt nämlich jener Unterschied aus der Verzögerung des Pendels durch den Widerstand des Mittels, und verhält sich daher wie die ganze Verzögerung und der ihr proportionale verzögernde Widerstand. Im vorhergehenden Paragraphen (Fig. § 40.) war das Rechteck unter $^1/_2$aB und dem Unterschied Aa jener Bogen CB und Ca gleich der Fläche BKTa. Die letztere nimmt, wenn die Länge aB unverändert bleibt, zu oder ab im Verhältniss der Ordinate DK, d. h. im Verhältniss des Widerstandes; sie ist daher der Länge aB und dem Widerstande zusammengesetzt proportional. Daher verhält sich das Rechteck

$$Aa \cdot {}^1/_2 aB$$

wie aB und der Widerstand zusammengesetzt und so Aa wie der Widerstand. W. z. b. w.

Zusatz 1. Verhält sich daher der Widerstand wie die Geschwindigkeit, so ist der Unterschied der Bogen in demselben Mittel dem ganzen beschriebenen Bogen proportional, und umgekehrt.

Zusatz 2. Steht der Widerstand im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit, so ist jener Unterschied dem Quadrat des ganzen beschriebenen Bogens proportional, und umgekehrt.

Zusatz 3. Allgemein, steht der Widerstand im dreifachen, oder einem andern beliebigen Verhältniss der Geschwindigkeit; so steht der Unterschied der beschriebenen Bogen in demselben Verhältniss des ganzen Bogens, und umgekehrt.

Zusatz 4. Steht der Widerstand zum Theil im einfachen, zum Theil im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit; so steht jener Unterschied der beschriebenen Bogen zum Theil im einfachen, zum Theil im doppelten Verhältniss des beschriebenen Bogens, und umgekehrt. Dasselbe Gesetz und Verhältniss, welches zwischen Widerstand und Geschwindigkeit stattfindet, gilt auch zwischen jenem Unterschiede und der ganzen Länge des Bogens.

Zusatz 5. Beschreibt daher ein Pendel nacheinander ungleiche Bogen, und kann man das Verhältniss des Incrementes und Decrementes dieses Unterschiedes zur Länge des beschriebenen Bogens finden, so hat man auch das Verhältniss des Incrementes oder Decrementes des Widerstandes zur grössern oder kleinern Geschwindigkeit.

§. 42. Allgemeine Anmerkung. Nach diesen Sätzen kann man durch Pendelschwingungen den Widerstand der Mittel finden; denjenigen, welchen die Luft ausübt, habe ich durch folgende Versuche ermittelt.

Eine hölzerne, $57^7/_{22}$ Unzen wiegende Kugel, welche $6^7/_8$ Zoll im Durchmesser hatte, hing ich mittelst eines dünnen Fadens an einen hin-

reichend festen Nagel auf, so dass zwischen diesem und dem Schwingungspunkte der Kugel ein Abstand von 10,5 Fuss stattfand. Am Faden bezeichnete ich einen Punkt in 10 Fuss 1 Zoll Entfernung vom Aufhängepunkte und brachte in der Richtung dieses Punktes ein in Zolle getheiltes Lineal an, mittelst dessen ich die Länge der vom Pendel beschriebenen Bogen erkennen konnte. Hierauf zählte ich die Schwingungen, in denen die Kugel $^1/_8$ ihrer Bewegung verlor.

Brachte man zuerst das Pendel in einen Abstand von 2 Zoll aus der vertikalen Richtung und liess es hierauf los, so dass es während seines ganzen Falles einen Bogen von 2 Zoll, und während der ganzen ersten, aus dem Falle und nächstfolgenden Steigen zusammengesetzten Schwingung einen Bogen von beinahe 4 Zoll beschrieb; so verlor es nach 164 Schwingungen $^1/_8$ seiner Bewegung, und beschrieb beim letzten Steigen einen Bogen von $1^3/_4$ Zoll.

Beschrieb es beim ersten Falle einen Bogen von 4 Zoll, so verlor es $^1/_8$ seiner Bewegung nach 121 Schwingungen, dergestalt dass es beim letzten Steigen einen Bogen von $3^1/_2$ Zoll beschrieb. Wenn es ferner beim ersten Falle der Reihe nach einen Bogen von

8, 16, 32, 64 Zoll

beschrieb, so verlor es $^1/_8$ seiner Bewegung bezüglich nach

$69,\ 35^1/_2,\ 18^1/_2,\ 9^2/_3$

Schwingungen. Der Unterschied zwischen den, beim ersten Falle und letzten Steigen beschriebenen Bogen, war daher im ersten, zweiten, dritten, vierten, fünften und sechsten Versuche respective

$^1/_4,\ ^1/_2,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8$ Zoll.

Dividirt man jeden dieser Unterschiede durch die Anzahl der ihm entsprechenden Schwingungen, so erhält man im Mittel bei Einer Schwingung, in welcher ein Bogen von

$3^3/_4,\ 7^1/_2,\ 15,\ 40,\ 60,\ 120$ Zoll

beschrieben wurde, für den Unterschied der, bei einem Falle und dem nächstfolgenden Steigen beschriebenen, Bogen respective die Zahlen:

$^1/_{656},\ ^1/_{242},\ ^1/_{69},\ ^4/_{71},\ ^8/_{37},\ ^{24}/_{29}$ Zoll.[160])

Diese stehen bei den grössern Schwingungen sehr nahe im doppelten Verhältniss der beschriebenen Bogen, bei den kleinern hingegen in einem etwas grössern, und daher steht (nach §. 41, Zusatz 2. dieses Buches) der Widerstand der Kugel, im Fall sie sich schneller bewegt, sehr nahe im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit; wenn die Bewegung langsamer erfolgt, in einem etwas grössern Verhältniss. Ganz wie in den Zusätzen zu §. 41. gezeigt worden ist.

Es bezeichne nun V die grösste Geschwindigkeit in jeder Schwingung, es seien A, B, C constante Grössen, und man setze den Unterschied der Bogen

$$1. \quad = A \cdot V + B \cdot V^{3/2} + CV^2.$$

Da die grössten Geschwindigkeiten in der Cycloïde sich wie die halben beim Schwingen beschriebenen Bogen, im Kreise aber wie die Sehnen

jener halben Bogen verhalten, und da sie bei gleichen Bogen grösser in der Cycloïde als im Kreise, und zwar im Verhältniss der halben Bogen zu ihren Sehnen sind; da die Zeiten aber im Kreise grösser sind, als in der Cycloïde im umgekehrten Verhältniss der Geschwindigkeiten: so müssen die, dem Widerstande und dem Quadrate der Zeit zusammengenommen proportionalen, Unterschiede der Bogen sehr nahe in beiden Curven dieselben sein. Jene Unterschiede müssen nämlich in der Cycloïde zugleich mit dem Widerstande vergrössert werden, ungefähr im doppelten Verhältniss des Bogens zur Sehne; weil die Geschwindigkeit in demselben einfachen Verhältniss zunimmt und zugleich mit dem Quadrate der Zeit in demselben doppelten Verhältniss vermindert werden. Um daher zur Cycloïde überzugehen, muss man dieselben Unterschiede der Bogen nehmen, welche am Kreise beobachtet worden sind, die grössten Geschwindigkeiten aber den ganzen oder den halben Bogen, d. h. den Zahlen $^1/_2$, 1, 2, 4, 8, 16 analog setzen.

Nehmen wir demnach im zweiten, vierten und sechsten Versuche für V respective die Zahlen 1, 4, 16 an, so erhalten wir für die gefundenen Unterschiede der Bogen die folgenden Gleichungen:

$$2.\quad \begin{cases} ^1/_{242} = A + B + C \\ ^4/_{71} = 4A + 8B + 16C \\ ^{24}/_{29} = 16A + 64B + 256C. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man durch gehörige Elimination

$$A = 0{,}0000916$$
$$B = 0{,}0010847$$
$$C = 0{,}0029558,$$

und der Unterschied der Bogen ist daher proportional:

$$3.\quad 0{,}0000916 \cdot V + 0{,}0010847 \cdot V^{3}/_{2} + 0{,}0029558 \cdot V^2.$$

Da nun nach §. 40, Zusatz der Widerstand der Kugel in der Mitte des beschriebenen Bogens, wo die Geschwindigkeit = V ist, sich zu ihrem Gewichte verhält, wie

$$4.\quad {}^7/_{11}A \cdot V + {}^7/_{10}B \cdot V^3/_2 + {}^3/_4C \cdot V^2$$ [161])

zur Länge des Pendels; so erhält man nach der Substitution obiger Werthe von A, B und C das Verhältniss des Widerstandes der Kugel zu ihrem Gewichte, wie

$$5.\quad 0{,}0000583 \cdot V + 0{,}0007593V^3/_2 + 0{,}0022169 \cdot V^2$$

zur Länge des Pendels zwischen dem Aufhängepunkte und dem Lineale, d. h. zu 121 Zoll.

Da nun im zweiten, vierten und sechsten Versuche

respective V = 1, 4, 16

war, so wird das Verhältniss des Widerstandes zum Gewichte der Kugel in diesen drei Fällen 0,0030345 : 121
0,0417780 : 121
0,6170544 : 121.

Der Bogen, welchen der am Faden bezeichnete Punkt im sechsten Falle beschrieben hat, war $120 - {}^{24}/_{29} = 119^5/_{29}$ Zoll.

Da nun der zugehörige Radius = 121 Zoll, und die Länge des Pendels zwischen dem Anfhängepunkt und dem Centrum der Kugel 126 Zoll betrug, so hat der Mittelpunkt der Kugel einen Bogen von $124^3/_{31}$ Zoll beschrieben.[162] Da ferner wegen des Widerstandes der Luft die grösste Geschwindigkeit des schwingenden Körpers nicht auf den untersten Punkt des beschriebenen Bogens trifft, sondern sich ungefähr in der Mitte des ganzen beschriebenen Bogens befindet; so wird dieselbe fast eben so gross sein, als wenn die Kugel bei ihrem Falle die Hälfte jenes Bogens, also $62^3/_{62}$ Zoll und zwar in einer Cycloïde, worauf wir die Bewegung des Pendels oben reducirt haben, beschrieben hätte. Jene Geschwindigkeit wird daher derjenigen gleich sein, welche eine perpendikulär fallende Kugel erlangen würde, wenn sie eine dem Sinus versus jenes Bogens gleiche Höhe beschriebe. Es verhält sich aber jener Sinus versus in der Cycloïde zum Bogen von $62^3/_{62}$ Zoll, wie dieser zur doppelten Pendellänge,[163] und daher ist der Sinus versus = 15,278 Zoll. Jene Geschwindigkeit ist demnach dieselbe, welche ein Körper beim Falle durch 15,278 Zoll erlangen würde. Bei einer solchen Geschwindigkeit erleidet also die Kugel einen Widerstand, welcher sich zu ihrem Gewichte verhält, wie 6. 0,6170544 : 121
oder (wenn man nur den Widerstand betrachtet, welcher im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit steht), wie

7. $0{,}0022165 \,.\, V^2 : 121 = 0{,}0022169 \,.\, 16^2 : 121 = 0{,}56752 : 121.$

Durch einen hydrostatischen Versuch habe ich aber gefunden, dass das Gewicht dieser hölzernen Kugel sich zu dem eines Wasserkörpers von derselben Grösse verhält, wie

8. 55 : 97

und $^{97}/_{55} \,.\, 121 = 213{,}4$; so wird der Wasserkörper bei seiner Bewegung mit der vorbezeichneten Geschwindigkeit einen Widerstand erleiden, welcher sich zu seinem Gewicht verhält, wie

9. $0{,}56752 : 213{,}4 = 1 : 376{,}02.$

Da nun das Gewicht der Wasserkugel in der Zeit, in welcher sie, gleichförmig sich fortbewegend, einen Weg von 30,556 Zoll beschreibt, jene ganze Geschwindigkeit in der fallenden Kugel erzeugen könnte; so wird offenbar die gleichförmig fortwirkende Kraft des Widerstandes eine im Verhältniss 1 : 376,02 kleinere Geschwindigkeit, d. h. $\frac{1}{376{,}02}$ der ganzen Geschwindigkeit aufheben können. Demnach wird die Kugel während der Zeit, wo sie mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegend, die Länge ihres Halbmessers = $3^7/_{16}$ Zoll zurücklegen könnte, $\frac{1}{3342}$ ihrer Bewegung verlieren.[164]

Ich zählte ferner die Schwingungen, nach denen das Pendel den vierten Theil seiner Bewegung verlor. In der folgenden Tabelle bezeichnen die oberen Zahlen die, in Zollen ausgedrückte, Länge des beim ersten Fallen beschriebenen Bogens, die folgenden die Länge des beim

letzten Steigen beschriebenen Bogens und die letzten Zahlen die Anzahl der Schwingungen. Diesen Versuch habe ich als genauer bezeichnet, wie denjenigen, bei welchem der achte Theil der Bewegung verloren ging. Die Rechnung mag jeder, dem es beliebt, versuchen.

Erstes Fallen	2	4	8	16	32	64
Letztes Steigen . . .	$^3/_2$	3	6	12	24	48
Zahl der Schwingungen	374	272	$162^1/_2$	$83^1/_3$	$41^2/_3$	$22^2/_3$.

Später hing ich eine Bleikugel von 2 Zoll im Durchmesser und $26^1/_4$ Unzen an Gewicht an demselben Faden auf, so dass zwischen dem Centrum der Kugel und dem Aufhängepunkt ein Zwischenraum von $10^1/_2$ Fuss stattfand und zählte die Schwingungen, in denen ein bestimmter Theil der Bewegung verloren ging. Von den folgenden Tabellen stellt die erste die Zahl der Schwingungen dar, in denen der achte, die zweite diejenige Zahl, wobei der vierte Theil der Bewegung verloren ging.

Erstes Fallen	1	2	4	8	16	32	64
Letztes Steigen . . .	$^7/_8$	$^7/_4$	$^7/_2$	7	14	28	56
Zahl der Schwingungen	226	228	193	140	$90^1/_2$	53	30

Erstes Fallen	1	2	4	8	16	32	64
Letztes Steigen . . .	$^3/_4$	$^3/_2$	3	6	12	24	48
Zahl der Schwingungen	510	518	420	318	204	121	70

Wählt man in der ersten Tabelle die dritte, fünfte und siebente Beobachtung und drückt die grössten Geschwindigkeiten bei denselben besonders durch die Zahlen 1, 4, 16 respective und allgemein durch V aus; so erhalten wir in Gl. 2

$$10. \quad \begin{cases} \frac{1/2}{193} = A + B + C \\ \frac{2}{90,5} = 4A + 8B + 16C \\ \frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich durch gehörige Elimination

$$A = 0,001414$$
$$B = 0,000297$$
$$C = 0,000879$$

Der Widerstand der, mit der Geschwindigkeit V sich bewegenden Kugel, verhält sich daher, wie in Gl. 4., zu ihrem Gewicht von $26^1/_4$ Unzen, wie

$$11. \quad 0,0009 \,.\, V + 0,000208\ V^{3/2} + 0,000659\ V^2$$

zur Pendellänge von 121 Zoll.

Ziehen wir nur den Theil des Widerstandes in Betracht, welcher im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit steht, so geht dieses Verhältniss über in

$$12. \quad 0,000659 \,.\, V^2 : 121.$$

Dieser Theil des Widerstandes verhielt sich beim ersten Versuche zum Gewichte der hölzernen Kugel von $57^7/_{22}$ Unzen (Gl. 7.) wie

$$0{,}002217 \,.\, V^2 : 121.$$

Bei gleicher Geschwindigkeit verhält sich daher der Widerstand der hölzernen Kugel zu dem der bleiernen, wie

$$0{,}002217 \,.\, 57^7/_{22} : 0{,}000659 \,.\, 26^1/_4,$$

d. h. wie 13. $7^1/_3 : 1$.

Die Durchmesser beider Kugeln betrugen $6^7/_8$ und 2 Zoll, deren Quadrate sich beiläufig verhalten wie

14. $47^1/_4 : 4$ oder wie $11^{13}/_{16} : 1$;

daher steht der Widerstand gleich schnell sich bewegender Körper in einem kleinern Verhältniss der Durchmesser, als dem doppelten.

Wir haben nun noch nicht den Widerstand des Fadens in Betracht gezogen, welcher gewiss sehr gross war und von dem gefundenen Widerstande der Pendel abgezogen werden muss. Genau habe ich ihn nicht bestimmen können, jedoch fand ich ihn grösser als $^1/_3$ des Widerstandes, welchen das kleinere Pendel erleidet. Hieraus nahm ich ab, dass der Widerstand der Pendel, nach Abzug des durch den Faden hervorgebrachten Theiles desselben, sehr nahe im doppelten Verhältniss der Durchmesser stehe, indem nämlich

15. $7^1/_3 - {}^1/_3 : 1 - {}^1/_3 = 7 : {}^2/_3 = 10{,}5 : 1$

welches Verhältniss dem unter 14. gefundenen doppelten der Durchmesser sehr nahe kommt.

Da der Widerstand des Fadens bei grösseren Kugeln von geringerem Belang ist, so machte ich auch einen Versuch mit einer Kugel von $18^3/_4$ Zoll im Durchmesser. Die Länge des Pendels zwischen dem Aufhänge- und dem Schwingungspunkte betrug $122^1/_2$ Zoll, die zwischen dem ersteren und dem Knoten am Faden $109^1/_2$ Zoll. Der beim ersten Fallen vom Knoten beschriebene Bogen betrug 32 Zoll, der beim letzten Steigen nach 5 Schwingungen[165]) beschriebene Bogen 60 und ihr Unterschied 4 Zoll. Der zehnte Theil des letzteren, oder der Unterschied der beim Fallen und Steigen in einer mittleren Schwingung beschriebenen Bogen betrug $^2/_5$ Zoll. Nun verhält sich der Radius

16. $109^1/_2 : 122^1/_2$,

wie der ganze mittlere, vom Knoten beschriebene Bogen 60 zum Bogen von $67^1/_8$ Zoll, welchen der Mittelpunkt der Kugel in einer mittleren Schwingung beschrieben hat. In demselben Verhältniss steht der Unterschied $^2/_5$ des ersteren, zu dem $= 0{,}4475$ des letzteren. Wird bei unveränderter Länge des Bogens die Pendellänge im Verhältniss

17. $126 : 122{,}5$

vergrössert, so wird die Schwingungszeit in jenem halben Verhältniss vergrössert und die Geschwindigkeit in demselben vermindert, und der Unterschied 0,4475 der beim Fallen und nächstfolgenden Steigen beschriebenen Bogen unverändert bleiben. Würde hierauf der beschriebene Bogen im Verhältniss

18. $124^{3}/_{31} : 67^{1}/_{8}$

vergrössert, so müsste der Unterschied 0,4475 in jenem doppelten Verhältniss wachsen und so in 1,5295 übergehen. Dies folgt aus der Voraussetzung, dass der Widerstand im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit stehe. Beschriebe also das Pendel den ganzen Bogen von $124^{3}/_{31}$ Zoll, und betrüge seine Länge zwischen dem Aufhänge- und Schwingungspunkt 126 Zoll, so würde der Unterschied der beim Fallen und nächstfolgenden Steigen beschriebenen Bogen 1,5295 Zoll betragen. Multiplicirt man diesen Unterschied in das Gewicht der Kugel, welches 208 Unzen betrug, so ergibt sich das Produkt 318,136. Als ferner das frühere, aus einer hölzernen Kugel construirte Pendel, bei einer Entfernung von 126 Zoll zwischen dem Aufhänge- und dem Schwingungspunkte, den ganzen Bogen von $124^{3}/_{31}$ Zoll (Gl. 18.) beschrieb, war der Unterschied der beim Fallen und Steigen beschriebenen Bogen $\frac{126}{121} \cdot \frac{8}{9^{2}/_{3}}$ und multiplicirt man diesen in das Gewicht der Kugel von $57,^{7}/_{22}$ Unzen; so ergiebt sich das Produkt 49,396. Ich habe diese Unterschiede in die Gewichte der Kugeln multiplicirt, um den Widerstand der letzteren zu finden. Die Unterschiede entspringen nämlich aus den Widerständen und verhalten sich direct wie diese und indirect wie die Gewichte. Demnach verhalten sich die Widerstände beider Kugeln, wie die Zahlen

19. 318,136 : 49,396.

Der Theil vom Widerstande der kleineren Kugel, welcher im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit steht, verhält sich zum ganzen Widerstande (Gl. 6. und 7.) wie 0,56752 : 0,61705 = x : 49,396, wonach

20. x = 45,430.

Der Theil des Widerstandes der grösseren Kugel ist nahezu dem ganzen Widerstande gleich, daher verhalten sich jene Theile nahezu wie

21. 318,136 : 45,430, d. h. wie 7 : 1.

Die Durchmesser der Kugeln verhalten wie $18^{3}/_{4} : 6^{7}/_{8}$, ihre Quadrate wie 22. 7,438 : 1,
d. h. sehr nahe wie die Widerstände beider Kugeln.

Der Unterschied dieser beiden Verhältnisse ist nicht grösser, als er aus dem Widerstande des Fadens entspringen konnte. Daher verhalten sich jene Theile der Widerstände, welche bei gleichen Kugeln dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sind, auch bei gleichen Geschwindigkeiten, wie die Quadrate der Kugel-Durchmesser.

Uebrigens war die grösste der bei diesen Versuchen angewandten Kugeln nicht vollkommen sphärisch geformt, und daher habe ich bei der hier aufgeführten Rechnung einige Kleinigkeiten der Kürze wegen vernachlässigt; ich kümmerte mich nämlich nicht um eine genaue Rechnung bei nicht hinreichend genauen Versuchen. Ich wünschte daher wohl, dass man Versuche mit mehreren und grösseren Kugeln, und auf genauere Weise anstellen möchte.

Nimmt man die Durchmesser der Kugeln in geometrischer Pro-

gression, nämlich 4, 8, 16, 32 Zoll, so kann man aus der Progression der, aus den Versuchen sich ergebenden, Resultate schliessen, was bei noch grösseren Kugeln erfolgen müsse.

Ich stellte hierauf folgende Versuche an, um den Widerstand verschiedener Flüssigkeiten unter sich zu vergleichen. Ich verfertigte einen hölzernen 4 Fuss langen und 1 Fuss breiten und hohen Kasten. Nachdem sein Deckel fortgenommen war, füllte ich ihn mit Quellwasser an und bewirkte, dass die darin eingetauchten Pendel sich in der Mitte des Wassers schwingend bewegten. Eine Bleikugel, welche $166^1/_6$ Unzen schwer war und $3^3/_8$ Zoll im Durchmesser hatte, bewegte sich so, wie die folgende Tabelle es angibt, wobei die Länge des Pendels zwischen dem Aufhänge- und einem am Faden bezeichneten Punkte 126, zwischen dem ersteren und dem Schwingungspunkte $134^3/_8$ Zoll betrug.

Bogen, durch den am Faden bezeichneten Punkt beim ersten Fallen beschrieben	64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, $^1/_2$, $^1/_4$ Zoll.
Bogen, beim letzten Steigen beschrieben	48, 24, 12, 6, 3, $^3/_2$, $^3/_4$, $^3/_8$, $^3/_{16}$ Zoll.
Unterschied beider Bogen, der verlorenen Bewegung proportional	16, 8, 4, 2, 1, $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$ Zoll.
Anzahl der Schwingungen im Wasser	$^{29}/_{60}$, $1^1/_5$, 3, 7, $11^1/_4$, $12^2/_3$, $13^1/_3$ Zoll.
Anzahl der Schwingungen in der Luft	$85^1/_2$, 287, 535 Zoll.

In dem Versuche der vierten Columne wurden gleiche Bewegungen in der Luft nach 535, im Wasser nach $1^1/_5$ Schwingungen verloren; die ersteren erfolgten aber etwas schneller, als die letzteren. Wenn daher diese Schwingungen in dem Verhältniss beschleunigt würden, dass die Pendelbewegung in beiden Mitteln gleich schnell erfolgte; so würde die Zahl $1^1/_5$ der Schwingungen im Wasser, nach denen dieselbe Bewegung wie vorhin verloren ginge (weil der Widerstand in jenem doppelten Verhältniss wächst und die Zeit in demselben einfachen Verhältniss abnimmt) unverändert bleiben.

Bei gleicher Geschwindigkeit der Pendel würden daher gleiche Bewegungen in der Luft nach 535, im Wasser nach $1^1/_5$ Schwingungen verloren gehen, und es verhält sich daher der Widerstand des Pendels im Wasser zu dem in der Luft, wie

$$22. \quad 535 : 1^1/_5.$$

Dies ist das Verhältniss der ganzen Widerstände für die Angaben der vierten Columne.

Es bezeichnen nun (Gl. 1.)

$$23. \quad AV + CV^2$$

den Unterschied der Bogen, welche eine mit der grössten Geschwindigkeit V sich in der Luft bewegende Kugel beim Fallen und nächstfolgenden Steigen beschreibt. Da die grösste Geschwindigkeit in der vierten Columne sich zu der in der ersten Columne verhält, wie 1 : 8, und der Unterschied der Bogen für dieselben Versuche sich verhält, wie

$\frac{2}{535} : \frac{16}{85,5} = 85,5 : 4280$; so setzen wir in beiden Fällen respective 1 und 8 für die Geschwindigkeiten, so wie 85,5 und 4280 für die Unterschiede der Bogen, und erhalten so nach 23., zur Bestimmung von A und C die Gleichungen:

$$24. \quad \begin{cases} A + C = 85{,}5, \\ 8A + 64C = 4280. \end{cases}$$

Aus ihnen ergibt sich: $A = 21^2/_7$, $C = 64^3/_{14}$, und so der Widerstand, welcher sich (nach Gl. 4.) wie $^7/_{11}AV + ^3/_4CV^2$ verhält, nun proportional

$$25. \quad 13^6/_{11} \,.\, V + 48^9/_{56} \,.\, V^2.$$

Für die vierte Columne, wo die Geschwindigkeit = 1 war, verhält sich der ganze Widerstand zu dem, dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen, Theile wie

$$26. \quad 13^6/_{11} + 48^9/_{56} : 48^9/_{56} = 61^{12}/_{17} : 48^9/_{56}.$$

Es verhält sich daher der Widerstand des Pendels im Wasser zu dem Theile des Widerstandes in der Luft, welcher dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist und bei schnellen Bewegungen allein in Betracht gezogen zu werden braucht (Gl. 22. und 26.) wie $61^{12}/_{17} : 48^9/_{56}$ und $535 : 1^1/_5$ zusammengenommen, d. h. wie

$$27. \quad 571 : 1.$$

Wäre bei dem im Wasser schwingenden Pendel der ganze Faden eingetaucht worden, so würde der Widerstand noch grösser ausgefallen sein, dergestalt dass jener Widerstand des im Wasser schwingenden Pendels, welcher dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist und bei einer schnellen Bewegung allein in Betracht kommt, sich zum Widerstande desselben ganzen, mit derselben Geschwindigkeit in der Luft schwingenden, Pendels verhält wie ungefähr

$$28. \quad 850 : 1,$$

d. h. sehr nahe, wie die Dichtigkeit des Wassers zur Dichtigkeit der Luft

Bei dieser Rechnung sollte auch der Theil des Widerstandes des Pendels im Wasser in Betracht genommen werden, welcher dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist; allein der Widerstand nahm (was vielleicht wunderbar erscheint) in einem grösseren Verhältniss als dem doppelten der Geschwindigkeit zu. Bei der Aufsuchung der dies bewirkenden Ursache verfiel ich darauf, dass wohl der Kasten für die Grösse der Pendelkugel zu eng war und die Bewegung des ausweichenden Wassers zu sehr durch seine Enge verhinderte. Wurde nämlich eine Pendelkugel von 1 Zoll im Durchmesser eingetaucht, so nahm der Widerstand sehr nahe im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit zu. Ich untersuchte dies, indem ich ein Pendel mit zwei Kugeln construirte, von denen die untere und kleinere im Wasser schwang, die obere und grössere nahe über demselben am Faden befestigt war und, indem sie so in der Luft schwang, die Bewegung des Pendels unterstützte und ihre Dauer vergrösserte. Die auf diese Weise angestellten Versuche verhielten sich, wie die folgende Tabelle es darstellt.

Bogen, beim ersten Falleu beschrieben	16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$,
„ „ letzten Steigen „	12, 6, 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{16}$,
Unterschied beider, der verlorenen Bewegung proportional	4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$,
Zahl der Schwingungen	$3\frac{3}{8}$, $6\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{12}$, $21\frac{1}{5}$, 34, 53; $62\frac{1}{5}$.

Bei der Vergleichung der Widerstände verschiedener Mittel untereinander liess ich auch ein eisernes Pendel in Quecksilber schwingen. Der Pendelfaden war etwa 3 Fuss lang, die Kugel hatte beiläufig $\frac{1}{3}$ Zoll im Durchmesser. Am Faden war, nahe über dem Quecksilber, eine andere bleierne Kugel befestigt von hinreichender Grösse, um der Bewegung des Pendels eine längere Dauer zu verschaffen. Hierauf füllte ich das Gefäss, welches etwa 3 Pfund Quecksilber fasste, abwechselnd mit Quecksilber und Wasser an, um das Verhältniss der Widerstände zu finden, welches das nach und nach in beiden Flüssigkeiten schwingende Pendel erlitt. Es ergab sich der Widerstand des Quecksilbers zu dem des Wassers, wie ungefähr

29. 13 oder 14 : 1,

d. h. wie ihre Dichtigkeiten. Wenn ich eine etwas grössere Pendelkugel anwandte, deren Durchmesser nämlich $\frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$ Zoll betrug, so ergab sich jener Widerstand wie ungefähr

30. 12 oder 10 : 1.

Dem ersten Versuche ist aber mehr zu trauen, weil bei dem letzten das Gefäss, im Verhältniss zur Grösse der eingetauchten Kugel, zu eng war. Bei einer grössern Kugel hätte auch ein weiteres Gefäss angewandt werden sollen. Ich hatte zwar die Absicht, Versuche dieser Art in grösseren Gefässen mit geschmolzenen Metallen und einigen andern, sowohl kalten als warmen, Flüssigkeiten zu wiederholen; allein es fehlte mir an Zeit, um alle Versuche anzustellen. Aus den bereits beschriebenen ergibt sich zur Genüge, dass der Widerstand von Körpern, welche sich in Flüssigkeiten schnell bewegen, den Dichtigkeiten der letztern sehr nahe proportional sei. Ich sage nicht genau. Denn zähere Flüssigkeiten werden ohne Zweifel, bei gleicher Dichtigkeit, einen grössern Widerstand ausüben, als solche, welche flüssiger sind; demnach kaltes Oel einen grössern als warmes, dieses einen grössern als Regenwasser und letzteres einen grössern als Weingeist. In Flüssigkeiten aber, welche für das Gefühl hinreichend flüssig erscheinen, wie in der Luft, in süssem oder salzigem Wasser, Weingeist, Spiritus von Terpentin und Salzen in Oel, welches durch Destillation vom Bodensatz befreit und erwärmt ist, in Vitriolöl und Quecksilber, in flüssig gemachten Metallen und allen andern so flüssigen Mitteln, dass sie, in Gefässen fortbewegt, die mitgetheilte Bewegung eine Zeit lang beibehalten und frei ausgegossen, herablaufend sich in Tropfen auflösen; in allen diesen Mitteln wird ohne Zweifel die angeführte Regel genau genug gelten, besonders wenn die Versuche mit grössern und schneller sich bewegenden Pendeln angestellt werden.

Nach der von vielen angenommenen Meinung existirt ein gewisses ätherisches und sehr lockeres Mittel, welches alle Poren und Zugänge eines jeden Körpers ganz frei durchwandert; aus einem solchen Mittel, welches die Poren der Körper durchströmt, muss ein Widerstand entspringen. Um zu bestimmen, ob der durch Versuche an bewegten Körpern gefundene Widerstand ganz an ihrer äussern Oberfläche stattfinde, oder ob auch die innern Theile an ihren eigenen Oberflächen einen merklichen Widerstand erleiden, erdachte ich folgenden Versuch. An einem 11 Fuss langen Faden, welcher mittelst eines stählernen Ringes von einem hinreichend festen stählernen Nagel herabhing, befestigte ich eine Büchse von Tannenholz, um so ein Pendel von der oben bezeichneten Länge herzustellen. Der Nagel war oberhalb sehr scharf mit concav geformter Schneide versehen, so dass der Ring, wenn er mit seinem obern Bogen auf der Schneide ruhete, sich ganz frei bewegen konnte. An dem untern Bogen war der Faden befestigt. Das so hergestellte Pendel brachte ich um einen Abstand von etwa 6 Fuss aus der perpendikulären Richtung und zwar in der Ebene, welche auf die Schneide des Nagels perpendikulär war, damit nämlich der Ring beim Schwingen des Pendels oberhalb der Schneide nicht hin und herschwanken sollte. Der Aufhängepunkt, in welchem der Ring den Nagel berührt, muss nämlich unbewegt bleiben. Ich bezeichnete nun genau den Ort, zu welchem ich das Pendel geführt, und nachdem ich es losgelassen hatte, auch die drei Orte, zu denen es am Ende der ersten, zweiten und dritten Schwingung zurückkehrte. Dies wiederholte ich mehrmals, um jene Orte so genau als möglich zu bestimmen. Hierauf füllte ich die Büchse mit Blei und andern schweren Metallen, welche ich zur Hand hatte. Vorher aber wog ich die leere Büchse zugleich mit dem Theile des Fadens, welcher um dieselbe gewickelt war, wie auch mit der Hälfte vom übrigen Theile des letztern, der zwischen Nagel und Pendelbüchse angespannt war. Der gespannte Faden wird nämlich auf das, aus der perpendikulären Richtung gebrachte, Pendel immer mit der Hälfte seines Gewichtes wirken. Zu diesem Gewichte fügte ich dasjenige der Luft, welche die ganze Büchse fassen konnte. Das ganze Gewicht betrug ungefähr $^1/_{78}$ desjenigen, welches die mit Metall angefüllte Büchse hatte. Da nun durch das letztere Gewicht der Faden angespannt und so die Länge des Pendels vergrössert wird, zog ich den Faden zusammen, um die frühere Länge herzustellen. Führte ich nun das Pendel zu dem zuerst bezeichneten Punkte und liess es dann los, so zählte ich ungefähr 77 Schwingungen, bis es zu dem zweiten, hierauf eben so viel, bis es zum dritten und dann eben so viel, bis es zum vierten Punkte zurückkehrte. Hieraus schloss ich, dass der ganze Widerstand der vollen Büchse zu dem der leeren kein grösseres Verhältniss habe, als das 78 : 77. Wären nämlich die Widerstände beider einander gleich, so müsste die volle Büchse, weil sie mit einer 78 mal grösseren Kraft ausgestattet ist als die leere, ihre schwingende Bewegung um eben so viel länger beibehalten, also immer nach

78 Schwingungen zu den bezeichneten Orten zurückkehren. Es geschieht aber bereits nach 77 Schwingungen.

Es bezeichne daher A den Widerstand der Büchse an ihrer äussern Seite, B den an den innern Theilen der leeren Büchse, und wenn der Widerstand gleich schneller Körper in den innern Theilen der Materie oder der Menge der Theilchen, welche einen Widerstand erleiden, proportional ist; so wird 78 B der Widerstand im Innern der vollen Büchse sein. Es ist ferner A + B der ganze Widerstand der leeren A + 78 B der ganze Widerstand der vollen Büchse, und wir haben

$$A + B : A + 78B = 77 : 78$$
$$A + B : 77B = 77 : 1$$
$$A + B : B = 77^2 : 1$$

endlich 31. $A : B = 5928 : 1.$

Es ist also der Widerstand im Innern der leeren Büchse beinahe 6000 mal kleiner, als der an der äussern Oberfläche stattfindende. Dies schliessen wir vermöge der Hypothese, dass jener grössere Widerstand der vollen Büchse nicht aus irgend einer andern verborgenen Ursache, sondern aus der Wirkung einer gewissen lockern Flüssigkeit auf das eingeschlossene Metall entspringe.

Diesen Versuch habe ich aus dem Gedächtniss mitgetheilt, da das Papier, worauf ich ihn einst beschrieben hatte, verloren gegangen ist. Ich war daher gezwungen, einige Bruchtheile der Zahlen fortzulassen, weil sie meinem Gedächtniss entschwunden waren. Den ganzen Versuch aufs neue anzustellen, mangelte es mir an Zeit.

Beim ersten Versuche hatte ich mich eines nicht ganz festen Nagels bedient, und dadurch wurde die volle Büchse schneller zur Ruhe gebracht. Da ich nach dem Grunde forschte, fand ich, dass der unfeste Nagel dem Gewichte der Büchse nachgab und, indem er ihren Schwingungen folgte, sich nach allen Seiten hinneigte. Ich brachte daher einen festen Nagel an, damit der Aufhängepunkt unbewegt bliebe, und dann trug sich alles nach obiger Beschreibung zu.

ABSCHNITT VII.

Von der Bewegung der Flüssigkeiten und dem Widerstande geworfener Körper.

---

§. 43. Lehrsatz. Zwei ähnliche Systeme von Körpern bestehen aus einer gleichen Anzahl einzelner Theilchen, und diese sind in dem einen Systeme den entsprechenden im andern Systeme ähnlich und proportional, auch haben sie zu einander eine ähnliche Lage und ein gegebenes

Verhältniss der Dichtigkeit. Ferner fangen sie an, sich in proportionalen Zeiten auf ähnliche Weise unter sich zu bewegen (die Theilchen des einen Systems unter sich und eben so die des andern unter sich), und die in demselben Systeme befindlichen Theilchen berühren sich gegenseitig nur im Augenblick der Zurückwerfung und ziehen einander an oder fliehen sich nur mit beschleunigenden Kräften, welche sich indirect wie die Durchmesser der entsprechenden Theilchen und direct wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten. Unter diesen Umständen werden jene Theilchen der Systeme fortfahren, sich auf ähnliche Weise unter einander zu bewegen, und umgekehrt.

Aehnliche Körper, welche ähnlich liegen, bewegen sich unter einander in proportionalen Zeiten auf ähnliche Weise, indem die gegenseitige Lage am Ende jener Zeiten immer ähnlich ist, wenn man nämlich die Theilchen des einen Systems mit den entsprechenden des andern vergleicht. Daher werden die Zeiten proportional sein, in denen ähnliche und proportionale Theile ähnlicher Figuren durch die entsprechenden Theilchen beschrieben werden. Hat man also zwei Systeme derselben Art, so werden die entsprechenden Theilchen, wegen der Aehnlichkeit der angefangenen Bewegungen, die letztern fortsetzen, bis sie sich einander begegnen. Werden sie nämlich durch keine Kräfte angetrieben, so schreiten sie nach Gesetz 1. der Bewegung auf geraden Linien fort. Wenn sie sich wechselseitig mit irgend welchen Kräften antreiben, und diese Kräfte sich indirect wie die Durchmesser der entsprechenden Theilchen und direct wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten; so werden, weil die Lage der Theilchen ähnlich ist und die Kräfte proportional sind, die ganzen aus einzelnen zusammengesetzten Kräfte, welche die correspondirenden Theilchen antreiben (nach Gesetze, Zusatz 2.) eine ähnliche Bestimmung haben, als wenn sie auf Mittelpunkte bezogen würden, welche ähnlich zwischen den Theilchen liegen. Jene ganzen Kräfte werden sich zu einander verhalten, wie die einzelnen sie zusammensetzenden Kräfte, d. h. indirect wie die Durchmesser der entsprechenden Theilchen und direct wie die Quadrate der Geschwindigkeiten; sie bewirken daher, dass die correspondirenden Theilchen fortfahren, ähnliche Figuren zu beschreiben. Dies verhält sich so nach §. 18., Zusatz 1. und 8. des ersten Buches, wenn nur jene Mittelpunkte ruhen. Bewegen sich diese, so bleibt in Folge der ähnlichen Fortbewegung ihre Lage unter den Theilchen der Systeme ähnlich und in den Figuren, welche die Theilchen beschreiben, traten ähnliche Aenderungen ein. Daher wird die Bewegung der correspondirenden und ähnlichen Theilchen selbst ähnlich sein, bis zu ihrem ersten Begegnen. Ferner erfolgt dieses und die Zurückwerfung auf ähnliche Weise; hierauf findet (nach dem schon Gezeigten) eine ähnliche Bewegung unter einander statt, bis sie sich aufs neue begegnen, u. s. w. f. ins Unendliche. W. z. b. w.

Zusatz 1. Wenn zwei beliebige ähnliche Körper gegen die correspondirenden Theilchen der Systeme ähnlich gelegen sind, und zwischen

denselben in proportionalen Zeiten ähnliche Bewegungen anfangen; wenn nur ihre Grössen und Dichtigkeiten zu einander dasselbe Verhältniss haben, welches zwischen den Grössen und Dichtigkeiten correspondirender Theilchen stattfindet: so setzen erstere die ähnliche Bewegung in proportionalen Zeiten fort. Es hat nämlich dieselbe Bewandtniss mit den grössern Theilen beider Systeme, wie mit ihren Theilchen.

Zusatz 2. Wenn die ähnlichen und ähnlich gelegenen Theile der Systeme alle unter sich ruhen, und zwei derselben, welche grösser als die übrigen sind und einander in beiden Systemen entsprechen, längs ähnlich liegender geraden Linien und auf ähnliche Weise sich irgendwie zu bewegen anfangen; so werden sie in den übrigen Theilen der Systeme ähnliche Bewegungen erregen und fortfahren, sich zwischen ihnen auf ähnliche Weise in proportionalen Zeiten zu bewegen. Sie werden daher Räume beschreiben, welche ihren Durchmessern proportional sind.

§. 44. Lehrsatz. Unter denselben Voraussetzungen werden die grössern Theile der Systeme einen Widerstand erleiden, welcher dem doppelten Verhältniss ihrer Geschwindigkeiten, dem doppelten der Durchmesser und dem einfachen Verhältniss der Dichtigkeit der Theile des Systems proportional ist.

Der Widerstand entspringt nämlich zum Theil aus den Centripetal- oder Centrifugalkräften, mit denen die Theilchen der Systeme auf einander wirken, zum Theil aus dem Zusammentreffen und der Zurückwerfung der Theilchen und der grössern Theile. Die Widerstände der ersten Art verhalten sich zu einander, wie die ganzen bewegenden Kräfte, aus denen sie entspringen, d. h. wie die ganzen beschleunigenden Kräfte und die Quantitäten der Materie in den correspondirenden Theilen. Sie verhalten sich daher (nach der Voraussetzung) direct wie die Quadrate der Geschwindigkeiten, indirect wie die Entfernungen der correspondirenden Theilchen und direct wie die Quantität der Materie in den correspondirenden Theilen. Daher (weil die Abstände der Theilchen des einen Systems sich zu den correspondirenden Abständen der Theilchen des andern Systems verhalten, wie der Durchmesser eines Theilchens oder Theiles im ersten Systeme zum Durchmesser des correspondirenden Theilchens oder Theiles im anderen Systeme, und weil die Quantitäten der Materie sich verhalten, wie die Dichtigkeiten der Theile und die Cuben der Durchmesser[166]) werden diese Widerstände sich verhalten, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten, die Quadrate der Durchmesser und die Dichtigkeiten der Theile beider Systeme. W. z. b. w.

Die Widerstände der zweiten Art verhalten sich wie die Anzahl der correspondirenden Zurückwerfungen und die Kräfte zusammengesetzt. Die Anzahl der Zurückwerfungen verhält sich zu einander direct wie die Geschwindigkeit der correspondirenden Theile und indirect wie die Zwischenräume der Zurückwerfungen. Die zurückwerfenden Kräfte verhalten sich wie die Geschwindigkeit, die Grösse und die Dichtigkeit der

correspondirenden Theile, d. h. wie die Geschwindigkeit, die Cuben der Durchmesser und die Dichtigkeit der Theile.

Verbindet man alle diese Verhältnisse mit einander, so ergiebt sich, dass die Widerstände der correspondirenden Theile sich zu einander verhalten, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten, die Quadrate der Durchmesser und die Dichtigkeiten der Theile zusammengesetzt. W. z. b. w.

Zusatz 1. Sind jene Systeme zwei elastische Flüssigkeiten nach Art der Luft, und ruhen ihre Theile unter sich; werden ferner zwei ähnliche und den Theilen der Flüssigkeiten, in Bezug auf Grösse und Dichtigkeit proportionale Körper, welche auf ähnliche Weise zwischen jenen Theilen liegen, längs ähnlich gelegener geraden Linien auf beliebige Weise geworfen; verhalten sich endlich die beschleunigenden Kräfte, mit denen die Theilchen der Flüssigkeit auf einander wirken, indirect wie die Durchmesser der geworfenen Körper und direct wie die Quadrate der Geschwindigkeiten: so werden jene Körper in proportionalen Zeiten ähnliche Bewegungen in den Flüssigkeiten erregen und Räume beschreiben, welche ähnlich und ihren Durchmessern proportional sind.

Zusatz 2. Ferner wird in derselben Flüssigkeit ein sich schnell bewegendes Projectil einen Widerstand erleiden, welcher sehr nahe im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit steht. Wenn nämlich die Kräfte, mit denen von einander abstehende Theilchen auf einander wirken, im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit vermehrt würden, so würde das Projectil einen genau doppelt so grossen Widerstand erleiden. Daher steht in einem Mittel, dessen nicht zusammenhängende Theilchen mit gar keinen Kräften auf einander wirken, der Widerstand genau im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit.

Es seien also A, B, C drei Mittel welche aus gleichen und ähnlichen, regelmässig in gleichen Abständen gelegenen Theilen bestehen. Die Theile der Mittel A und B mögen von einander wechselseitig mit Kräften fliehen, welche den Zahlen T und V proportional sind, die Theile des Mittels C seien von derartigen Kräften ganz frei. Es bewegen sich nun vier gleiche Körper D, E, F, G in diesen Mitteln, nämlich D und E in den Mitteln A und B, F und G im dritten Mittel C; die Geschwindigkeit von D stehe zu der von E, und ebenso die Geschwindigkeit von F zu der von G im halben Verhältniss der Kräfte, verhalten sich also zu einander wie $\sqrt{T} : \sqrt{V}$.
Der Widerstand des Körpers D wird sich alsdann zu dem von E, und ebenso der Widerstand des Körpers F zu dem von G verhalten, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten; daher verhält sich der Widerstand von D zu dem von F, wie der von E zu dem von G[167]). Es mögen die Körper D und F gleiche Geschwindigkeit besitzen, und ebenso die Körper E und G. Vermehrt man die Geschwindigkeit der beiden ersten D und F in einem beliebigen Verhältniss, und vermindert man die Kräfte der Theilchen des Mittels B in demselben doppelten Verhältniss; so wird das Mittel B sich dem Mittel C, in Bezug auf Gestalt und Lage, be-

liebig nähern und die Widerstände, welche die gleichen und gleichschnellen Körper E und G in diesen Mitteln erleiden, werden sich fortwährend der Gleichheit nähern dergestalt, dass ihr Unterschied endlich kleiner wird, als jede angebbare Grösse. Da ferner die Widerstände der Körper D und F sich zu einander verhalten, wie die Widerstände von E und G; so werden auch jene sich auf ähnliche Weise der Gleichheit nähern. Wenn also die Körper D und F sich sehr schnell bewegen, so sind ihre Widerstände sehr nahe gleich, und da der Widerstand des Körpers F im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit steht, so erleidet auch der Körper D einen sehr nahe dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand.

Zusatz 3. Bewegt sich daher ein Körper sehr schnell in einer beliebigen elastischen Flüssigkeit, so erleidet er fast denselben Widerstand, als wenn die Theile der Flüssigkeit ihre Centrifugalkräfte ganz verloren hätten und nicht wechselseitig von einander flöhen; wenn nur die elastische Kraft der Flüssigkeit aus den Centrifugalkräften ihrer Theilchen entspringt und die Geschwindigkeit so gross ist, dass die Kräfte nicht hinreichende Zeit zum Wirken haben.

Zusatz 4. Da ferner die Widerstände ähnlicher und gleichschneller Körper in einem Mittel, dessen getrennte Theile nicht wechselseitig von einander fliehen, sich wie die Quadrate der Durchmesser verhalten; so werden auch die Widerstände gleich schneller und sehr geschwind sich bewegender Körper in einer elastischen Flüssigkeit sehr nahe den Quadraten der Durchmesser proportional sein.

Zusatz 5. Da ähnliche, gleiche und gleichschnelle Körper in Mitteln von derselben Dichtigkeit, deren Theilchen sich wechselseitig nicht fliehen, mögen nun diese Theilchen mehrere und kleinere oder wenige und grössere sein, wenn sie in gleichen Zeiten auf eine gleiche Quantität Materie stossen und derselben eine gleichgrosse Bewegung mittheilen, umgekehrt (nach Gesetz 3. der Bewegung) eine gleiche Rückwirkung von ihr, d. h. gleichen Widerstand erleiden: so müssen offenbar die Widerstände in elastischen Flüssigkeiten von derselben Dichtigkeit, wenn die Körper sich sehr schnell bewegen, sehr nahe gleich sein; mögen die Flüssigkeiten nun aus dickern oder den zartesten Theilchen zusammengesetzt sein. Durch die Zartheit des Mittels wird nämlich der Widerstand sehr schnell sich bewegender Körper nicht bedeutend vermindert.

Zusatz 6. Dies alles verhält sich so bei Flüssigkeiten, deren elastische Kraft aus den Centrifugalkräften der Theilchen ihren Ursprung ableitet. Entspringt dieselbe von anderwärts her, wie etwa aus der Ausdehnung der Theilchen bei der Wolle und den Zweigen der Bäume, oder geht sie aus einer andern beliebigen Ursache hervor, wodurch die Bewegung der Theilchen unter sich weniger frei wird; so fällt auch der Widerstand, wegen des weniger flüssigen Zustandes des Mittels, grösser aus, als in den vorhergehenden Zusätzen.

§. 45. Lehrsatz. Werden eine Kugel und ein Cylinder, welche

zu gleichem Durchmesser construirt sind, nach der durch die Axe des letztern angegebenen Richtung, in einem lockern und elastischen Mittel, welches aus gleichen und in gleichen gegenseitigen Abständen befindlichen Theilchen besteht mit gleicher Geschwindigkeit bewegt; so erleidet die Kugel nur einen halb so grossen Widerstand als der Cylinder.

Da (nach Gesetze, Zusatz 5.) die Wirkung des Mittels auf einen Körper dieselbe ist, wenn dieser sich im ruhenden Mittel bewegt, oder umgekehrt die Theilchen des Mittels mit derselben Geschwindigkeit gegen den ruhenden Körper stossen; so wollen wir diesen als ruhend ansehen, und untersuchen, welchen Stoss das sich bewegende Mittel auf ihn ausübt.

Es bezeichne demnach ABKJ den kugelförmigen Körper, welcher zum Mittelpunkt C und mit dem Halbmesser CA construirt ist, und es treffen die Theilchen des Mittels mit gegebener Geschwindigkeit auf ihn längs gerader mit AC paralleler Linien. FB sei eine derartige Linie. Auf ihr nehme man LB = CB und ziehe BD, welche die Kugel in B berührt. Auf CK und BD fälle man die Perpendikel BE und LD. Vergleicht man alsdann die Kraft, mit welcher ein Theilchen des Mittels, längs der geraden Linie FB schief auf die Kugel treffend, diese in B stösst, mit derjenigen Kraft, welche dasselbe Theilchen auf den Cylinder ONGQ, der zur Axe ACJ um die Kugel construirt ist ausübt; so verhält sich die erste Kraft zur zweiten, wie

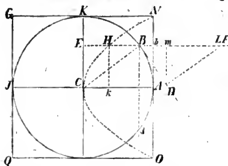


Fig. 171.

1. LD : LB oder wie BE : BC.

Ferner verhält sich die Wirksamkeit der ersten Kraft zur Bewegung der Kugel in der Einfallsrichtung FB oder AC, zu ihrer Wirksamkeit in Bezug auf die Bewegung der Kugel in ihrer Bestimmungsrichtung, d. h. längs der geraden Linie BC, nach welcher sie direct gegen die Kugel drückt, wie

2. BE : BC.[168])

Verbindet man beide Verhältnisse mit einander, so ergiebt sich, dass die Wirksamkeit des Theilchens, welches längs FB schief die Kugel trifft, um die Kugel nach seiner Einfallsrichtung hin zu bewegen, sich verhalte zur Wirksamkeit desselben Theilchens, um den perpendikulär getroffenen Cylinder in derselben Richtung zu bewegen, wie

3. $BE^2 : BC^2$.

Errichtet man daher auf der kreisförmigen Grundfläche NAO des Cylin-

ders das Perpendikel $hE = AC = BC$ und macht man $bH = \frac{BE^2}{BC}$;

so wird 4. $hH : bE = BE^2 : BC^2$,

d. h. so verhält sich bH zu hE, wie die Wirksamkeit des Theilchens gegen die Kugel zu seiner Wirksamkeit gegen den Cylinder.

Es wird daher auch der Körper, welcher alle geraden Linien bH umfasst, sich zu dem Körper verhalten, welcher von allen geraden Linien bE gebildet wird, wie die Wirksamkeit aller Theilchen gegen die Kugel zu ihrer Wirksamkeit gegen den Cylinder. Der erstere Körper ist ein Paraboloïd, welches zum Scheitel C, der Axe CA und dem Parameter = CA construirt ist,[169]) der letztere ein um das Paraboloïd construirter Cylinder, und es ist bekannt, dass das Paraboloïd der Hälfte des Cylinders gleich ist. Daher ist die Kraft des ganzen Mittels gegen die Kugel halb so gross, als die gegen den Cylinder ausgeübte.

Ruhen endlich die Theilchen des Mittels, und bewegen sich Kugel und Cylinder mit gleicher Geschwindigkeit; so wird der Widerstand, welchen die Kugel erleidet, nur halb so gross sein als derjenige, welchen der Cylinder zu erleiden hat. W. z. b. w.

§. 46. Anmerkung. Nach derselben Methode kann man andere Figuren in Bezug auf den Widerstand, welchen sie erleiden, mit einander vergleichen und diejenigen finden, welche sich zur Fortsetzung ihrer Bewegung im widerstehenden Mittel am besten eignen.

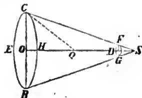


Fig. 172.

Soll man etwa zur kreisförmigen Basis CEBH, welche aus dem Mittelpunkte O mit dem Radius OC beschrieben ist und zur Höhe OD denjenigen abgekürzten Kegel CBGF bestimmen, welcher von allen über derselben Grundfläche und zu derselben Höhe construirten Kegeln den kleinsten Widerstand erleidet; so halbire man OD in Q, verlängere OQ bis S, so dass QS = QC werde. Alsdann wird S der Scheitel des Kegels sein, dessen abgekürztes Stück man sucht.[170])

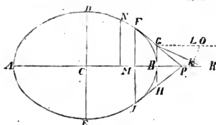


Fig. 173.

Hieraus ergiebt sich nebenbei Folgendes. Da der Winkel CSB immer spitz ist, so lasse man an einem Körper ADBE, der durch Umdrehung der elliptischen oder ovalen Figur ADBE um die Axe AB entstanden ist, die Linien FG, GH, HJ die erzeugende Figur in den Punkten F, B, J so berühren, dass GH im Berührungspunkt B perpendikulär auf der Axe stehe, FG

nnd HJ aber mit GH die Winkel FGB = JHB = 135° bilden. Der Körper, welcher durch Umdrehung der Figur ADFGHJE um dieselbe Axe AB entsteht, wird alsdann einen geringeren Widerstand erleiden, als der frühere Körper, wenn nur beide sich in der Richtung der Axe AB, nnd zwar der Theil B voran, bewegen. Ich glaube, dass dieser Satz für die Construction von Schiffen nicht ohne Nutzen sein wird.

Ist die Figur DNFB von der Art, dass, wenn man von dem beliebigen Punkte N anf die Axe AB das Perpendikel NM fällt nnd von dem gegebenen Punkte G die Linie GR der Tangente in N parallel zieht, welche die verlängerte Axe in R schneidet, alsdann $MN : GR = GR^3 : 4BR \cdot GB^2$ wird; so wird der Körper, welcher durch Umdrehnng dieser Figur um die Axe AB entsteht, bei seiner Bewegung von A gegen B in einem lockern und elastischen Mittel einen geringeren Widerstand erleiden, als jeder andere beliebige, bei derselben Länge nnd Breite beschriebene, kreisförmige Körper.[171])

§. 47. Aufgabe. Man sucht den Widerstand, welchen eine Kngel bei gleichförmiger Bewegung in einem lockeren Mittel erleidet, welches ans gleichen nnd, in gleichen gegenseitigen Abständen befindlichen, Theilchen besteht.

1. Fall. Man denke sich, dass ein, mit demselben Durchmesser und zu derselben Höhe beschriebener, Cylinder sich mit derselben Geschwindigkeit und in demselben Mittel nach der Richtung seiner Axe bewege. Setzen wir voraus, dass die Theilchen des Mittels, anf welche die Kugel oder der Cylinder treffen, mit der grössten Kraft zurückspringen. Der Widerstand der Kugel ist (nach §. 45.) halb so gross, als der Widerstand des Cylinders; ferner ist die Kugel = $^2/_3$ Cylinder; der Cylinder wird, indem er perpendiknlär auf dieselben Theilchen trifft nnd sie sehr stark zurückwirft, ihnen seine doppelte Bewegung mittheilen: daher wird der Cylinder in derselben Zeit, in welcher er die Hälfte seiner Axe gleichförmig beschreibt, den Theilchen eine Bewegung mittheilen, welche sich zur ganzen Bewegung des Cylinders verhält, wie die Dichtigkeit des Mittels znr Dichtigkeit des Cylinders. Die Kngel wird in der Zeit, in welcher sie ihren ganzen Durchmesser gleichförmig zurücklegt, den Theilchen dieselbe Bewegung mittheilen. In der Zeit, in welcher sie $^2/_3$ ihres Durchmessers zurücklegt, wird sie den Theilchen eine Bewegung mittheilen, welche sich znr ganzen Bewegung der Kngel verhält, wie die Dichtigkeit des Mittels znr Dichtigkeit der Kngel Die Kugel erleidet daher einen Widerstand, welcher sich zu derjenigen Kraft, wodnrch ihre ganze Bewegung in der Zeit, während sie $^2/_3$ ihres Durchmessers gleichförmig znrücklegt, genommen oder erzeugt werden könnte, verhält wie die Dichtigkeit des Mittels znr Dichtigkeit der Kugel.

2. Fall. Setzen wir voraus, dass die Theilchen, welche die Kugel oder den Cylinder treffen, nicht zurückgeworfen werden und der Cylinder, indem er perpendikulär auf die Theilchen trifft, ihnen seine einfache

Geschwindigkeit mittheile; so erleidet er einen halb so grossen Widerstand als vorhin, und dasselbe ist bei der Kugel der Fall.

3. Fall. Gesetzt endlich, die Zurückwerfung der Theilchen von der Kugel geschehe weder mit der grössten Kraft, noch sei diese = 0, sondern habe irgend einen mittlern Werth; alsdann wird auch der Widerstand in demselben mittleren Verhältniss zwischen dem des 1. und 2. Falles stehen.

Zusatz 1. Sind die Kngel nnd die Theilchen des Mittels nnendlich hart und von aller elastischen, mithin anch jeder zurückwerfenden Kraft frei; so verhält sich der Widerstand der Kngel zn derjenigen Kraft, durch welche ihre ganze Bewegung in der Zeit, während sie $^2/_3$ ihres Durchmessers zurücklegt, fortgenommen oder erzeugt werden könnte, wie die Dichtigkeit des Mittels zur Dichtigkeit der Kugel.

Znsatz 2. Der Widerstand der Kngel steht, nnter übrigens gleichen Umständen, im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit.

Zusatz 3. Der Widerstand der Kugel steht, nnter übrigens gleichen Umständen, im doppelten Verhältniss des Durchmessers.

Znsatz 4. Der Widerstand der Kugel ist, unter übrigens gleichen Umständen, der Dichtigkeit des Mittels proportional.

Zusatz 5. Der Widerstand der Kugel verhält sich wie das Quadrat der Geschwindigkeit, das Quadrat des Durchmessers nnd die Dichtigkeit des Mittels zusammengesetzt.

Zusatz 6. Die Bewegung der Kngel mit ihrem Widerstande kann folgendermassen dargestellt werden.

Es sei AB die Zeit, in welcher die Kugel durch den gleichförmig fortgesetzten Widerstand ihre ganze Bewegung verlieren kann. Auf AB errichte man die Perpendikel AD und BC, nnd zwar stelle das letztere jene ganze Bewegung dar. Durch C construire man eine, zu den Asymptoten AD nnd AB gehörige Hyperbel. Man verlängere AB bis zu einem beliebigen Pnnkte E nnd errichte das Perpendikel EF, welches die Hyperbel in F schneidet. Nun vollende man das Parallelogramm CBEG nnd

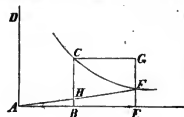


Fig. 174.

ziehe AF, welche BC in H schneidet. Wenn nun die Kugel in einer beliebigen Zeit BE, bei gleichförmiger Fortsetznng ihrer ersten Bewegung im nicht widerstehenden Mittel, den durch das Parallelogramm CBEG dargestellten Weg beschriebe; so wird sie im widerstehenden Mittel den durch die Hyperbelfläche CBEF dargestellten Weg zurücklegen, ihre Bewegung wird am Ende jener Zeit durch die Ordinate EF der Hyperbel ausgedrückt werden, nachdem sie den Theil FG desselben verloren hat. Ihr Widerstand am Ende jener Zeit wird durch die Linie BH ausgedrückt, nachdem der Theil CH desselben verloren gegangen ist.[172])

Alles dies erhellt aus §. 7., Zusatz 1. und 3. des zweiten Buches.

Zusatz 7. Wenn also die Kugel in der Zeit T, durch gleichförmige Fortsetzung des Widerstandes R, ihre ganze Bewegung M verlieren würde, so wird sie in der Zeit t im widerstehenden Mittel, durch den im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit abnehmenden Widerstand R, von ihrer Bewegung einen Theil $\frac{t\,M}{T+t}$ verlieren und den Theil $\frac{T\,M}{T+t}$ übrig behalten. Sie wird einen Weg beschreiben, welcher sich zu dem in derselben Zeit mit gleichförmiger Bewegung M beschriebenen Wege verhält, wie $2{,}302585092994 \,.\, \log\left(\frac{T+t}{T}\right) : \frac{t}{T}$; weil nämlich BCFE zu BCGE in diesem Verhältniss steht.[173])

§. 48. Anmerkung. In diesem Satze habe ich den Widerstand und die Verzögerung auseinandergesetzt, welche sphärische Projectile in nicht zusammenhängenden Mitteln erleiden und gezeigt, dass dieser Widerstand sich zu der Kraft, durch welche die ganze Bewegung des Projectils in der Zeit, während der die Kugel bei gleichförmig fortgesetzter Bewegung $^2/_3$ ihres Durchmessers zurücklegen würde, entweder aufgehoben oder erzeugt werden könnte, verhält wie die Dichtigkeit des Mittels zur Dichtigkeit der Kugel. Hierbei findet die Voraussetzung statt, dass die Kugel und die Theilchen des Mittels höchst elastisch sind, und mit grösster Gewalt zurückgeworfen werden können. Ferner ist diese Kraft nur halb so gross, wenn die Kugel und die Theilchen des Mittels unendlich hart und von aller zurückwerfenden Kraft frei sind.

In continuirlichen Mitteln aber, wie im Wasser, warmen Oel und Quecksilber, in denen die Kugel nicht unmittelbar auf alle, Widerstand erzeugenden Theilchen der Flüssigkeit trifft, sondern selbst nur gegen die nächsten drückt, während diese wieder auf andere u. s. w. Druck ausüben, wird der Widerstand noch um das Doppelte kleiner sein. Die Kugel erleidet nämlich in sehr flüssigen Mitteln dieser Art einen Widerstand, welcher sich zu der Kraft verhält, durch die ihre ganze Bewegung während der Zeit, wo sie bei gleichförmig fortgesetzter Bewegung $^8/_3$ ihres Durchmessers zurücklegen würde, aufgehoben oder erzeugt werden könnte, wie die Dichtigkeit des Mittels zur Dichtigkeit der Kugel. Dies wollen wir im Folgenden zu zeigen versuchen.

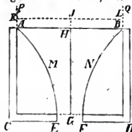


Fig. 175.

§. 49. Aufgabe. Man soll die Bewegung des Wassers finden, welches durch ein, im Boden eines cylinderförmigen Gefässes gemachtes Loch fliesst.

Es sei ACDB das Gefäss, AB seine obere Oeffnung, CD der dem Horizont parallele Boden desselben, EF ein kreisförmiges Loch in diesem Boden, G der Mittel-

punkt des Loches und GH die auf den Horizont perpendikuläre Axe des Cylinders.

Man denke sich einen Eiscylinder APQB, von derselben Dicke wie das Innere des Gefässes, welcher zugleich dieselbe Axe hat, und beständig mit gleichförmiger Bewegung herabsteigt. Ferner sollen seine Theile in dem Angenblick, wo sie die Oberfläche AB erreichen, flüssig werden und, indem sie sich in Wasser verwandeln, vermöge ihres Gewichtes in das Gefäss hinabfliessen. Dort bilden sie einen Wasserfall oder eine Wassersäule ABNFEM, welche durch das Loch EF geht und dasselbe gänzlich ausfüllt. Man setze voraus, dass die Geschwindigkeit, womit das Eis herabsteigt, so wie die Geschwindigkeit des im Kreise AB damit zusammenhängenden Wassers gleichförmig und so gross sei, als sie dieses Wasser bei einem freien Falle durch die Höhe JH erlangen kann, so wie dass JH und HG in gerader Linie liegen. Durch den Punkt J sei die Linie KL dem Horizont parallel gezogen und dieselbe schneide die Seiten des Eiskörpers in K und L. Die Geschwindigkeit des durch das Loch EF abfliessenden Wassers wird dieselbe sein, welche das durch die Höhe JG herabfallende Wasser erlangen kann. Nach den Lehrsätzen Galilei's wird daher JG sich zu JH verhalten, wie das Quadrat der Geschwindigkeit des durch das Loch abfliessenden Wassers zum Quadrat des im Kreise AB fallenden, d. h. wie das Quadrat des Kreises AB zum Quadrat des Kreises EF. Die Geschwindigkeiten des Wassers, welches in gleicher Zeit und Menge durch verschiedene Kreise hindurchgeht, verhalten sich nämlich umgekehrt, wie die Flächen dieser Kreise[174]). Es handelt sich hier um die Geschwindigkeit des gegen den Horizont fliessenden Wassers. Was die dem Horizont parallele Bewegung betrifft, wodurch die Theile des Wassers sich einander nähern, so soll diese hier keineswegs in Betracht gezogen werden, weil sie nicht von der Schwere herrührt und nichts in der gegen den Horizont perpendikulären Bewegung ändert, welche durch die Schwere hervorgebracht wird. Wir setzen indessen voraus, dass die Theile des Wassers einige Cohäsion besitzen und dass sie vermöge derselben, während des Fallens sich einander durch horizontale Bewegungen nähern, dergestalt, dass sie einen einzigen Wasserfall bilden und nicht in mehrere derartige getheilt sind. Wir nehmen aber hier keine Rücksicht auf die horizontale Bewegung, welche durch diese Cohäsion hervorgebracht wird.

1. Fall. Man denke sich die ganze Höhlung des Gefässes, welche das fallende Wasser ABNFEM umgiebt, voll Eis, so dass das Wasser längs dieses Eises, wie längs der Wände eines Trichters, vorüberfliesse. Wenn das Wasser das Eis nur eben berührt, und wegen der vollkommenen Politur des letzteren ganz frei und ohne jeden Widerstand vorüberfliesst; so wird es durch das Loch EF mit derselben Geschwindigkeit wie vorhin abfliessen und es wird das ganze Gewicht der Wassersäule ABNFEM verwandt werden, um diesen Abfluss wie vorhin hervorzubringen. Der Boden des Gefässes wird das Gewicht des, die Säule

umgehenden, Eises zu tragen haben. Nun werde das Eis im Gefässe wieder flüssig, alsdann wird der Abfluss des Wassers, in Betreff der Geschwindigkeit unverändert bleiben. Sie wird nämlich nicht kleiner, weil das zu Wasser gewordene Eis sich bestrebt herabzusteigen, und nicht grösser, weil das letztere nicht herabsteigen kann, ohne das andere Wasser, dessen Fall dem seinigen gleich ist, am Abfliessen zu hindern. Dieselbe Kraft muss dem abfliessenden Wasser dieselbe Geschwindigkeit mittheilen.

Das Loch im Boden des Gefässes muss aber etwas grösser als vorhin sein, wegen der schiefen Bewegung der abfliessenden Wassertheilchen. Alle die letzteren können nämlich nicht in perpendikulärer Richtung durch das Loch gehen, sondern werden, indem sie überall von den Seiten des Gefässes herkommen und gegen das Loch zu convergiren, dort in schiefer Richtung durchfliessen. Indem sie nun alle das Bestreben haben, durch den Boden fortzugehen, wird ihre Bewegung mit derjenigen Wasserader übereinstimmen, welche perpendikulär durchfliesst. Diese Wasserader ist ausserhalb der Oeffnung etwas dünner, als in der Oeffnung selbst, indem ihr Durchmesser sich zu dem der letzteren, wenn ich richtig gemessen habe, nahebei wie 5 : 6 oder wie 5,5 : 6,5 verhält. Ich bediente mich eines sehr dünnen platten Bleches, das in der Mitte durchbohrt war, und welche kreisförmige Oeffnung $^5/_8$ Zoll im Durchmesser hatte. Damit nun die heraustretende Wasserader nicht beschleunigt und durch die Beschleunigung noch enger würde, brachte ich dieses Blech nicht im Boden, sondern an der Seitenwand des Gefässes an, so dass jene Ader längs einer, dem Horizonte parallelen, Richtung heraustrat. Wenn nun das Gefäss voll Wasser war, öffnete ich das Loch, damit das Wasser durchfliessen sollte, und es fand sich nun der Durchmesser der Ader, in einem etwa $^1/_2$ Zoll entfernten Abstande von der Oeffnung nach einer sehr genauen Messung gleich $^{21}/_{40}$ Zoll. Es verhält sich also der Durchmesser dieser Oeffnung zu dem der Wasserader sehr nahe, wie 25 : 21. Das Wasser convergirt demnach, indem es durch das Loch fliesst, von allen Seiten her und wird, nachdem es aus dem Gefäss getreten ist, durch diese Convergenz dünner und wird durch diese Verdünnung beschleunigt, bis es zu einem Abstande von $^1/_2$ Zoll von der Oeffnung gelangt, in welchem Abstande es dünner geworden ist, und eine im Verhältniss $25^2 : 21^2$, oder ungefähr 17 : 12, d. h. $\sqrt{2} : 1$ grössere Geschwindigkeit erlangt hat.

Durch Versuche ist aber bekannt, dass eine Wassermenge, welche während einer gegebenen Zeit durch ein kreisförmiges Loch im Boden des Gefässes fliesst, dieselbe ist, welche mit der vorherbesagten Geschwindigkeit nicht durch jene, sondern durch eine kreisförmige Oeffnung, deren Durchmesser sich zu dem jener Oeffnung wie 21 : 25 verhält, in derselben Zeit abfliessen muss. Jenes ausfliessende Wasser hat daher in der Oeffnung selbst sehr nahe dieselbe abwärts gerichtete Ge-

schwindigkeit, welche es vermöge der Schwere, beim freien Falle durch die halbe Höhe des im Gefässe befindlichen Wassers erlangen könnte. Nachdem es aber aus dem Gefässe getreten ist, wird es durch die Convergenz beschleunigt, bis es in eine dem Durchmesser der Oeffnung nahe gleiche Entfernung von dieser gelangt und da eine Geschwindigkeit erlangt, welche ungefähr im Verhältniss $\sqrt{2}:1$ grösser als diejenige ist, welche es beim freien Falle durch die ganze Höhe des im Gefässe befindlichen Wassers erreichen könnte. Im Folgenden werden wir also den Durchmesser der Wasserader durch die kleinste Oeffnung darstellen, welche wir EF nennen wollen. Man denke sich nun eine der Oeffnung EF parallele Ebene VW oberhalb derselben in einer Entfernung, welche nahezu dem Durchmesser dieser Oeffnung gleich ist, und es befinde sich in dieser Ebene VW eine Oeffnung ST, welche grösser als die erste ist. Die Ader gehe durch diese Oeffnung und fülle genau die untere EF aus, indem nahezu der Durchmesser der oberen Oeffnung sich zu dem der untern verhält, wie 25 : 21.

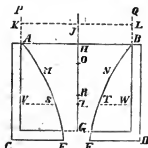


Fig. 176.

Auf die Weise wird die Ader perpendikulär durch die untere Oeffnung gehen, und die ausfliessende Wassermenge wird, mit Rücksicht auf die Grösse dieser Oeffnung, nahezu dieselbe sein, welche die Lösung der Aufgabe erfordert. Man kann daher den, durch beide Ebenen und die ausfliessende Wasserader ausgefüllten, Raum als den Boden des Gefässes betrachten. Damit die Lösung der Aufgabe einfacher und mehr mathematisch werde, ist es besser, die untere Ebene allein als den Boden des Gefässes zu betrachten und vorauszusetzen, dass das längs des Eises oder des Trichters vorüberfliessende Wasser, welches durch die in der unteren Ebene gemachte Oeffnung EF heraustrat, immer seine Bewegung, das Eis hingegen seinen Zustand der Ruhe beibehalte. Es sei also im Folgenden ST der Durchmesser des, um Z als Mittelpunkt beschriebenen, kreisförmigen Loches, durch welches der Wasserfall aus dem Gefässe fliesst, sobald das ganze, im letzteren enthaltene Wasser flüssig geworden ist. Ferner sei EF der Durchmesser des Loches, welches genau durch die herabfallende Wassersäule ausgefüllt wird; mag das Wasser durch das obere Loch ST aus dem Gefässe fliessen, oder mag es längs der Eiswände im Gefässe, wie längs eines Trichters, herabfallen. Verhält sich der Durchmesser ST des oberen Loches zum Durchmesser EF des unteren Loches wie 25 : 21, und ist der perpendikuläre Abstand der Ebenen beider Löcher dem Durchmesser des unteren Loches gleich; so wird die Geschwindigkeit des durch ST fliessenden Wassers in ST selbst so gross sein, als diejenige, welche ein aus der Hälfte der Höhe JZ herabfallender Körper erlangen könnte. Die Geschwindigkeit des einen

und anderen Wasserfalles wird in der Oeffnung EF so gross sein, als diejenige, welche ein durch die ganze Höhe JG herabfallender Körper erlangen könnte.

2. Fall. Ist das Loch EF nicht in der Mitte des Gefässes, sondern an einer anderen Stelle angebracht, so wird das Wasser mit derselben Geschwindigkeit wie vorhin ausfliessen; vorausgesetzt dass das Loch eben so gross sei. Obgleich nämlich ein schwerer Körper mehr Zeit braucht, um auf einer schiefen Linie zu einer bestimmten Tiefe zu gelangen, als auf einer perpendikulären Linie, so erlangt er doch, wie Galilei gezeigt hat, in beiden Fällen gleiche Geschwindigkeit.

3. Fall. Die Geschwindigkeit des durch eine, an der Seitenwand des Gefässes angebrachte, Oeffnung ausfliessenden Wassers würde auch noch dieselbe sein. Ist nämlich die Oeffnung klein und der Abstand der Oberflächen AB und KL fast Null, so wird der horizontal heraustretende Wasserfaden eine parabolische Form annehmen und man wird aus dem Parameter dieser Parabel ersehen, dass die Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers dieselbe ist, welche ein Körper erlangen könnte, der aus der Höhe HG oder JG des Wassers im Gefässe herabgefallen wäre. Nach angestellten Versuchen fand ich, dass, wenn die Höhe des im Gefässe befindlichen Wassers über der Oeffnung 20 Zoll, und die Höhe der letzteren über der horizontalen Ebene gleichfalls 20 Zoll betrug, der heraussprudelnde Wasserfaden ungefähr in einer Entfernung von 37 Zoll, vom Perpendikel an der Oeffnung gerechnet, niederfiel. Wenn man von dem Widerstande der Luft abstrahirt, so hätte der Wasserfaden in einem Abstande von 40 Zoll niederfallen müssen, indem der Parameter der Parabel = 80 Zoll ist.[175])

4. Fall. Das Wasser wird auch selbst, wenn es aufwärts getragen wird, mit derselben Geschwindigkeit heraustreten. Es steigt nämlich eine kleine heraussprudelnde Wasserader, perpendikulär gegen das im Gefäss ruhende Wasser, zur Höhe GH oder GJ auf, so weit nämlich sein Aufsteigen nicht durch den Widerstand der Luft verhindert wird. Ferner wird es mit derjenigen Geschwindigkeit ausfliessen, welche es durch den Fall aus jener Höhe hätte erlangen können. Jedes Theilchen des ruhenden Wassers wird von allen Seiten gleich stark gedrückt (nach zweitem Buche §. 27.) und begiebt sich, indem es dem Drucke Folge leistet, mit gleicher Gewalt nach allen Seiten hin; mag es nun durch eine Oeffnung im Boden des Gefässes ausfliessen, oder in einen Kanal treten, und von da durch eine kleine, an dessen oberer Fläche angebrachte, Oeffnung ausfliessen. Die Geschwindigkeit, womit es ausfliesst, wird diejenige sein, welche wir nach der Angabe dieses Paragraphen nicht nur durch Rechnung gefunden haben, sondern die sich auch aus den beschriebenen Versuchen ergeben hat.

5. Fall. Das ausfliessende Wasser hat dieselbe Geschwindigkeit, mag die Oeffnung kreis-, quadrat- oder dreieckförmig sein, oder irgend

eine, der kreisförmigen gleiche, Gestalt haben. Die Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers hängt nämlich nicht von der Gestalt der Oeffnnng ab, sondern entspringt aus der Tiefe der letzteren unterhalb der Ebene KL.

6. Fall. Wird der untere Theil des Gefässes ABDC in stillstehendes Wasser eingetaucht, und ist die Höhe des letzteren über dem Boden des Gefässes = GR (Figur 176); so wird die Geschwindigkeit, womit das im Gefäss befindliche Wasser durch die Oeffnung EF in das ruhende Wasser ausfliesst, so gross sein, als diejenige, welche dasselbe bei seinem Falle von der Höhe JR erlangen kann. Das Gewicht des ganzen, unterhalb der Oberfläche des ruhenden Wassers im Gefässe befindlichen, Wassers wird durch das Gewicht des äusseren rnhenden Wassers im Gleichgewicht erhalten, nnd wird daher keineswegs die Bewegung des im Gefässe herabsteigenden beschleunigen. Dieser Fall wird anch durch Versuche klar werden, indem man nämlich die Zeiten bestimmt, in denen das Wasser ausfliesst.

Zusatz 1. Verlängert man demnach die Höhe CA des Wassers bis K so weit, dass AK zu CK im doppelten Verhältniss der Fläche des in irgend einem Theile des Bodens gemachten Loches zum Flächeninhalt des Kreises AB steht; so wird die Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers derjenigen gleich sein, welche es beim Falle durch die Höhe CK erlangen könnte.

Zusatz 2. Die Kraft, welche die ganze Bewegung des ausfliessenden Wassers erzeugen kann, ist gleich dem Gewicht der cylinderförmigen Wassersäule, deren Basis gleich der Oeffnung EF und deren Höhe gleich 2GJ oder 2CK ist. In der Zeit, in welcher das herausströmende Wasser dieser Säule gleich wird, würde es nämlich beim Falle von der Höhe GJ dieselbe Geschwindigkeit erlangen, mit welcher es ausströmt.

Zusatz 3. Das Gewicht alles Wassers im Gefäss ABDC verhält sich zu dem Theile desselben, welcher gebraucht wird, um das Wasser zum Ausfliessen zu bringen, wie die Summe der Kreise

$$1.\quad AB + EF : 2EF.$$

Ist nämlich JO die mittlere Proportionale zwischen JH nnd JG, so wird das durch die Oeffnung EF während der Zeit, wo ein von J herabfallender Tropfen den Weg JG zurücklegt, herausströmende Wasser einem Cylinder gleich sein, dessen Basis = EF nnd dessen Höhe = 2JG, d. h. = einem Cylinder, dessen Basis = AB nnd Höhe = 2JO. Es verhält sich nämlich (Zusatz 1.)

$$2.\quad \begin{aligned} EF : AB &= \sqrt{JH} : \sqrt{JG} \\ EF : AB &= \sqrt{JH\ .\ JG} : JG = JO : JG, \end{aligned}$$

nnd in der Zeit, wo ein von J herabfallender Tropfen die Höhe JH zurücklegen kann, wird die ausfliessende Wassermenge dem Cylinder gleich, dessen Basis = AB
Höhe = 2JH.

In der Zeit aber, wo derselbe von J herabfallende Tropfen den Unterschied HG der Höhen zurücklegt, wird die ausfliessende Wassermenge, d. h. das ganze im festen Körper ABNFEM eingeschlossene Wasser, dem Unterschiede der Cylinder, oder einem Cylinder gleich sein, dessen

Basis = AB
Höhe = 2HO.

Folglich verhält sich das ganze, im Gefäss ABDC enthaltene, Wasser zur ganzen, innerhalb des festen Körpers ABNFEM abfliessenden Wassermenge wie

3. $HG : 2 . HO = HO + OG : 2HO = JH + JO : 2 . JH.$[176])

Das Gewicht des ganzen im festen Körper ABNFEM enthaltenen Wassers wird aber gebraucht, um den Ausfluss desselben zu bewirken; folglich verhält sich das Gewicht der ganzen im Gefäss enthaltenen Wassermenge zu dem Theile desselben, welcher zur Bewirkung des Ausflusses verwandt wird, wie

4. $JH + JO : 2 . JH$, d. h. wie $AB + EF : 2 . EF$.

Zusatz 4. Ferner verhält sich das Gewicht des ganzen, im Gefäss ABDC enthaltenen, Wassers zu dem anderen Theile desselben, welchen der Boden des Gefässes zu tragen hat, wie

5. $AB + EF : AB - EF$.

Zusatz 5. Der Theil des Gewichtes, welchen der Boden zu tragen hat, verhält sich zu dem anderen Theile, welcher zur Hervorbringung des Ausflusses verwandt wird, wie

6. $AB - EF : 2 . EF$,

oder wie der Flächeninhalt des Bodens zum doppelten Flächeninhalt der Oeffnung.

Zusatz 6. Der Theil des Gewichtes aber, durch welchen der Boden des Gefässes gedrückt wird, verhält sich zum ganzen Gewichte des perpendikulär auf dem Boden befindlichen Wassers, wie

7. $AB : AB + EF$,

oder wie der Kreis AB zum Unterschiede zwischen dem doppelten Kreise AB und dem Boden des Gefässes.

Der Theil des Gewichtes, durch welchen allein der Boden gedrückt wird, verhält sich nämlich (nach Zusatz 4) zum Gewicht des ganzen im Gefäss befindlichen Wassers, wie

8. $AB - EF : AB + EF$,

und das Gewicht des letzteren zu dem des ganzen, perpendikulär auf dem Boden aufliegenden Wassers, wie

9. $AB : AB - EF$.

Mithin verhält sich der Theil des Gewichtes, durch welchen allein der Boden gedrückt wird, zum Gewicht des ganzen, perpendikulär auf dem Boden aufliegenden Wassers wie

$AB : AB + EF = AB : 2AB - (AB - EF)$.

Zusatz 7. Wird in der Mitte der Oeffnung EF ein kleiner Kreis PQ angebracbt, welcher dem Horizonte parallel ist, und dessen Centrum in G sich befindet, so wird das Gewicht des Wassers, welches jener kleine Kreis zu tragen hat, grösser als das Gewicht des dritten Theiles eines Wassercylinders, dessen Basis jener kleine Kreis und dessen Höhe = GH ist. Es sei nämlich ABNFEM ein Wasserfall oder eine berabsinkende Wassersäule, deren Axe wie vorhin GH ist und man denke sich, dass alles Wasser im Gefässe, sowohl das in der Umgebung des Wasserfalles, als aucb das über dem kleinen Kreise befindliche, dessen Flüssigkeit nicht zur Beschleunigung des Falles erforderlich ist, erstarre. PHQ sei die über dem kleinen Kreise erstarrte Wassersäule, deren Scheitel in H liegt und deren Höhe GH ist. Denkt man sich ferner, dass dieser Wasserfall durch sein eigenes Gewicht herabsinke und weder auf PHQ anfliege, nocb gegen dieselbe drücke, sondern frei nnd obne Reibnng vorüberfliesse; ausser etwa am Scheitel des Eises selbst, wo der Wasserfall beim Anfange des Sinkens selbst bohl zu werden beginnt. Alsdann wird eben so, wie das in der Umgebung des Wasserfalles erstarrte Wasser AMEC und BNFD an der inneren Oberfläche AME und BNF gegen den sinkenden Wasserfall, aucb diese Wassersäule PHQ gegen denselben convex sein. Sie ist daher grösser, als ein Kegel zur Basis PQ und Höhe GH, d. h. grösser, als $^1/_3$ Cylinder zu derselben Basis und Höhe. Jener kleine Kreis trägt aber das Gewicht dieser Säule, ein Gewiebt, welches grösser als das eines Kegels oder grösser als $^1/_3$ des Gewichts jenes Cylinders ist.

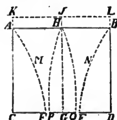


Fig. 177.

Zusatz 8. Das Gewicht des Wassers, welches der sehr kleine Kreis PQ zu tragen bat, scheint kleiner zu sein, als $^2/_3$ des Gewichts eines Cylinders, dessen Basis der kleine Kreis und Höhe = GH ist. Unter Voraussetzung der oben angenommenen Umstände denke man sich ein Halbsphäroïd, dessen Basis dieser kleine Kreis und dessen halbe Axe = GH ist. Dasselbe wird $^2/_3$ des Cylinders sein und die erstarrte Wassersäule PQH einschliessen, deren Gewicht der kleine Kreis zu tragen bat. Damit nämlich die Bewegung des Wassers möglichst geradlinig erfolge, muss die äussere Oberfläche dieser Säule mit der Basis PQ unter einem wenig spitzen Winkel zusammentreffen, weil das Wasser im Fallen beständig beschleunigt und in Folge dieser Beschleunigung die Wassersäule dünner wird. Da nun dieser Winkel kleiner als 90° ist, so wird die Säule unten innerhalb eines Halbsphäroïds eingeschlossen sein und oben in einer Spitze enden, damit die horizontale Bewegung des Wassers nicht unendlich geschwinder gegen den Gipfel des Sphäroïds sei, als seine perpendikuläre Bewegung. Je kleiner der Kreis PQ ist, desto spitzer wird

die Säule sein, und ist jener unendlich verkleinert, so wird auch der Winkel PHQ unendlich klein und folglich die Säule im Innern eines Sphäroïds liegen. Diese Säule ist daher kleiner als $^2/_3$ des erwähnten Cylinders, und der kleine Kreis hat die Last des Wassers zu tragen, dessen Gewicht dem dieser Säule gleich ist; denn das Gewicht des sie umgebenden Wassers wird zur Bewirkung des Ausflusses gebraucht.

Zusatz 9. Das Gewicht des Wassers, welches der sehr kleine Kreis PQ zu tragen hat, ist nahezu dem Gewicht eines Wassercylinders gleich, dessen Basis dieser Kreis und dessen Höhe = $^1/_2$GH ist. Dieses Gewicht ist nämlich das arithmetische Mittel zwischen dem des Kegels und dem des Halbsphäroïds, welche wir besprochen haben. Wäre aber dieser Kreis nicht sehr klein, und vergrösserte man ihn, bis er der Oeffnung EF gleich würde; so hätte er das Gewicht des ganzen Wassers zu tragen, welches perpendikulär auf ihm ruht, d. h. eines Wassercylinders von der Basis des Kreises und Höhe = GH.

Zusatz 10. Das Gewicht, welches dieser kleine Kreis zu tragen hat, verhält sich (so wie es mir scheint) stets zu dem Gewicht des Wassercylinders von der diesem Kreise gleichen Basis und Höhe = $^1/_2$GH, wie $EF^2 : EF^2 - {}^1/_2PQ^2$, oder sehr nahe wie der Kreis EF zum Unterschiede zwischen diesem und der Hälfte des kleinen Kreises PQ.

§. 50. Lehrsatz. Der Widerstand eines, gleichförmig längs seiner Axe fortschreitenden, Cylinders ändert sich nicht, wenn die Axe grösser oder kleiner wird. Er ist also gleich dem Widerstande eines Kreises, welcher um denselben Durchmesser beschrieben wird und mit derselben Geschwindigkeit längs einer, auf seine Ebene perpendikulären, Linie fortschreitet.

Denn die Seiten des Cylinders widerstehen sehr wenig seiner Bewegung, und er geht in einen Kreis über, wenn man seine Axe in's Unendliche verkleinert.

§. 51. Lehrsatz. Der Widerstand, welcher durch den Querschnitt eines Cylinders hervorgebracht wird, der sich gleichförmig längs seiner Axe in einem zusammengedrückten, unbegrenzten und nicht elastischen Mittel bewegt, verhält sich zu derjenigen Kraft, welche eine ganze Bewegung während der Zeit, wo er das Vierfache seiner Axe zurüklegen kann, aufheben oder erzeugen könnte, sehr nahe wie die Dichtigkeit des Mittels zu der des Cylinders.

Das Gefäss ABDC berühre mit seinem Boden CD die Oberfläche eines stillstehenden Wassers und es fliesse aus jenem das Wasser durch den cylindrischen Kanal EFTS perpendikulär gegen den Horizont. Man bringe den kleinen Kreis PQ parallel mit dem Horizont irgendwo in der Mitte des Kanals an, und verlängere CA bis K so weit, dass AK zu CK im doppelten Verhältniss von demjenigen stehe, welches der Unterschied

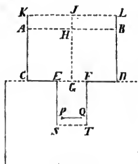


Fig. 178.

von EF und PQ zum Kreise AB hat. Es ist alsdann (nach §. 49., 5. und 6. Fall, wie auch Zusatz 1.) klar, dass die Geschwindigkeit des, durch den ringförmigen Raum zwischen dem kleinen Kreise und den Seiten des Gefässes fliessenden, Wassers diejenige sein wird, welche das Wasser erlangen kann, indem es freifallend den Weg KC oder JG zurücklegt. Ferner wird (nach §. 49. Zusatz 10,), wenn die Breite des Gefässes unbegrenzt ist und so HJ verschwindet oder JG = HG wird, die Kraft des gegen den kleinen Kreis herabfliessenden Wassers sich zum Gewicht des Cylinders von der Basis PQ und Höhe $^1/_2$JG sehr nahe wie $EF^2 : EF^2 - {^1/_2}PQ^2$ verhalten.

Die Kraft des, mit gleichförmiger Bewegung durch den ganzen Kanal abfliessenden, Wassers wird nämlich dieselbe gegen den kleinen Kreis PQ sein, wo dieser sich auch im Kanal befinden mag. Nun setze man voraus, dass die Oeffnungen EF und ST des Kanals verschlossen werden, dass der kleine Kreis in dieser von allen Seiten comprimirten Flüssigkeit emporsteige und durch sein Emporsteigen das oberhalb befindliche Wasser zwinge, durch den zweiten dem Kreise und den Seiten des Kanals befindlichen ringförmigen Raum herabzusteigen. Alsdaun verhält sich die Geschwindigkeit des aufsteigenden kleinen Kreises zu der des herabsteigenden Wassers, wie der Unterschied der Kreise EF und PQ zum Kreise PQ selbst, und wieder die Geschwindigkeit des ersten zur Summe der Geschwindigkeiten, d. h. zur relativen Geschwindigkeit, mit welcher das absteigende Wasser am aufsteigenden Kreise vorüberfliesst, wie $EF^2 - PQ^2 : EF^2$.[177])

Es sei diese relative Geschwindigkeit derjenigen gleich, mit welcher man vorhin das Wasser durch denselben Raum fliessen sah, als der kleine Kreis unbeweglich war, d. h. gleich der Geschwindigkeit, welche das Wasser beim freien Falle durch die Höhe JG erlangen kann. Alsdann wird die Kraft des Wassers gegen den kleinen aufsteigenden Kreis (nach Gesetze, Zusatz 5) dieselbe wie vorhin bleiben, d. h. der Widerstand des kleinen aufsteigenden Kreises wird sich zum Gewicht eines Wassercylinders von der Basis PQ und Höhe $^1/_2$JG sehr nahe verhalten, wie $EF^2 : EF^2 - {^1/_2}PQ^2$. Die Geschwindigkeit des kleinen Kreises wird sich aber zu derjenigen, welche das Wasser beim Fall durch die Höhe JG erlangen könnte, verhalten wie $EF^2 - PQ^2 : EF^2$.

Vergrössert man die Weite des Kanals in's Unendliche, so werden die Verhältnisse $EF^2 - PQ^2 : EF^2$ und $EF^2 : EF^2 - {^1/_2}PQ^2$ einander gleich werden. Mithin wird die Geschwindigkeit des kleinen Kreises alsdann diejenige, welche das Wasser beim Falle durch die Höhe JG

erlangen kann; sein Widerstand wird aber dem Gewicht des Cylinders von der Basis PQ und Höhe $1/_2$JG gleich, aus welcher der Cylinder fallen muss, um die Geschwindigkeit des aufsteigenden kleinen Kreises zu erlangen, und der Cylinder wird mit dieser Geschwindigkeit in der Fallzeit das Vierfache seiner Länge beschreiben. Der Widerstand des Cylinders, welcher mit dieser Geschwindigkeit längs seiner Axe fortgeht, ist (nach §. 50) dem Widerstande des kleinen Kreises gleich. Er ist also sehr nahe derjenigen Kraft gleich, welche die Bewegung erzeugen kann, die er während der Durchlaufung der vierfachen Axe hat.

Vergrössert oder verkleinert man die Axe des Cylinders, so wird seine Bewegung, wie auch die zur Durchlaufung des Vierfachen der Axe erforderliche Zeit in demselben Verhältniss zu- oder abnehmen. Jene Kraft, welche die vergrösserte oder verkleinerte Bewegung, während einer gleichmässig vergrösserten oder verkürzten Zeit, erzeugen oder zerstören kann, wird sich also nicht ändern; sie wird ferner auch jetzt dem Widerstande des Cylinders gleich, denn auch dieser bleibt, nach §. 50. ungeändert.

Nimmt die Dichtigkeit des Cylinders zu oder ab, so wird seine Bewegung wie auch die Kraft, welche in derselben Zeit die Bewegung erzeugen oder aufheben kann, in demselben Verhältniss zu- oder abnehmen. Der Widerstand eines beliebigen Cylinders wird sich also zu der Kraft verhalten, durch welche seine ganze Bewegung während der Zeit, wo er das Vierfache seiner Axe zurücklegt, erzeugt oder aufgehoben werden kann, sehr nahe wie die Dichtigkeit des Mittels zur Dichtigkeit des Cylinders. W. z. b. w.

Die Flüssigkeit muss aber zusammengedrückt werden, damit sie zusammenhängend sei, und sie muss zusammenhängend und frei von Elasticität sein, damit der ganze Druck, welcher aus ihrer Compression entspringt, sich augenblicklich fortpflanze und, indem er gleichmässig auf alle Theile des bewegten Körpers wirkt, seinen Widerstand nicht ändere. Der Druck, welcher aus der Bewegung des Körpers entspringt, wird gebraucht, um die Theile der Flüssigkeit zu bewegen und erzeugt den Widerstand. Der Druck aber, welcher aus der Compression der Flüssigkeit entspringt, wie stark er auch sei, bringt, wenn er sich augenblicklich fortpflanzt, keine Bewegung in den Theilen der zusammenhängenden Flüssigkeit hervor und eben so wenig eine Aenderung in der Bewegung; also wird er den Widerstand weder vergrössern noch vermindern. Mit Sicherheit kann die aus ihrer Zusammendrückung herrührende Wirksamkeit der Flüssigkeit nicht stärker an den hinteren Theilen des bewegten Körpers sein, als an den vorderen, und kann daher den in diesem Paragraph besprochenen Widerstand nicht vermindern, auch wird diese Wirksamkeit nicht stärker gegen die vorderen als gegen die hinteren Theile sein, wenn ihre Fortpflanzung nur unendlich schneller erfolgt, als die Bewegung des gedrückten Körpers. Unendlich schneller

und augenblicklich wird aber diese Fortpflanzung sein, wenn nur die Flüssigkeit zusammenhängend und nicht elastisch ist.

Zusatz 1. Die Widerstände, welche Cylinder erleiden, die gleichförmig längs ihrer Axen in zusammenhängenden und unbegrenzten Mitteln fortschreiten, stehen in einem Verhältniss, welches aus dem doppelten ihrer Geschwindigkeiten, dem doppelten ihrer Durchmesser und dem einfachen Verhältniss der Dichtigkeit der Mittel zusammengesetzt ist.

Zusatz 2. Ist der Kanal nicht ins Unendliche erweitert, schreitet aber der Cylinder in einem ruhenden eingeschlossenen Mittel nach seiner Länge fort, und fällt inzwischen des letzteren Axe mit der des Kanals zusammen; so wird sein Widerstand zu derjenigen Kraft, durch welche die ganze Bewegung des Cylinders während der Zeit, wo er das Vierfache seiner Länge beschreibt, entweder erzeugt oder aufgehoben werden könnte, in einem Verhältniss stehen, welches aus dem einfachen Verhältniss von $EF^2 : EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ dem doppelten von $EF^2 : EF^2 - PQ^2$ und dem einfachen der Dichtigkeit des Mittels zur Dichtigkeit des Cylinders zusammengesetzt ist.

Zusatz 3. Finden dieselben Voraussetzungen statt, und steht die Linie L zum Vierfachen der Axe des Cylinders in einem Verhältniss, welches aus dem einfachen von $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2 : EF^2$ zu dem doppelten von $EF^2 - PQ^2 : EF^2$ zusammengesetzt ist; so verhält sich der Widerstand, den der Cylinder erleidet, zu der Kraft, welche seine ganze Bewegung erzeugen oder aufheben könnte, während er den Weg L zurücklegt, wie die Dichtigkeit des Mittels zu derjenigen des Cylinders.

§. 52. Anmerkung. Im vorhergehenden Lehrsatze haben wir nur denjenigen Widerstand gefunden, welcher allein von der Grösse des Querschnittes des Cylinders herrührt, haben aber den Theil desselben vernachlässigt, welcher aus der schiefen Richtung der Bewegungen entspringen kann. Auf dieselbe Weise nämlich, wie in §. 49, 1. Fall die schiefe Richtung der Bewegungen, mit welcher alle im Gefäss enthaltenen Theile des Wassers gegen die Oeffnung EF hin convergirten, dem Ausfluss desselben aus der letzteren hinderlich war, eben so wird in diesem Falle die schiefe Richtung der Bewegungen, mit denen die durch das vordere Ende des Cylinders gedrückten Theile des Wassers dem Drucke nachgeben und nach allen Seiten hin divergiren, ihren Durchgang durch diejenigen Orte verzögern, welche um die vorderen Theile des Cylinders herumliegen, indem dieselben von hier nach den hinteren zurückgehen. Sie bewirkt, dass die Flüssigkeit nach einem grösseren Abstande bewegt wird und vergrössert den Widerstand, und zwar sehr nahe in demselben Verhältniss, in welchem dort der Ausfluss des Wassers aus dem Gefässe vermindert wurde, d. h. im doppelten Verhältniss von 25 : 21.

Eben so wie wir im ersten Fall jenes Paragraphen bewirkten, dass die Theile des Wassers in sehr grosser Anzahl perpendikulär durch die

Oeffnung EF flossen, indem wir voraussetzten, dass alles im Gefäss befindliche Wasser, welches um den Cataract gefroren war, und dessen Bewegung in schiefer Richtung und ohne Nutzen stattfand, in Ruhe bliebe; müssen wir in diesem Satze, damit die schiefe Richtung der Bewegungen aufgehoben werde, und die sehr leicht durch eine geradlinige und schnelle Bewegung ausweichenden Theile des Wassers dem Cylinder einen leichten Durchgang gestatten und nur derjenige Widerstand übrig bleibe, welcher aus der Grösse des Querschnittes entspringt und durch Verkleinerung des letzteren vermindert werden kann, — voraussetzen, dass die Theile der Flüssigkeit, deren Bewegung in schiefer Richtung und nutzlos stattfindet, und welche einen Widerstand hervorbringen, unter sich zusammenhängen am Ende des Cylinders in Ruhe bleiben, und den Cylinder umgeben.

Es sei ABDC ein Rechteck, AE und BE zwei parabolische Bogen, deren Axe AB und deren Parameter sich zur Linie GH, welche der Cylinder zur Erlangung seiner Geschwindigkeit frei durchfallen müsste, wie GH : $^1/_2$AB verhalte. Es seien eben so CF und DF zwei andere parabolische Bogen, deren Axe CD und deren Parameter viermal so gross als der vorhergehende ist. Alsdann wird die Umdrehung dieser Figur um die Axe EF einen Körper erzeugen, dessen mittlerer Theil ABDC der besprochene Cylinder und dessen Enden ABE und CDF die Theile der Flüssigkeit einschliessen werden, welche sich unter einander in Ruhe befinden und, wenn sie hart werden, zwei an beiden Enden des Cylinders wie Kopf und Schwanz hängende feste Körper bilden. Der Widerstand des festen Körpers EACFDB, welcher nach E hin im Sinne seiner Axe FE fortschreitet, wird sehr nahe derjenige sein, von welchem in diesem Satze die Rede war, d. h. der zu der Kraft, durch welche die ganze Bewegung des Cylinders, während er 4AC mit gleichförmiger Bewegung zurücklegt, erzeugt oder aufgehoben werden könnte, sehr nahe dasselbe Verhältniss hat, in welchem die Dichtigkeit der Flüssigkeit zu derjenigen des Cylinders steht. Durch diese Kraft kann der Widerstand, nach §. 49, Zusatz 7, nicht stärker als im Verhältniss 2 : 3 vermindert werden.

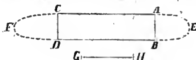


Fig. 179.

§. 53. Lehnsatz. Wenn ein Cylinder, eine Kugel und ein Sphäroïd von gleichen Breiten hintereinander in die Mitte eines cylinderförmigen Kanals gelegt werden, und zwar dergestalt, dass ihre Axen mit der des Kanals zusammenfallen; so werden diese drei Körper dem Durchfluss des Wassers durch den Kanal gleichen Widerstand entgegenstellen.

Die Räume zwischen den Wänden des Kanals einerseits und dem Cylinder, der Kugel und dem Sphäroïd andererseits, durch welche das

Wasser fliesst, sind einander gleich, und durch gleiche Räume fliesst das Wasser auf gleiche Weise. Dies findet unter der Voraussetzung statt, dass alles Wasser, dessen Flüssigkeit nicht zur Beschleunigung des strömenden Wassers erforderlich ist, oberhalb der drei Körper gefriere, wie ich dies in §. 49, Zusatz 7, auseinandergesetzt habe.

§. 54. Lehnsatz. Unter denselben Voraussetzungen, wie im vorhergehenden Paragraphen, werden die dort besprochenen Körper gleich stark durch das Wasser, welches längs des Kanals fliesst, gedrückt.

Dies erhellt aus §. 53 und dem 3. Gesetz der Bewegung, denn das Wasser und diese Körper wirken gleich stark anfeinander.

§. 55. Lehnsatz. Befindet sich das Wasser im Kanal in Ruhe, und bewegen sich die Körper mit gleicher Geschwindigkeit in demselben, aber nach entgegengesetzten Richtungen; so sind ihre Widerstände einander gleich.

Dies ergibt sich aus dem vorhergehenden Paragraphen, denn ihre relativen Bewegungen bleiben dieselben unter sich.

§. 56. Anmerkung. Es verhält sich ebenso mit allen convexen und runden Körpern, deren Axen mit der Axe des Kanals zusammenfallen. Es kann einiger Unterschied aus der grösseren oder geringeren Reibung hervorgehen; wir setzen aber in diesen Lehnsätzen voraus, dass die Körper eine vollkommene Politur besitzen, dass die Zähigkeit und Reibung des Mittels Null sei und dass die Theile der Flüssigkeit, welche durch ihre schiefen und nutzlosen Bewegungen den Strom des Wassers durch den Kanal stören, verhindern und verzögern können, unter sich ruhen, als ob sie durch den Frost hart geworden wären, und dass sie an den vorderen und hinteren Enden der Körper so befestigt seien, wie ich im §. 52. gezeigt habe. In den folgenden Sätzen wird der kleinste Widerstand untersucht, welchen runde Körper erleiden können, die durch Umdrehung bei gegebenen Querschnitten entstanden sind.

Körper, welche in Flüssigkeiten schwimmen und sich geradlinig fortbewegen, bewirken, dass die Flüssigkeit an ihrem vorderen Ende sich hebt und am hinteren senkt; besonders wenn jene von abgestumpfter Form sind. Hierdurch erleiden sie einen etwas grösseren Widerstand, als wenn ihre vorderen und hintereren Enden zugespitzt wären. Eben so werden Körper, welche sich in elastischen Flüssigkeiten bewegen, wenn sie an ihren Enden abgestumpft sind, die Flüssigkeit an ihren vorderen Enden etwas verdichten und an den hinteren auflockern; sie werden folglich einen etwas grösseren Widerstand erleiden, als wenn sie an ihren Enden zugespitzt wären. In diesen Lehn- und Lehrsätzen ist von elastischen Flüssigkeiten keine Rede, sondern nur von nicht elastischen; eben so sprechen wir nicht von Körpern, welche auf den Flüssigkeiten schwimmen, sondern nur von solchen, welche ganz darin einge-

taucht sind. Kennt man den Widerstand, welchen diese Körper in nicht elastischen Mitteln erleiden, so muss man denselben etwas vergrössern, sowohl in elastischen Flüssigkeiten wie in der Luft, als an den Oberflächen stillstehender Gewässer, wie an denen der Meere und Sümpfe.

§. 57. Lehrsatz. Der Widerstand einer Kugel, welche sich gleichförmig in einem zusammengedrückten, unbegrenzten und nicht elastischen Mittel bewegt, verhält sich zu derjenigen Kraft, durch welche ihre ganze Bewegung erzeugt oder aufgehoben werden könnte, während sie selbst $^8/_3$ ihres Durchmessers zurücklegt, sehr nahe wie die Dichtigkeit des Mittels zu derjenigen der Kugel.

Die Kugel verhält sich nämlich zum umschriebenen Cylinder wie 2 : 3. Folglich wird dieselbe Kraft, welche die ganze Bewegung des Cylinders aufheben kann, während er das Vierfache seiner Axe zurücklegt, die ganze Bewegung der Kugel aufheben können, während sie $^2/_3$ dieser Länge, d. h. $^8/_3$ ihres Durchmessers zurücklegt. Der Widerstand des Cylinders verhält sich nun zu dieser Kraft sehr nahe wie die Dichtigkeit der Flüssigkeit zu seiner eigenen Dichtigkeit und es ist, nach §§. 53, 54 und 55, der Widerstand der Kugel gleich demjenigen des Cylinders. W. z. b. w.

Zusatz 1. Der Widerstand, welchen Kugeln in zusammengedrückten und unbegrenzten Mitteln erleiden, steht in einem Verhältniss, welches aus dem doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit, dem doppelten der Durchmesser und dem einfachen Verhältniss der Dichtigkeit dieser Mittel zusammengesetzt ist.

Zusatz 2. Die grösste Geschwindigkeit, mit welcher eine Kugel vermöge ihres relativen Gewichtes in einem widerstehenden Mittel herabsteigen kann, ist diejenige, welche dieselbe Kugel durch dasselbe Gewicht erlangen kann, wenn sie in einem nicht widerstehenden Mittel freifallend einen Weg beschriebe, der sich zu $^4/_3$ ihres Durchmessers ebenso verhielte, wie die Dichtigkeit der Kugel zu derjenigen des Mittels. Die Kugel würde nämlich in der Zeit, welche sie zu ihrem Falle gebraucht und vermöge der Geschwindigkeit, welche sie durch diesen Fall erlangt, einen Weg beschreiben, der sich zu $^8/_3$ ihres Durchmessers verhielte, wie ihre Dichtigkeit zu der des Mittels. Ferner verhält sich die Kraft des Gewichtes, welche diese Bewegung erzeugt, zu derjenigen Kraft, durch welche dieselbe Bewegung erzeugt werden könnte, während die Kugel mit derselben Geschwindigkeit $^8/_3$ ihres Durchmessers zurücklegte, wie die Dichtigkeit des Mittels zu derjenigen der Kugel. Nach diesem Satze wird daher die Kraft des Gewichtes dem Widerstande gleich sein, folglich die Kugel nicht beschleunigen können.

Zusatz 3. Ist die Dichtigkeit der Kugel und ihre Geschwindigkeit im Anfange der Bewegung gegeben, wie auch die Dichtigkeit des zusammengedrückten und ruhenden Mittels, in welchem die Kugel sich

bewegt; so hat man für jede beliebige Zeit ihre Geschwindigkeit, den Widerstand und den beschriebenen Weg, nach §. 47, Zusatz 7.

Zusatz 4. Eine Kugel, welche sich in einem zusammengedrückten, ruhenden und gleich dichten Mittel bewegt, verliert früher die Hälfte ihrer Bewegung, als sie einen zwei Durchmessern gleichen Weg zurücklegt, nach §. 47, Zusatz 7.[178])

§. 58. Lehrsatz. Der Widerstand, welchen eine Kugel erleidet, die gleichförmig in einer, in einem cylindrischen Kanale eingeschlossenen und zusammengedrückten, Flüssigkeit fortschreitet, steht zu derjenigen Kraft, vermöge welcher ihre ganze Bewegung während der Zeit, wo sie $^8/_3$ ihres Durchmessers zurücklegt, erzeugt oder aufgehoben werden könnte, in einem Verhältniss, welches folgendermassen zusammengesetzt ist:

aus dem einfachen Verhältniss der Oeffnung des Kanals zum Unterschiede zwischen dieser und der Hälfte eines grössten Kreises der Kugel;

aus dem doppelten Verhältniss derselben Oeffnung zum Unterschiede zwischen ihr und einem ganzen grössten Kreise der Kugel, und aus dem einfachen Verhältniss der Dichtigkeit des Mittels zu derjenigen der Kugel.

Die Wahrheit dieses Satzes ergiebt sich aus §. 51, Zusatz 2, und der Beweis ist von derselben Art, wie derjenige des vorhergehenden Paragraphen.

§. 59. Anmerkung. In den beiden letzten Paragraphen (wie auch in §. 53) betrachte ich alles der Kugel vorangehende Wasser, dessen Flüssigkeit den zu erleidenden Widerstand vergrössert, als gefroren. Finge dasselbe an zu schmelzen, so würde der Widerstand etwas vergrössert werden; allein diese Vergrösserung wird in diesen Sätzen von geringem Belang sein, und man kann sie vernachlässigen, weil die convexe Oberfläche der Kugel fast dieselben Dienste leistet, als das Eis.

§. 60. Aufgabe. Man soll durch Versuche den Widerstand einer Kugel finden, welche sich in einem zusammengedrückten und sehr flüssigen Mittel bewegt.

Es sei A das Gewicht der Kugel im leeren Raume, B dasselbe im widerstehenden Mittel, D ihr Durchmesser, F die Länge, welche sich zu $^4/_3$D verhält, wie die Dichtigkeit der Kugel zu derjenigen des Mittels, d. h. $F : {}^4/_3\, D = A : A - B$.

Ferner sei G die Zeit, in welcher die Kugel beim Falle, vermöge des Gewichtes B, ohne Widerstand zu erleiden, den Weg F zurücklegt und H die Geschwindigkeit, welche sie bei ihrem Falle erlangt hat. H wird die grösste Geschwindigkeit sein, mit welcher die Kugel, vermöge ihres Gewichtes B, in einem widerstehenden Mittel fallen kann

(nach §. 57., Zusatz 2.) und der Widerstand, welchen die Kugel erleidet, indem sie mit dieser Geschwindigkeit fällt, wird dem Gewichte B gleich. Der Widerstand aber, welchen sie bei irgend einer anderen Geschwindigkeit erleidet, steht zum Gewichte B im doppelten Verhältniss dieser letzteren Geschwindigkeit zur grössten Geschwindigkeit H, nach §. 57, Zusatz 1.

Dies ist derjenige Widerstand, welcher von der Trägheit der flüssigen Materie herrührt; derjenige hingegen, welcher aus der Elasticität, Zähigkeit und der Reibung ihrer Theile entspringt, findet sich folgendermaassen. Es sei eine Kugel sich selbst überlassen, so dass sie durch ihr Gewicht B in der Flüssigkeit fällt, und es sei P die in Secunden ausgedrückte Zeit, welche sie zu ihrem Falle braucht; die frühere Zeit G sei ebenfalls in Secunden verstanden. Ferner sei N eine absolute Zahl, deren Logarithme $= 0{,}4342944819 \cdot \frac{2P}{G}$ und der Logarithme von $\frac{N+1}{N} = L$; alsdann ist die im Fallen erlangte Geschwindigkeit $= \frac{N-1}{N+1}H$, und die beschriebene Höhe $= \frac{2PF}{G} - 1{,}3862943611 \, . \, F + 4{,}605170186 \, FL$. Ist die Flüssigkeit hinreichend tief, so kann man das letzte Glied vernachlässigen und es wird sehr nahe die beschriebene Höhe $= \frac{2PF}{G} - 1{,}3862943611 \, . \, F$. Alles dies ergiebt sich nach §. 13 dieses Buches und seinen Zusätzen, indem man voraussetzt, dass die Kugel keine andere Art von Widerstand erleide als den, welcher aus der Trägheit der Materie entspringt.[179]) Erlitte sie ausserdem einen anderen Widerstand, so würde sie langsamer herabsteigen, und man würde durch diese Verzögerung die Grösse des letzteren Widerstandes kennen lernen.

Um leichter die Geschwindigkeit und den Weg eines Körpers kennen zu lernen, welcher im leeren Raume fällt, habe ich die folgende Tabelle angefertigt, deren erste Colnmne die Zeit des Falles darstellt. Die zweite gibt die im Fallen erlangten Geschwindigkeiten an, indem man die grösste = 100000000 = H annimmt. Die dritte stellt den während dieser Zeiten durchlaufenen Weg dar, indem 2F derjenige Weg ist, welchen der Körper in der Zeit G mit der grössten Geschwindigkeit durchläuft. Die vierte Columne enthält die in denselben Zeiten mit der grössten Geschwindigkeit durchlaufenen Wege. Die Zahlen dieser Columne sind die Werthe von $\frac{2P}{G}$, und subtrahirt man hiervon die Zahl 1,3862944 — 4,6051702L, so erhält man die Zahlen der dritten Columne, welche man mit dem Wege F multipliciren muss, um die im Fallen beschriebenen Wege zu erhalten.

Ich habe eine fünfte Columne hinzugefügt, welche die in denselben Zeiten vom Körper durchlaufenen Wege enthält, wenn er im leeren Raume vermöge seines relativen Gewichtes B gefallen wäre.

Zeiten P	Geschwindigkeit des in der Flüssigkeit fallenden Körpers $\frac{N-1}{N+1}$ H	Die beim Falle in der Flüssigkeit beschriebenen Wege. $\frac{2PF}{G}$ -- 1,386 . F + 4,605 × LF	Die durch die grösste Bewegung beschriebenen Wege $\frac{2PF}{G}$	Die beim Falle im leeren Raum beschriebenen Wege F . $\frac{P^2}{G^2}$
0,001 G	99999,58	0,000001 × F	0,002 . F	0,000001 . F
0,01 „	999967	0,0001 „	0,02 „	0,0001 „
0,1 „	9966799	0,0099834 „	0,2 „	0,01 „
0,2 „	19737532	0,0397361 „	0,4 „	0,04 „
0,3 „	29131261	0,0886815 „	0,6 „	0,09 „
0,4 „	37994896	0,1559070 „	0.8 „	0,16 „
0,5 „	46211716	0,2402290 „	1,0 „	0,25 „
0,6 „	53704957	0,3402706 „	1,2 „	0,36 „
0,7 „	60436778	0,4545405 „	1,4 „	0.49 „
0,8 „	66403677	0,5815071 „	1,6 „	0,64 „
0,9 „	71629787	0,7196609 „	1,8 „	0,81 „
1 „	76159416	0,8675617 „	2 „	1 „
2 „	96402758	2,6500055 „	4 „	4 „
3 „	99505475	4,6186570 „	6 „	9 „
4 „	99932930	6,6143765 „	8 „	16 „
5 „	99990920	8,6137964 „	10 „	25 „
6 „	99998771	10,6137179 „	12 „	36 „
7 „	99999834	12,6137073 „	14 „	49 „
8 „	99999980	14,6137059 „	16 „	64 „
9 „	99999997	16,6137057 „	18 „	81 „
10 „	99999999,6	18,6137056 „	20 „	100 „

§. 61. **Anmerkung.** Um durch Versuche den Widerstand der Flüssigkeiten finden zu können, verfertigte ich ein viereckiges Gefäss von Holz, welches inwendig 9 englische Zoll lang und breit und $9^1/_2$ Fuss tief war und füllte es mit Regenwasser an. Nachdem ich nun Kugeln von Wachs angefertigt hatte, welche in ihrem Innern Blei enthielten, notirte ich die Zeiten, welche diese Kugeln gebrauchten, um von einer Höhe von 112 Zoll herabzufallen.

Der Cubikfuss Regenwasser wiegt 76 Pfund Römisch und 1 Cubikzoll $^{19}/_{36}$ Unzen = $258^1/_8$ Gran. Eine Kugel von 1 Zoll im Durchmesser wiegt 132,645 Gran in der Luft, oder 132,8 Gran im leeren Raume, und eine andere beliebige Kugel verhält sich, wie der Unterschied ihres Gewichts im leeren Raume und im Wasser.[180])

1. **Versuch.** Eine Kugel, welche in der Luft $156^1/_4$ und im Wasser 77 Gran wiegt, brauchte 4 Secunden, um aus einer Höhe von 112 Zoll herabzufallen. Ein wiederholter Versuch ergab dasselbe Resultat.

Das Gewicht dieser Kugel beträgt im leeren Raume $156^{13}/_{36}$ Gran, und der Ueberschuss desselben über ihr Gewicht im Wasser beträgt $79^{13}/_{36}$ Gran, woraus man ihren Durchmesser = 0,84224 Zoll findet.[181]) Derselbe Ueberschuss verhält sich zum Gewicht der Kugel im leeren Raume, wie die Dichtigkeit des Wassers zur Dichtigkeit der Kugel und eben so verhalten sich $^8/_3$ des Durchmessers (d. h. 2,24597 Zoll) zum Wege 2F; es wird also 2F = 4,4256 Zoll. Die Kugel durchläuft in

Zeit von 1 Secunde 193 1/3 Zoll, wenn sie im leeren Raume vermöge der Kraft ihres ganzen Gewichtes von 156 13/38 Gran fällt. Durch ihr Gewicht im Wasser, welches 77 Gran beträgt, durchläuft sie während derselben Zeit im Wasser 95,219 Zoll, wenn sie darin fällt, ohne Widerstand zu erleiden. In der Zeit G, welche sich zu 1 Secunde verhält, wie $\sqrt{F} : \sqrt{95,219}$, wird sie den Weg F = 2,2128 Zoll durchlaufen, und die Geschwindigkeit H erlangen, die grösste, womit sie im Wasser fallen kann. Nun ist G = 0,15244 Secunde, in welcher Zeit die Kugel mit der grössten Geschwindigkeit H den Weg 2F = 4,4256 Zoll zurücklegen und in 4 Secunden einen Weg von 116,1245 Zoll durchlaufen würde. Subtrahirt man hiervon den Weg 1,3862944 . F = 3,0676 Zoll, so bleibt der Weg 113,0569 Zoll übrig, welchen die Kugel in 4 Secunden beschreiben wird, wenn sie in einem grossen Gefässe voll Wassers fällt. Dieser Weg muss wegen der geringen Breite des Gefässes, wovon ich gesprochen habe, in einem Verhältniss vermindert werden, welches aus dem halben Verhältniss der Oeffnung des Gefässes zum Unterschiede zwischen der Oeffnung und dem halben grössten Kreise der Kugel und dem einfachen ganzen Verhältniss der Oeffnung zum Unterschiede zwischen ihr und dem grössten Kreise der Kugel zusammengesetzt ist, d. h. im Verhältniss 1 : 0,9914.

Nachdem dies geschehen ist, erhält man den Weg 112,08 Zoll, welchen die Kugel sehr nahe nach der Theorie in 4 Secunden hätte zurücklegen sollen, indem sie in dem mit Wasser angefüllten Gefässe herabfiel. Nach dem Versuche legte sie 112 Zoll zurück.[182])

2. Versuch. Drei gleiche Kugeln, deren jede in der Luft 76 1/3 und im Wasser 5 1/16 Gran wog, wurden eine hinter der anderen im Wasser sich selbst überlassen und durchliefen bei ihrem Falle einen Weg von 112 Zoll in 15 Secunden. Stellt man die Rechnung an, so findet man das Gewicht einer jeden Kugel im leeren Raume = 76 5/12 Gran und den Ueberschuss des letzteren über ihr Gewicht im Wasser 71 17/48 Gran. Der Durchmesser der Kugeln ergibt sich = 0,81296 Zoll und 8/3 desselben = 2,16789, so wie 2F = 2,3217 Zoll. Ferner ergab sich der Weg, welchen die fallende Kugel in 1 Secunde zurückgelegt haben würde, wenn sie, ohne Widerstand zu erleiden, vermöge ihres Gewichtes von 5 1/16 Gran gefallen wäre, = 12,808 Zoll und die Zeit G = 0,301056 Secunde.

Die Kugel wird also mit der grössten Geschwindigkeit, mit welcher sie im Wasser vermöge ihres Gewichtes von 5 1/16 Gran, während 0,301056 Secunde durch einen Weg von 2,3217 Zoll herabsteigen könnte, während 15 Secunden einen Weg von 115,678 Zoll zurücklegen. Subtrahirt man hiervon 1,3862944 . F = 1,609 Zoll; so bleiben übrig 114,069 Zoll, welche die Kugel während derselben Zeit, in einem grösseren Gefässe hätte zurücklegen müssen. Wegen der geringeren Weite unseres Gefässes muss man nämlich ungefähr 0,895 Zoll abziehen, und es bleibt so ein Weg von 113,174 Zoll übrig, welchen ungefähr die Kugel, der Theorie ent-

sprechend, in 15 Secunden hätte zurücklegen sollen, wogegen sie beim Versuche 112 Zoll wirklich durchlaufen hat. Der Unterschied ist unmerklich.

3. Versuch. Drei gleiche Kugeln, jede in der Luft 121 und im Wasser 1 Gran wiegend, wurden nach und nach sich selbst überlassen und legten bei ihrem Fall im Wasser einen Weg von 112 Zoll, in den bezüglichen Zeiten von 46, 47 und 50 Secunden zurück.

Der Theorie zufolge hätten sie diesen Weg ungefähr in 40 Secunden zurücklegen sollen; warum fielen sie langsamer? Vielleicht muss man es dem Umstande zuschreiben, dass bei langsamen Bewegungen das Verhältniss des aus der Kraft der Trägheit entspringenden Widerstandes zu demjenigen, welcher aus anderen Ursachen entspringt, kleiner ist. Vielleicht muss man es kleinen Blasen zuschreiben, welche sich an die Kugel hängen, oder auch der Verdünnung des Wachses, die entweder durch die Wärme der Hand oder durch die der Luft herbeigeführt wurde, oder endlich einigen unmerklichen Fehlern, welche ich beging, als ich die Kugeln im Wasser abwog. Ich weiss nicht, an welche dieser Ursachen ich mich halten soll und schliesse daher aus diesem Versuche, dass man bei dergleichen Experimenten Kugeln von mehreren Granen Gewicht im Wasser anwenden muss, um ein zuverlässiges und glaubwürdiges Resultat zu erhalten.

4. Versuch. Die vorherbeschriebenen Versuche habe ich angestellt, um den Widerstand der Flüssigkeiten zu entdecken, bevor ich die in den zunächst vorhergehenden Paragraphen auseinandergesetzte Theorie kannte. Hierauf verfertigte ich, um die letztere zu prüfen, einen hölzernen Kasten, welcher im Lichten $8^2/_3$ Zoll breit und $15^1/_3$ Fuss tief war, und bereitete 4 aus Wachs und Blei, letzteres im Innern derselben, zusammengesetzte Kugeln. Jede derselben wog in der Luft $139^1/_4$, im Wasser $7^1/_8$ Gran. Ich liess sie so fallen, dass ich mittelst einer Halbsecunden-Pendeluhr die Zeit bemerken konnte, welche sie zu ihrem Falle im Wasser brauchten. Als ich sie wog und fallen liess, hatte ich dafür gesorgt, dass sie bereits einige Zeit erkaltet waren; weil die Wärme das Wachs auflockert und diese Auflockerung sein Gewicht im Wasser vermindert, wie auch weil das durch die Wärme aufgelockerte Wachs nicht in demselben Augenblick, wo es erkaltet, zu seiner früheren Dichtigkeit zurückkehrt. Die Kugeln wurden ganz in's Wasser eingetaucht, ehe ich sie fallen liess, aus Furcht, dass das Gewicht des nicht eingetauchten Theiles ihren Fall im ersten Augenblick beschleunigen möchte. Waren sie nun ganz eingetaucht und in Ruhe, so liess ich sie mit vieler Sorgfalt fallen, damit meine Hand ihnen keinen Stoss mittheilte. Sie legten nacheinander bei ihrem Falle, in den Zeiten von $47^1/_2$, $48^1/_2$, 50 und 51 Schwingungen eine Höhe von 15 Fuss 2 Zoll zurück. Bei etwas kälterem Wetter als zu der Zeit, wo ich das Gewicht der Kugeln bestimmt hatte, wiederholte ich die Versuche an einem anderen Tage, und sie brauchten zu ihrem Falle 49, $49^1/_2$, 50 und 53 Schwingungen, und bei

einem dritten Versuche $49^1/_2$, 50, 51 und 53 Schwingungen. Nachdem ich endlich den Versuch sehr oft wiederholt hatte, erforderten sie meistens $49^1/_2$ und 50 Schwingungen. Im Fall die Dauer grösser war, fand vermuthlich durch einen Stoss gegen die Wände des Gefässes eine Verzögerung statt.

Stellt man eine Rechnung nach der Theorie an, so findet man das Gewicht der Kugel im leeren Raume = $139^2/_5$ Gran, den Durchmesser = 0,99868 Zoll und daher $^8/_3$ desselben = 2,66315 Zoll. Der Weg 2F wird = 2,8066 Zoll und der Weg, welchen die $7^1/_8$ Gran wiegende Kugel bei ihrem Falle ohne Widerstand in 1 Secunde zurücklegen würde, = 9,88164 Zoll, so wie die Zeit G = 0,376843 Secunde. Die Kugel legt demnach mit der grössten Geschwindigkeit, mit welcher sie vermöge ihres Gewichtes im Wasser fallen könnte, in 0,376843 Secunde einen Weg von 2,8066 Zoll, in 1 Secunde 7,44766 Zoll und in 25 Secunden oder 50 Schwingungen einen Weg von 186,1915 Zoll zurück. Subtrahirt man hiervon 1,386294 . F = 1,9454 Zoll, so bleibt übrig 184,2461 Zoll, welchen Weg die Kugel während derselben Zeit in einem sehr weiten Gefässe zurücklegen würde.

Wegen der geringen Weite des von mir angewandten Gefässes muss man diesen Weg in einem Verhältniss vermindern, welches aus dem halben Verhältniss der Oeffnung des Gefässes zum Unterschied zwischen ihr und dem halben grössten Kreise der Kugel, und dem einfachen Verhältniss derselben Oeffnung zum Unterschiede zwischen ihr und dem ganzen grössten Kreise der Kugel zusammengesetzt ist. Man erhält so die Höhe 181,86 Zoll, welche die Kugeln sehr nahe nach der Theorie während 50 Schwingungen im Gefäss hätte zurücklegen sollen. Sie fielen wirklich durch ungefähr 182 Zoll während $49^1/_2$ und 50 Schwingungen.

5. Versuch. Vier Kugeln, deren jede in der Luft $154^3/_8$ und im Wasser $21^1/_2$ Gran wog, wurden mehrmals hineingeworfen und legten einen Weg von 15 Fuss 2 Zoll in $28^1/_2$, 29, $29^1/_2$ und 30, bisweilen aber während 31, 32 und 33 Schwingungen zurück.

Nach der Theorie wären ungefähr 29 Schwingungen erforderlich gewesen.

6. Versuch. Fünf Kugeln, jede in der Luft $212^3/_8$ und im Wasser $79^1/_2$ Gran wiegend, legten mehrmals eine Höhe von 15 Fuss 2 Zoll während 15, $15^1/_2$, 16, 17 und 18 Schwingungen zurück.

Nach der Theorie hätten sie beiläufig 15 gebraucht.

7. Versuch. Vier Kugeln, jede in der Luft $293^3/_8$, im Wasser $35^7/_8$ Gran wiegend, legten bei mehrmaligem Versuche eine Höhe von 15 Fuss 1,5 Zoll während $29^1/_2$, 30, $30^1/_2$, 31, 32 und 33 Schwingungen zurück.

Die Theorie ergiebt ungefähr 28.

Indem ich nach der Ursache forschte, warum von mehreren an Gewicht und Grösse gleichen Kugeln einige schneller, andere langsamer

fielen, fand ich folgendes. Diese Kugeln drehten sich im ersten Augenblick, wo sie sich selbst überlassen wurden und zu fallen anfingen, um ihre Mittelpunkte, weil diejenige ihrer Seiten, welche vielleicht ein wenig schwerer war, zuerst herabfiel und eine drehende Bewegung verursachte. Die Kugel muss nämlich bei einer drehenden Bewegung dem Wasser mehr Bewegung mittheilen, als wenn sie, ohne sich zu drehen, herabsänke; und indem diese Mittheilung stattfindet, verliert sie einen Theil ihrer eigenen Bewegung, durch welche ihr Sinken bewirkt werden soll. Sie muss daher eine grössere oder kleinere Verzögerung erleiden, je nachdem sie grössere oder kleinere Schwingungen macht. Ferner entfernt sich die Kugel stets von derjenigen Seite, an welcher die Drehung beginnt, hierdurch nähert sie sich den Wänden des Gefässes und kann bisweilen gegen dieselben stossen. Die Drehung ist stärker bei schwereren Kugeln, und diese theilen daher dem Wasser mehr Bewegung mit. Um diese Drehungen zu vermindern, verfertigte ich neue Kugeln, welche ebenfalls aus Wachs und Blei zusammengesetzt waren, und brachte das letztere an einer Seite der Kugel, der Oberfläche nahe an. Hierauf liess ich die Kugel, so weit es möglich war, dergestalt fallen, dass beim Anfange der Bewegung die schwerste Seite sich am tiefsten befand. Auf diese Weise wurden die Schwingungen viel kleiner als vorhin, und die Kugeln fielen in weit weniger ungleichen Zeiträumen, wie man aus den folgenden Versuchen ersieht.

8. Versuch. Vier Kugeln, von denen jede in der Luft 139 und im Wasser $6^1/_2$ Gran wog, wurden wiederholt sich selbst überlassen, und legten nach einer Anzahl Schwingungen, welche stets zwischen 50 und 52 lag und meistens sehr nahe = 51 war, eine Höhe von 182 Zoll zurück.

Die Theorie erfordert ungefähr 52 Schwingungen.

9. Versuch. Bei mehrmaligem Versuch mit 4 Kugeln, deren jede in der Luft $273^1/_4$ und im Wasser $140^3/_4$ Gran wog, fielen sie durch eine Höhe von 182 Zoll in Zeit von einer Anzahl Schwingungen, welche stets zwischen 12 und 13 lag.

Die Theorie ergibt ungefähr $11^1/_3$.

10. Versuch. Denselben Versuch stellte ich mehrmals mit 4 Kugeln an, deren jede in der Luft 384 und im Wasser $119^1/_2$ Gran wog. Sie brauchten, um eine Höhe von $181^3/_4$ Zoll zurückzulegen, an Zeit $17^3/_4$, 18, $18^1/_2$ und 19 Schwingungen. Bei diesem letzten Versuche hörte ich bisweilen die Schläge, welche sie gegen die Wände des Gefässes ausübten, ehe sie zu Boden fielen.

Nach der Theorie werden etwa $15^5/_9$ Schwingungen erfordert.

11. Versuch. Bei mehrmaligem Versuch brauchten drei Kugeln, deren jede in der Luft 48 und im Wasser $3^{29}/_{32}$ Gran wog, $43^1/_2$, 44, $44^1/_2$, 45 und 46 Schwingungen, am häufigsten aber 44 und 45, um eine Höhe von ungefähr $182^1/_2$ Zoll zurückzulegen.

Die Theorie ergibt $46^5/_9$ Schwingungen.

12. Versuch. Drei gleiche Kugeln, deren jede in der Luft 141

und im Wasser $4^3/_8$ Gran wog, erforderten bei mehrmaligem Versuche 61, 62, 63, 64 und 65 Schwingungen, um einen Weg von 182 Zoll zurückzulegen.

Nach der Theorie hätten sie etwa $64^1/_2$ Schwingungen gebraucht.

Aus diesen Versuchen ergibt sich klar, dass, wenn die Kugeln langsamer fielen, wie in dem 2., 4., 5., 8., 11. und 12. Versuch, die Zeiten ihres Falles hinreichend mit denen der Theorie übereinstimmten; dass hingegen, wenn sie schneller fielen, wie im 6., 9. und 10. Versuch, der von ihnen erlittene Widerstand in einem etwas grösseren, als dem doppelten Verhältniss der Geschwindigkeiten stand. Sie oscillirten nämlich ein wenig im Fallen, und diese Oscillationen hören bald bei leichten Kugeln auf, welche wegen ihrer geringen Bewegung langsam fallen; in grösseren und schwereren Kugeln währen sie hingegen länger fort, weil die Bewegung mehr Kraft besitzt, und diese schwingende Bewegung durch das, die Kugel umgebende, Wasser nicht früher aufgehoben werden kann als bis der Körper mehrere Schwingungen gemacht hat. Es kann sich auch noch ereignen, dass die Kugeln, je grösser ihre Geschwindigkeit ist, durch das Wasser einen desto geringeren Druck an ihren hinteren Theilen erleiden. Vergrösserte man die Geschwindigkeit beständig, so würden sie endlich einen leeren Raum hinter sich lassen, im Fall man nicht zu gleicher Zeit die Flüssigkeit stärker comprimirte. Nun muss (§§. 43 und 44) die Zusammendrückung im doppelten Verhältniss der Geschwindigkeit zunehmen, damit der Widerstand in demselben doppelten Verhältniss stehe. Da dies aber nicht geschieht, so werden die geschwinderen Kugeln einen etwas schwächeren Druck an ihren hinteren Theilen erleiden, und es bewirkt der Mangel dieses Druckes, dass der von ihnen erlittene Widerstand in einem etwas grösseren Verhältniss, als dem doppelten der Geschwindigkeit steht.

Die Theorie stimmt also mit den Erscheinungen der im Wasser fallenden Körper überein; wir müssen noch untersuchen, was mit den in der Luft fallenden Körpern geschieht.

13. Versuch. Von der Spitze der St. Paulskirche zu London liess man im Juni 1710 zu gleicher Zeit zwei Glaskugeln fallen, von denen die eine voll Quecksilber, die andere voll Luft war. Sie legten bei ihrem Falle einen Weg von 220 englischen Fussen zurück. Eine hölzerne Tafel war an einer Kante mittelst eiserner Zapfen befestigt, mit der anderen Kante stützte sie sich auf einen hölzernen Riegel. Beide Kugeln wurden auf sie gelegt, und fielen gleichzeitig erdwärts, indem der Riegel mittelst eines bis zur Erde herabgehenden Eisendrahtes fortgezogen wurde. Es klappte hierauf die, allein durch ihre Zapfen gehaltene Tafel um, und in demselben Augenblick wurde mittelst des Drahtes eine Secunden-Pendeluhr in Bewegung gesetzt und zum Schwingen gebracht. Durchmesser und Gewicht der Kugeln wie auch die Zeiten waren so, wie sie in der folgenden Tabelle aufgeführt sind.

Kugeln voll Quecksilber.			Kugeln voll Luft.		
Gewicht.	Durchmesser.	Zeiten des Falles.	Gewicht.	Durchmesser.	Zeiten des Falles.
908 Gran	0,8 Zoll	4 Secunden	510 Gran	5,1 Zoll	$8^1/_2$ Secund.
983 „	0,8 „	4 — „	642 „	5,2 „	8 „
866 „	0,8 „	4 „	599 „	5,1 „	8 „
747 „	0,75 „	4 + „	515 „	5,0 „	$8^1/_4$ „
808 „	0,75 „	4 „	483 „	5,0 „	$8^1/_2$ „
784 „	0,75 „	4 + „	641 „	5,2 „	8 „

Uebrigens müssen die Zeiten des Falles, welche wir bei diesen Versuchen beobachtet haben, verbessert werden. Die Kugeln voll Quecksilber hätten (nach Galilei) in 4 Secunden 257 Fuss zurücklegen sollen, legten aber nur 220 Fuss in 3 Secunden 42 Tertien zurück. Die hölzerne Tafel musste also wohl einige Zeit brauchen, um umzuklappen; wenn man den Riegel fortzog. Hierdurch verhinderte sie beim Anfange den Fall der Kugeln. Diese befanden sich nämlich ungefähr in der Mitte der Tafel, aber ihrer Axe etwas näher, als dem Riegel. Hierdurch wurde die Zeit des Falles um etwa 18 Tertien verlängert, welche man von den obigen Zeiten abziehen muss. Besonders ist diese Correction bei den grösseren Kugeln erforderlich, welche wegen ihrer grösseren Durchmesser etwas länger auf der umklappenden Tafel blieben. Nach Anbringung dieser Correction waren die Zeiten, in denen die sechs grösseren Kugeln herabfielen:

8	Secunden	12	Tertien
7	„	42	„
7	„	42	„
7	„	57	„
8	„	12	„
7	„	42	„

Die fünfte der mit Luft angefüllten Kugeln hatte 5 Zoll im Durchmesser, ihr Gewicht betrug 483 Gran und sie brauchte 8 Secunden 12 Tertien, um 220 Fuss zu durchfallen. Das Gewicht einer ihr gleichen Wasserkugel beträgt 16600 Gran und das einer ihr gleichen Luftkugel $^{16600}/_{860} = 19^3/_{10}$ Gran. Das Gewicht der genannten Kugel im leeren Raume beträgt daher $(483 + 19^3/_{10}) = 502,3$ Gran, und dasselbe verhält sich zu dem Gewicht einer Luftkugel von gleichem Volumen, wie 502,3 : 19,3. In demselben Verhältniss steht 2F zu $^8/_3$ des Durchmessers oder es ist $2F : 13^1/_3 = 502,3 : 19,3$, woraus $2F = 28$ Fuss 11 Zoll folgt. Diese Kugel würde wenn sie vermöge ihres ganzen Gewichts von 502,3 Gran im leeren Raume fiele, in 1 Secunde $193^1/_3$ Zoll wie früher zurücklegen, und mit einem Gewicht von 483 Gran 185,905 Zoll.

Mit demselben würde sie im leeren Raume den Weg F = 14 Fuss 5,5 Zoll in 57 Tertien 58 Quatertien zurücklegen, und in dieser Zeit die grösste Geschwindigkeit erlangen, mit welcher sie in der Luft herab-

steigen kann. Mit dieser Geschwindigkeit würde die Kugel in 8 Secunden 12 Tertien einen Weg von 245 Fuss $5^1/_3$ Zoll zurücklegen. Subtrahirt man hiervon 1,3863 . F = 20 Fuss 0,5 Zoll, so bleiben 225 Fuss 5 Zoll, welche die Kugel nach der Theorie während 8 Secunden 12 Tertien hätte durchlaufen sollen. Sie durchlief dem Versuche zufolge 220 Fuss, und der Unterschied ist daher nicht bedeutend. Indem ich eine, der bisherigen ähnliche, Rechnung mit den übrigen Kugeln anstellte, erhielt ich die folgende Tabelle:

Gewicht der Kugeln.	Durchmesser derselben.	Zeiten zur Durchlaufung von 120 Fuss gebraucht.	Wege nach der Theorie durchfallen.	Unterschied, Rechnung — Beobachtung.
510 Gran	5,1 Zoll	8 Sec. 12 Tertien	226 Fuss 11 Zoll	6 Fuss 11 Zoll
642 „	5,2 „	7 „ 42 „	230 „ 9 „	10 „ 9 „
599 „	5,1 „	7 „ 42 „	227 „ 10 „	7 „ 10 „
515 „	5,0 „	7 „ 57 „	224 „ 5 „	4 „ 5 „
483 „	5,0 „	8 „ 12 „	225 „ 5 „	5 „ 5 „
641 „	5,2 „	7 „ 42 „	230 „ 7 „	10 „ 7 „

14. Versuch. Im Juni 1719, fing Dr. Desaguliers diese Versuche folgendermaassen auf's neue zu machen an. Er gab mehreren Schweinchlasen, mittelst einer hölzernen Hohlkugel, eine sphärische Form und blies, nachdem sie feucht gemacht waren, Luft in dieselben, wodurch sie gezwungen wurden, die ganze Höhlung dieser Kugel auszufüllen. Nachdem sie hierauf trocken geworden waren und er die sie umgebenden Hölzer fortgenommen hatte, liess er sie von einer Stelle herabfallen, welche man auf der Spitze der gewölbten Rotunde in der Kirche hierzu eingerichtet hatte. Sie fielen auf diese Weise aus einer Höhe von 272 Fuss herab, und zu gleicher Zeit liess er etwa 2 Pfund schwere Bleikugeln herabfallen. Während dieser Zeit waren auf der Spitze der Kirche, von wo man die Kugeln fallen liess, Personen aufgestellt, welche die Zeit beobachteten, die während ihres Falles verstrich. Andere Personen standen auf dem Pflaster der Kirche, um den Unterschied zu beobachten, welche zwischen den Fallzeiten der Blase und der Bleikugel stattfand. Diese Unterschiede wurden durch die Schläge einer Halbsecunden-Pendeluhr gemessen. Eine der unten befindlichen Personen hatte eine Spiraluhr, welche Viertelsecunden angab, und eine andere hatte eine künstliche Maschine verfertigt, an welcher ein Viertelsecunden-Pendel angebracht war. Eine ähnliche Maschine hatte eine der oben befindlichen Personen. Diese Instrumente waren so eingerichtet, dass ihre Bewegungen beliebig begannen und endeten, sobald man es wünschte. Die Bleikugel brauchte zu ihrem Falle sehr nahe $4^1/_4$ Secunden. Addirt man hierzu die erwähnten Unterschiede, so erhält man den Zeitraum, welchen die Blase zu ihrem Falle brauchte. Die Zeiten, in denen fünf Blasen herabfielen, über die Fallzeit der Kugel waren:

beim ersten Male $14^3/_4$, $12^3/_4$, $14^5/_8$, $17^3/_4$, $16^7/_8$ Secunden,
„ zweiten „ $14^1/_2$, $14^1/_4$, 14, 19, $16^3/_4$ „

Addirt man hierzu die $4^1/_4$ Secunden, welche die Kugel zn ihrem Falle hrauchte, so erhält man die ganzen Zeiten, welche die Blasen zu ihrem Falle brauchten, nämlich

beim ersten Male 19, 17, $18^7/_8$, 22, $21^1/_8$ Secunden,
„ zweiten „ $18^3/_4$, $18^1/_2$, $18^1/_4$, $23^1/_4$, 21 „

Die von den oben hefindlichen Personen beohachteten Zeiten waren

beim ersten Male $19^3/_8$, $17^1/_4$, $18^3/_4$, $22^1/_8$, $21^5/_8$ Secunden,
„ zweiten „ 19, $18^5/_8$, $18^3/_8$, 24, $21^1/_4$ „

Uebrigens fielen die Blasen nicht immer in gerader Linie herab, nnd hisweilen schlugen sie um nnd oscillirten von einer Seite zur anderen wodurch ihre Fallzeit bisweilen um $^1/_2$ Secunde, bald um 1 Secunde vergrössert wurde. Die zweite und vierte Blase fielen beim ersten, die erste und dritte beim zweiten Male am meisten in gerader Linie. Die fünfte Blase war faltig, nnd diese Falten verzögerten etwas ihren Fall. Ich leitete den Durchmesser der Blasen aus ihrem Umfange her, welchen ich mittelst eines um sie gelegten Fadens maass. Ich verglich die Theorie mit der Erfahrung in der folgenden Tabelle, indem ich die Dichtigkeit der Luft zu der des Regenwassers im Verhältniss 1 : 860 annahm, und die Wege berechnete, welche die Kugeln hel ihrem Falle nach der Theorie hätten zurücklegen sollen.

Gewicht der Blasen.	Durchmesser derselben.	Fallzeit durch 272 Fuss	Wege, während dieser Zeiten nach der Theorie zurückzulegen.	Unterschied, Rechnung — Beobachtung.
128 Gran	5,28 Zoll	19 Secunden	271 Fuss 11 Zoll	— 0 Fuss, 1 Zoll
156 „	5,19 „	17 „	272 „ 0,5 „	+ 0 „ 0,5 „
$137^1/_2$ „	5,3 „	$18^1/_2$ „	272 „ 7 „	+ 0 „ 7 „
$97^1/_2$ „	5,26 „	22 „	277 „ 4 „	+ 5 „ 4 „
$99^1/_8$ „	5,0 „	$22^1/_8$ „	282 „ 0 „	+ 10 „ 0 „

Unsere Theorie bestimmt also fast genau den ganzen Widerstand, welchen die sowohl im Wasser, als in der Luft sich bewegenden Kugeln zu erleiden haben, und dieser Widerstand ist, wenn die Geschwindigkeiten nnd Grössen der Kugeln gleich sind, der Dichtigkeit der Flüssigkeit proportional. In der Anmerkung zum Abschnitt VI. hahe ich durch Pendelversuche gezeigt, dass gleiche Kugeln, welche sich in der Luft, im Wasser nnd im Quecksilber mit gleichen Geschwindigkeiten bewegen, einen der Dichtigkeit der Flüssigkeiteu proportionalen Widerstand erleiden. Hier hahe ich es aher genauer durch Versuche mit Körpern dargethan, welche in der Luft und im Wasser fielen. Die Pendel erregen nämlich bei jeder Schwingung in der Flüssigkeit eine Bewegung, welche stets eine dem zurückkehrenden Pendel entgegengesetzte Richtung hat, und sowohl der von dieser Bewegung herrührende Widerstand, als auch derjenige, welchen der Faden des Pendels hervorbringt, bewirken, dass

dasselbe einen grösseren Widerstand erleidet, als derjenige, welchen die Versuche mit fallenden Körpern ergeben haben. Nach den in jener Anmerkung aufgeführten Pendel-Versuchen sollte nämlich eine Kugel von derselben Dichtigkeit, welche das Wasser hat, $^1/_{3342}$ ihrer Bewegung verlieren, während sie in der Luft die Hälfte ihres Durchmessers zurücklegte. Nach der in diesem Abschnitt VII. aufgestellten Theorie, welche durch Versuche mit fallenden Körpern bestätigt wird, würde dieselbe Kugel, während sie denselben Weg zurücklegt, nur $^1/_{4586}$ ihrer Bewegung verlieren. Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Dichtigkeit des Wassers zu derjenigen der Luft sich verhalte, wie 860 : 1. Bei den Pendelversuchen waren also die Widerstände grösser (aus den vorhin besprochenen Gründen), als bei den Versuchen mit fallenden Kugeln, und zwar ungefähr im Verhältniss 4 : 3. Da nun die Widerstände, welche Pendel erleiden, wenn sie in der Luft, im Wasser und im Quecksilber schwingen, auf dieselbe Weise durch ähnliche Ursachen vergrössert werden; so ist das Verhältniss der Widerstände in diesen Mitteln hinreichend genau, sowohl durch Pendelversuche, als durch Versuche mit fallenden Körpern gegeben. Man kann daraus schliessen, dass die Widerstände, welche Körper bei ihrer Bewegung in beliebigen sehr lockeren Mitteln erleiden, unter übrigens gleichen Umständen, den Dichtigkeiten der Mittel proportional sind. Dies vorausgesetzt, kann man jetzt bestimmen, welchen Theil der Bewegung eine beliebige Kugel, die man in einer beliebigen Flüssigkeit fortwirft, während einer gegebenen Zeit ungefähr verlieren wird. D sei der Durchmesser der Kugel, V ihre Geschwindigkeit beim Anfang der Bewegung und T die Zeit, in welcher sie im leeren Raume mit der Geschwindigkeit V einen Weg beschreiben wird, der sich zu $^8/_3$D verhält, wie die Dichtigkeit der Kugel zu derjenigen des Mittels. Wird die Kugel in dieser Flüssigkeit fortgeworfen, so verliert sie in einer beliebigen anderen Zeit t den Theil $\frac{t \cdot V}{T + t}$ von ihrer Geschwindigkeit, und behält noch übrig den Theil $\frac{T \cdot V}{T + t}$. Ferner beschreibt sie einen Weg, welcher sich zu demjenigen, den sie im leeren Raume während derselben Zeit und mit der gleichförmig angenommenen Geschwindigkeit V beschreiben würde, verhält wie 2,302585093 log. $\frac{T + t}{T} : \frac{t}{T}$ (nach §. 47, Zusatz 7.). Bei langsamen Bewegungen kann der Widerstand etwas kleiner sein, weil die Kugelform sich besser zur Bewegung eignet, als die Gestalt eines, über demselben Durchmesser construirten Cylinders. Bei schnelleren Bewegungen hingegen kann der Widerstand etwas grösser sein, weil die Elasticität und die Zusammendrückung der Flüssigkeiten nicht in dem doppelten Verhältniss der Geschwindigkeiten wachsen. Ich nehme aber keine Rücksicht auf diese Kleinigkeiten.

Würden selbst die Luft, das Wasser, das Quecksilber und andere ähnliche Flüssigkeiten bis in's Unendliche verdünnt, und bildeten sie so

unendlich flüssige Mittel; so würden sie desshalb nicht weniger den geworfenen Kugeln widerstehen. Der in den vorhergehenden Paragraphen besprochene Widerstand entspringt nämlich aus der Trägheit der Materie, und diese Trägheit ist den Körpern eigenthümlich und stets der Menge ihrer Materie proportional. Man kann in der That durch die Zertheilung denjenigen Widerstand vermindern, welcher aus der Zähigkeit und Reibung ihrer Theile entspringt; allein diese Zertheilung vermindert keineswegs die Menge der Materie und bleibt diese unverändert, so bleibt es auch die Kraft der Trägheit, welcher der hier besprochene Widerstand stets proportional ist. Damit dieser kleiner werde, muss man also die Menge der Materie in den Räumen vermindern, in denen die Körper sich bewegen. Aus diesem Grunde müssen die Himmelsräume, in denen die Kugeln der Planeten und Kometen sich unaufhörlich, in jedem Sinne frei und ohne bemerkbare Verminderung ihrer Geschwindigkeit bewegen, von jeder körperlichen Flüssigkeit frei sein; ausgenommen vielleicht einige sehr leichte Dünste und die durch sie gehenden Lichtstrahlen.

Die Projectile erregen also eine Bewegung in den Flüssigkeiten, in denen sie sich bewegen, und diese Bewegung entspringt aus dem Ueberschuss des Druckes der Flüssigkeit gegen die vorderen Theile des Projectils über denjenigen Druck, welchen seine hinteren Theile erleiden. Er kann ferner nicht geringer in unendlich flüssigen Mitteln sein, als in der Luft, im Wasser und Quecksilber, nach Verhältniss der Dichtigkeit der Materie, welche jedes enthält. Dieser Ueberschuss des Druckes erregt aber, nicht nur nach Verhältniss seiner Grösse, eine Bewegung der Flüssigkeit, sondern er wirkt auch auf das Projectil, um seine Bewegung zu verzögern. Daher ist der Widerstand in jeder Flüssigkeit der, durch das Projectil in derselben erregten, Bewegung proportional, und er kann nicht geringer im feinsten Aether, nach Verhältniss seiner Dichtigkeit sein, als in der Luft, im Wasser und im Quecksilber, nach Verhältniss der Dichtigkeit dieser Flüssigkeiten.

ABSCHNITT VIII.

Von der in Flüssigkeiten fortgepflanzten Bewegung.

§. 62. Lehrsatz. Ein Druck pflanzt sich in einer Flüssigkeit nur dann geradlinig fort, wenn ihre Theilchen in gerader Linie liegen.

Liegen die Theilchen a, b, c, d, e in gerader Linie, so kann sich der Druck zwar von a bis e geradlinig fortpflanzen, aber das Theil-



Fig. 180.

chen e wird gegen die schief anliegenden Theilchen f und g in schiefer Richtung drücken, und die letzteren werden nur dann den gegen sie ausgeübten Druck aushalten, wenn sie durch die entfernteren Theilchen h und k unterstützt werden, und so weit dies geschieht, drücken sie selbst wieder gegen die sie unterstützenden Theilchen. Diese werden wieder den Druck nur dann aushalten, wenn sie durch die entfernter liegenden Theilchen l und m unterstützt werden, und diese wieder drücken, u. s. w. f. in's Unendliche. Der Druck wird also, sobald er sich auf Theilchen fortpflanzt, welche nicht in gerader Linie liegen, sich spalten und alsdann in schiefer Richtung bis in's Unendliche fortpflanzen. Hat er angefangen, sich in schiefer Richtung fortzupflanzen, und trifft er dann auf weiter entlegene Theilchen, welche nicht in gerader Linie liegen, so wird er sich auf's neue spalten und zwar so oft, als er auf Theilchen trifft, welche nicht genau in gerader Linie liegen. W. z. b. w.

Zusatz. Wird ein Theil des, von einem gegebenen Punkte aus in einer Flüssigkeit fortgepflanzten, Druckes durch ein Hinderniss aufgefangen, so wird der übrige, nicht aufgefangene Theil in die hinter dem Hinderniss gelegenen Räume sich ausbreiten. Dies wird folgendermaassen gezeigt.

Vom Punkte A pflanze sich der Druck, und zwar, wenn es angeht, längs gerader Linien fort. Durch das in BC durchbohrte Hinderniss NBCK

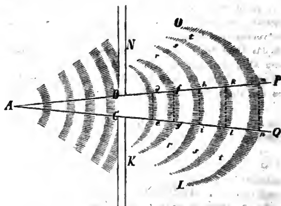


Fig. 181.

werde der ganze Druck aufgefangen, mit Ausnahme des kegelförmigen Theils APQ, welcher durch die kreisförmige Oeffnung BC hindurchgeht. Durch die Transversal-Ebenen de, fg, hi, etc. werde der Kegel APQ in Stücke getheilt, und während der Kegel ABC durch Fortpflanzung des Druckes gegen das entferntere Kegelstück degf an der Oberfläche

de drängt, dränge dieses gegen das nächstfolgende fgih an der Oberfläche fg, dieses wieder gegen ein drittes Stück u. s. w. f. in's Unendliche. Offenbar wird aber (nach dem 3. Gesetz der Bewegung) das erste Stück degf durch die Gegenwirkung des zweiten ebenso stark an seiner Oberfläche fg gedrängt und gedrückt, als es selbst gegen das zweite drängt und drückt. Das Stück degf zwischen dem Kegel Ade und zwischen dem Stück fghi wird daher von beiden Seiten her zusammengedrückt und kann (nach §. 27., Zusatz 6.) seine Gestalt nur dann beibehalten, wenn es von allen Seiten her mit derselben Kraft zusammengedrückt wird. Es wird daher mit derselben Intensität, mit welcher es an den Oberflächen de und fg zusammengedrückt wird, versuchen nach den Seiten df und eg auszuweichen und würde dort (da es nicht fest, sondern durchaus flüssig ist) heraustreten und sich ausdehnen, wenn die es umgebende Flüssigkeit nicht da wäre, durch welche jenes Streben aufgehoben wird. Ferner wird es vermöge des Strebens herauszutreten, ebenso stark gegen die an den Seiten df und eg es umgebende Flüssigkeit drücken, als das Stück fghi. Der Druck pflanzt sich daher nicht weniger von den Seiten df und eg nach den beiden Räumen NO und KL an beiden Seiten fort, als von der Oberfläche fg nach PQ hin. W. z. b. w.

§. 63. Lehrsatz. Jede in einer Flüssigkeit sich fortpflanzende Bewegung weicht vom geraden Wege nach unbewegten Räumen hin aus.

1. Fall. Es pflanze sich die Bewegung vom Punkte A (Fig. 181) aus durch die Oeffnung BC fort und gehe, wenn es möglich ist, im konischen Raume BCQP weiter längs gerader Linien, welche von A aus divergiren. Setzen wir zuerst voraus, die Bewegung sei die der Wellen auf der Oberfläche eines stillstehenden Wassers. Es seien de, fg, hi, kl etc., die höchsten Stellen der einzelnen Wellen, welche durch eben so viele zwischenliegende Thäler von einander getrennt sind. Da nun das Wasser auf den Gipfeln der Wellen höher steht, als in den unbewegten Theilen NO und KL der Flüssigkeit, so wird es von den Endpunkten e, g, i, l, etc. und d, f, h, k, etc. der Gipfel respective nach KL und NO herabfliessen, und da es in den Thälern der Wellen niedriger steht, als in den unbewegten Theilen KL und NO; so wird es von diesen nach jenen hinfliessen. Durch den ersten Abfluss werden die Gipfel, durch den letzten die Thäler sich nach beiden Seiten ausdehnen und gegen KL und NO hin fortpflanzen. Da nun die Wellenbewegung von A gegen PQ, durch einen beständigen Abfluss der Gipfel in die nächstfolgenden Thäler erfolgt und sie daher nicht geschwinder ist, als nach Verhältniss der Geschwindigkeit des Herabsteigens; da ferner das beiderseitige Herabfliessen nach KL und NO mit derselben Geschwindigkeit erfolgen muss: so wird die Ausdehnung der Wellen gegen KL und NO mit derselben Geschwindigkeit erfolgen, mit welcher die Wellen selbst von A gegen PQ geradlinig fortschreiten. Ferner wird der ganze Raum auf beiden Seiten gegen KL und NO hin, durch die sich ausdehnenden Wellen rfgr, shis, tkit, vmnv, etc. eingenommen werden. W. z. b. w.

Dass dies sich so verhalte, kann jeder mittelst eines Versuches auf ruhendem Wasser erfahren.

2. Fall. Gesetzt, dass de, fg, hi, kl, mn, etc. Stösse bezeichnen, welche sich vom Punkt A in einem elastischen Mittel fortpflanzen. Man denke sich, dass die Stösse sich mittelst auf einander folgender Verdichtungen und Verdünnungen des Mittels fortpflanzen, so dass der dichteste Theil eines jeden Stosses auf einer, um A als Mittelpunkt beschriebenen sphärischen Oberfläche liege und zwischen den auf einander folgenden Stössen sich gleiche Zwischenräume befinden. Es mögen de, fg, hi, kl, etc. die dichtesten Theile der Stösse bezeichnen, welche durch die Oeffnung BC sich fortgepflanzt haben. Da das Mittel dort dichter ist, als in den auf beiden Seiten gelegenen Räumen KL und NO, so wird es sich eben so sehr gegen diese hin ausdehnen, als gegen die lockeren Zwischenräume der Stösse, und da es auf diese Weise immer lockerer aus der Gegend der Zwischenräume, hingegen dichter aus der Gegend der Stösse hervortritt; so wird es an deren Bewegung Theil nehmen. Da nun die fortschreitende Bewegung der Stösse aus der beständigen Erweiterung der dichteren Theile gegen die vorangehenden lockerern Zwischenräume entspringt; da ferner die Stösse ungefähr mit derselben Geschwindigkeit gegen die ruhenden Theile KL und ON des Mittels sich erweitern müssen: so werden jene Stösse sich überall ungefähr mit derselben Geschwindigkeit gegen die unbewegten Räume KL und ON hin ausdehnen, mit welcher sie sich geradlinig vom Mittelpunkt A aus fortpflanzen. Sie nehmen daher den ganzen Raum KLON ein. W. z. b. w.

Wir nehmen dies bei den Tönen wahr, welche entweder hinter einem zwischenliegendem Berge gehört werden, oder durch ein Fenster in's Zimmer treten, sich nach allen Theilen des letzteren ausbreiten und in allen Ecken gehört werden, indem nicht die entgegengesetzten Wände sie zurückwerfen, sondern die Fortpflanzung vom Fenster aus direct erfolgt, soweit man dies nämlich mittelst der Sinne beurtheilen kann.

3. Fall. Gesetzt endlich, dass eine Bewegung irgend einer Art sich von A aus durch die Oeffnung BC fortpflanze. Da diese Fortpflanzung nur erfolgt, in so fern die dem Centrum A näher liegenden Theile des Mittels gegen die entfernten drücken und dieselben bewegen; da ferner die gedrückten Theile flüssig sind und daher nach allen den Seiten hin, wo sie weniger gedrückt werden, ausweichen: so werden dieselben gegen alle ruhenden Theile des Mittels, sowohl gegen die zur Seite liegenden KL und NO, als gegen die vorderen PQ zurückweichen. Auf diese Weise wird jede Bewegung, sobald sie durch die Oeffnung BC gegangen ist, sich auszudehnen anfangen und hierauf, wie vom Anfangs- und Mittelpunkt aus, sich nach allen Seiten geradlinig fortpflanzen. W. z. b. w.

§. 64. Lehrsatz. Jeder zitternde Körper wird in einem elastischen Mittel die Bewegung seiner Stösse überall hin geradlinig fortpflanzen; in einem nicht elastischen Mittel aber wird er eine kreisförmige Bewegung hervorbringen.

1. Fall. Die Theile des zitternden Körpers werden nämlich, indem sie wechselweise vor- und zurückgehen, bei ihrem Fortschreiten die ihnen nächsten Theile des Mittels drängen und fortstossen, und durch diesen Drang sie zusammendrücken und verdichten; hierauf aber bei ihrer Rückkehr den zusammengedrückten Theilen gestatten, zurückzugehen und sich auszudehnen. Daher werden die dem zitternden Körper am nächsten liegenden Theile wechselseitig vor- und zurückgehen, gleich wie die Theile des zitternden Körpers selbst, und eben so wie diese die ihnen nächsten Theile des Mittels antreiben, werden auch die letzteren wieder die ihnen zunächst liegenden Theile antreiben, eben so diese die ihnen weiter folgenden, u. s. w. f. in's Unendliche. So wie ferner die ersten Theile des Mittels beim Vorwärtsschreiten sich verdichten und bei der Rückkehr auflockern, wird dasselbe mit den übrigen Theilen der Fall sein. Daher werden sie nicht alle zugleich vor- und zurückgehen (sie würden nämlich, indem sie gleiche Entfernung von einander behielten, auf diese Weise sich nicht wechselseitig verdünnen und verdichten) sondern sich einandern nähern, wenn sie dichter, und von einander entfernen, wenn sie lockerer werden; also werden einige von ihnen vorwärts gehen, während die anderen zurückkehren.[183]) Dies wird wechselweise bis in's Unendliche geschehen. Die vorwärtsgehenden und dabei verdichteten Theile machen wegen ihrer fortschreitenden Bewegung, durch welche sie auf alle ihnen entgegenstehenden Körper einen Schlag ausüben, die Stösse aus, und es pflanzen sich daher die auf einander folgenden Stösse von jedem zitternden Körper geradlinig fort. Das Letztere geschieht in ungefähr gleichen Abständen von einander, wegen der gleichen Zeitintervalle, in denen der Körper durch seine zitternden Bewegungen die einzelnen Stösse hervorbringt. Obgleich die Theile des zitternden Körpers nach einer bestimmten Richtung vor- und rückwärts gehen, so werden doch die von ihm durch ein Mittel fortgepflanzten Stösse sich, nach dem vorhergehenden Paragraphen, auch nach den Seiten hin ausdehnen und sich so von jenem zitternden Körper als gemeinschaftlichen Mittelpunkt, längs nahezu sphärischer und concentrischer Oberflächen nach allen Seiten hin fortpflanzen.

Ein Beispiel hierzu haben wir an den Wellen, welche durch einen zitternden Finger hervorgebracht werden, und alsdann nicht nur beiderseits längs der Richtung, in welcher der Finger sich bewegt, sich fortpflanzen, sondern auch den letzteren, nach Art concentrischer Kreise, sogleich umschliessen, und sich so nach allen Richtungen ausbreiten. Das Gewicht der Wellen ersetzt hier nämlich die Stelle einer elastischen Kraft.

2. Fall. Ist das Mittel nicht elastisch, so können seine, durch die vibrirenden Theile des zitternden Körpers gedrückten, Theile nicht verdichtet werden, und es pflanzt sich die Bewegung augenblicklich nach den Seiten fort, wo das Mittel am leichtesten nachgiebt, d. h. nach den Stellen, welche der zitternde Körper sonst hinter sich leer lassen würde.

Dasselbe findet statt, im Fall ein Körper in einem beliebigen Mittel fortgeworfen wird. Das vor den Projectilen ausweichende Mittel entfernt sich von ihnen nicht bis in's Unendliche, sondern dringt in kreisförmiger Bewegung in die Räume, welche der Körper hinter sich leer lässt. So oft daher ein zitternder Körper sich nach irgend einer Seite hin bewegt, begiebt sich das ausweichende Mittel in kreisförmiger Bewegung nach der Stelle, welche der Körper verlässt und so oft der Körper nach seinem früheren Orte zurückkehrt, wird das Mittel von dort fortgestossen und kehrt ebenfalls nach seiner früheren Stelle zurück. Wenn auch der zitternde Körper nicht fest, sondern auf jede Weise biegsam ist, so bleibt seine Grösse doch unverändert, weil er durch seine zitternde Bewegung das Mittel nirgends zusammendrücken kann, sondern dieses ihm sogleich ausweicht. Er bewirkt daher, dass das Mittel, welches ihm an der Stelle ausweicht, wo der Druck stattfindet, immer nach den Theilen fortgeht, welche dem Körper folgen. W. z. b. w.

Zusatz. Es träumen daher diejenigen, welche glauben, dass die Theile einer Flamme einen Druck hervorbringen, der sich durch das umgebende Mittel längs gerader Linien fortpflanzt. Ein derartiger Druck darf nicht aus der blossen Wirkung der Theile der Flamme, sondern aus der Ausdehnung der ganzen Flamme abgeleitet werden.

§. 65. Lehrsatz. In den perpendikulären Schenkeln KL und MN eines Kanals steigt und sinkt das Wasser wechselweise. Construirt man nun ein Pendel, dessen Länge zwischen dem Aufhängepunkt und Schwingungspunkt halb so gross ist, als die Länge des Wassers im Kanal; so wirdd as Wasser in denselben Zeiten steigen und sinken in denen das Pendel oscillirt.

Die Länge des Wassers messe ich längs der Axen des Kanals und der Schenkel, und setze sie der Summe dieser Axen gleich. Ich vernachlässige hier den Widerstand des Wassers, welcher von seiner Reibung an den Wänden des Kanals herrührt. Es mögen demnach AB

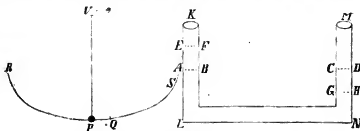


Fig. 182.

und CD die mittleren Höhen des Wassers in beiden Schenkeln bezeichnen, und wenn das Wasser im Schenkel KL zur Höhe EF ansteigt falle es im Schenkel MN zur Höhe GH herab. Es sei ferner P die

Linse, VP der Faden des Pendels, V der Aufhängepunkt und SQPR die Cycloïde, welche das Pendel beschreibt, P ihr tiefster Punkt und der Bogen PQ gleich der Höhe AE. Die Kraft, durch welche die Bewegung des Wassers wechselweise beschleunigt und verzögert wird, ist der Ueberschuss vom Gewicht des Wassers in dem einen Schenkel über das im anderen. Steigt daher das Wasser im Schenkel KL zur Höhe EF, und sinkt es im anderen bis GH, so ist jene Kraft gleich dem doppelten Gewicht des Wassers EABF, und verhält sich daher zum Gewicht des ganzen Wassers, wie EA : VP oder wie PQ : PR. Ferner verhält sich die Kraft, durch welche das Gewicht P in jedem Orte Q der Cycloïde beschleunigt oder verzögert wird, zu seinem ganzen Gewichte (nach erstem Buche, §. 92., Zusatz), wie sein Abstand PQ vom tiefsten Punkte P zur Länge PR der Cycloïde. Es sind daher die bewegenden Kräfte des Wassers und des Pendels, welche die gleichen Wege AE und PQ beschreiben, den zu bewegenden Gewichten proportional. Diese Kräfte werden ferner, wenn Wasser und Pendel sich beim Anfange in Ruhe befinden, bewirken, dass beide sich in gleichen Zeiten gleich bewegen und ausserdem, dass sie in ihren gegenseitigen Bewegungen zugleich vor- und rückwärts gehen. W. z. b. w.

Zusatz 1. Das Wasser wird wechselweise isochronisch steigen und sinken, mag die Bewegung stark oder weniger stark sein.

Zusatz 2. Beträgt die ganze Länge des Wassers im Kanal $6^1/_9$ Par. Fuss, so wird das Wasser in Zeit von einer Secunde sinken und in derselben Zeit steigen u. s. w. f. wechselweise ins Unendliche. Ein Pendel von $3^1/_{18}$ Fuss Länge macht nämlich seine Schwingungen in 1 Secunde.

Zusatz 3. Nimmt ferner die Länge des Wassers zu oder ab, so nimmt auch die Zeit der gegenseitigen Bewegung zu oder ab, und zwar im halben Verhältniss der Länge.

§ 66. Lehrsatz. Die Geschwindigkeit der Wellen steht im halben Verhältniss ihrer Breite.

Das folgt aus dem folgenden §.

§ 67. Aufgabe. Man soll die Geschwindigkeit der Wellen finden.

Man construire ein Pendel, dessen Länge zwischen dem Aufhängepunkte und Schwingungspunkte der Breite der Wellen gleich ist; alsdann eine werden die Wellen sehr nahe in derselben Zeit, in welcher jenes Pendel einzelne Schwingung macht, ihre Breite zurücklegen.

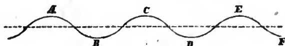


Fig. 138.

Breite der Wellen nenne ich den Abstand zwischen den tiefsten Stellen zweier Thäler oder den höchsten Punkten zweier Gipfel. Es

bezeichne ABCDEF die Oberfläche eines stillstehenden Wassers, welches in aufeinanderfolgenden Wellen auf- und niedersteigt, und es seien A, C, E, etc. die Gipfel, B, D, F, etc. die zwischenliegenden Thäler der Wellen. Da die Bewegung der letztern durch aufeinander folgendes Steigen und Sinken des Wassers geschieht, dergestalt, dass ihre Theile A, C, E, etc., welche jetzt die höchsten sind, hierauf die tiefsten werden; da ferner die bewegende Kraft, durch welche die höchsten Theile herab- und die tiefsten hinaufsteigen, mit dem Gewicht des gehobenen Wassers identisch ist: so wird das wechselseitige Steigen und Sinken der gegenseitigen Bewegung des Wassers im Kanale (§. 65.) analog sein und dieselben Gesetze der Zeit beobachten. Wenn daher (nach §. 65.) die Entfernungen zwischen den höchsten Punkten der Wellen A, C, E, etc. und den tiefsten B, D, F, etc., d. h. zwischen A und B, C und D, etc. der doppelten Länge des Pendels gleich sind; so werden die höchsten Theile A, C, E in der Zeit einer Schwingung die untersten werden und in der Zeit einer zweiten Schwingung aufs neue ansteigen. Zwischem dem Uebergange der einzelnen Wellen wird daher die Zeit zweier Schwingungen verfliessen, d. h. die Welle beschreibt ihre Breite in derselben Zeit, in welcher jenes Pendel zwei Schwingungen macht. In derselben Zeit wird ein Pendel von der vierfachen Länge, welches mithin so lang als die Breite der Welle ist, Eine Schwingung machen.

Zusatz 1. Daher werden Wellen, deren Breite $3^1/_{18}$ Par. Fuss beträgt, die letztere in Zeit von 1 Secunde zurücklegen; in Zeit von 1 Minute legen sie sehr nahe $183^1/_3$ und in 1 Stunde 11000 Fuss zurück.

Zusatz 2. Die Geschwindigkeit der grösseren oder kleineren Wellen nimmt zu oder ab im halben Verhältniss ihrer Breite. Dies gilt unter der Voraussetzung, dass die Theile des Wassers geradlinig auf- und absteigen; beides geschieht aber, der Wahrheit mehr entsprechend. in einer Kreislinie, daher gebe ich die durch diesen Satz bestimmte Zeit nur als sehr nahe richtig an.

§. 68. Lehrsatz. Pflanzen sich die Stösse in einer Flüssigkeit fort, so werden die einzelnen Theilchen der letzteren, welche mit der kürzesten gegenseitigen Bewegung vor- und rückwärts gehen, immer nach dem Gesetz eines schwingenden Pendels beschleunigt und verzögert.

Es bezeichnen AB, BC, CD etc. gleiche Abstände der aufeinander folgenden Stösse, ABC die Richtung, in welcher die Bewegung der Stösse von A gegen B erfolgt; E, F, G drei physische Punkte des ruhenden Mittels, welche auf der Linie AC in gleichen Abständen von einander liegen. Ferner seien Ee, Ff, Gg sehr kurze gleiche Wege, über welche jene Punkte bei gegenseitiger Bewegung in den einzelnen Schwingungen vor- und rückwärts gehen; ε, φ, γ beliebige zwischenliegende Orte derselben Punkte; EF, FG physische Linien oder lineare Theile des Mittels, welche zwischen jenen Punkten liegen, und nach und

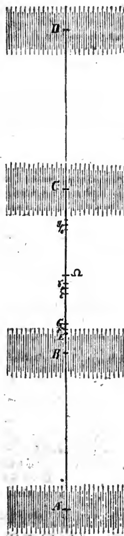


Fig. 185.

nach zu den Orten $\varepsilon\varphi$, $\varphi\gamma$ und ef, fg übertragen werden. Man ziehe eine Linie PS = Ee, halbire dieselbe in O und beschreibe aus diesem als Mittelpunkt und mit OP als Radius einen Kreis SJPi. Durch die ganze Peripherie desselben und ihre Theile werde die ganze Zeit Einer Schwingung und ihrer proportionalen Theile ausgedrückt, dergestalt dass nach Verlauf irgend einer Zeit PH oder PHSh man auf PS das Perpendikel HL oder hl fälle und und wenn Eε = PL oder = Pl genommen wird, der physische Punkt E sich in ε befinden.

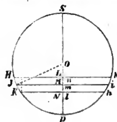


Fig. 184.

Hiernach wird jeder Punkt E, welcher von E durch ε nach e geht, und von hier durch ε nach E zurückkehrt, die einzelnen Schwingungen mit demselben Grade der Beschleunigung und Verzögerung ausführen, wie ein schwingendes Pendel. Zu beweisen ist, dass die einzelnen physischen Punkte des Mittels durch eine solche Bewegung angetrieben werden müssen. Denken wir uns also ein Mittel, welches durch irgend eine Ursache zu einer solchen Bewegung angetrieben wird und sehen wir, was daraus folgt.

Auf der Peripherie PHSh nehme man die gleichen Bogen HJ und JK, oder hi und ik an, welche in demselben Verhältniss zur ganzen Peripherie stehen, wie die gleichen Linien EF und FG zum ganzen Zwischenraum BC der Stösse. Man fälle die Perpendikel JM und KN oder im und kn. Da die Punkte E, F, G successiv durch ähnliche Bewegungen angetrieben werden und ihre ganzen, aus einem Hin- und Hergange zusammengesetzten, Vibrationen in der Zeit vollführen, während welcher der Stoss von B nach C übergeht; so wird, wenn PH oder PHSh die Zeit vom Anfang der Bewegung des Punktes E an bezeichnet,

PJ oder PHSi die Zeit vom Anfang der Bewegung des Punktes F an und endlich PK oder PKSk die Zeit vom Anfang der Bewegung des Punktes G an ausdrücken. Es wird daher

beim Hingange $E\varepsilon = PL$, beim Hergange $E\varepsilon = Pl$,
„ „ $F\varphi = PM$, „ „ $F\varphi = Pm$,
„ „ $G\gamma = PN$, „ „ $G\gamma = Pn$,

und hiernach respective $\varepsilon\gamma = GE - LN$ und $\varepsilon\gamma = GE + ln = GE + LN$.184.) Es ist aber $\varepsilon\gamma$ die Breite der Ausdehnung des Theiles EG des Mittels im Orte $\varepsilon\gamma$, und es verhält sich daher diese Ausdehnung zur mittlern Ausdehnung dieses Theiles beim Hingange wie $GE - LN : GE$ und beim Hergange wie $GE + LN : GE$. Da nun

1. $LN : KH = JM : OP$185.)

2. $KH : EG = PHShP : BC = OP : V$,

wenn man nämlich V statt des Radius eines Kreises setzt, dessen Peripherie gleich dem Intervall BC der Stösse ist; so wird aus diesen beiden Proportionen

3. $LN : EG = JM : V$.

Es verhält sich daher nach dem Obigen die Ausdehnung des Theiles EG, oder des physischen Punktes F im Orte $\varepsilon\gamma$ zu seiner mittleren Ausdehnung im ersten Orte EG, wie

$V - JM : V$ beim Hingange und
$V + JM : V$ „ Hergange.

Die elastische Kraft desselben wird in beiden Fällen sich zur mittleren im Orte EG erhalten, wie respective $\frac{1}{V - JM} : \frac{1}{V}$ und $\frac{1}{V + JM} : \frac{1}{V}$. Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass die elastischen Kräfte der physischen Punkte E und G beim Hingange sich verhalten, wie $\frac{1}{V - HL} : \frac{1}{V}$ und $\frac{1}{V - KN} : \frac{1}{V}$. Der Unterschied beider Kräfte wird sich zur mittleren elastischen Kraft des Mittels verhalten, wie
$$\frac{1}{V - HL} - \frac{1}{V - KN} : \frac{1}{V} = \frac{HL - KN}{V^2 - V(HL + KN) + HL.KN} : \frac{1}{V}.$$
Dieses Verhältniss geht unter der Voraussetzung, dass (wegen der Kürze der Stösse) HL und KN unendlich kleiner als V seien, über in $\frac{HL - KN}{V^2} : \frac{1}{V} = HL - KN : V$. Da nun V gegeben ist, so wird der Unterschied der Kräfte proportional $HL - KN$, d. h. (weil $HL - KN : HK = OM : OJ = OM : OP$, also $HL - KN = \frac{HK.OM}{OP}$, wo HK und OP constant sind) jener Unterschied proportional OM. Wenn man daher Ff in Ω halbirt, so ist der Unterschied der Kräfte proportional $\Omega\varphi$. Nach derselben Weise wird der Unterschied der elastischen Kräfte, welche den physischen Punkten ε und γ eigen sind, beim Rückgange der physischen Linie $\varepsilon\gamma$,

proportional $\Omega\varphi$. Jener Unterschied aber (d. h. der Ueberschuss der elastischen Kraft des Punktes ϵ über die des Punktes γ) ist die Kraft, durch welche die zwischenliegende Linie $\epsilon\gamma$ des Mittels beim Hingange beschleunigt und beim Hergange verzögert wird, und daher verhält sich die beschleunigende Kraft der Linie $\epsilon\gamma$, wie der Abstand vom mittleren Orte Ω der Schwingung. Ferner wird die Zeit (nach §. 78. des ersten Buches) linear ausgedrückt durch den Bogen PJ. Der lineare Theil $\epsilon\gamma$ des Mittels wird sich daher nach dem vorgeschriebenen Gesetze, d. h. nach dem Gesetze eines schwingenden Pendels bewegen, und dasselbe ist bei allen linearen Theilen, aus denen das Mittel zusammengesetzt wird, der Fall. W. z. b. w.

Zusatz. Hieraus erhellt, dass die Zahl der fortgepflanzten Stösse dieselbe ist, als die der Vibrationen eines zitternden Körpers und dass die erstere beim Fortgange nicht vervielfältigt wird. Denn die physische Linie $\epsilon\gamma$ wird, sobald sie zu ihrem ersten Orte zurückgekehrt ist, ruhen und sich nur dann auf's neue bewegen, wenn sie durch den Stoss eines zitternden Körpers, oder durch den Impuls der von dem letzteren fortgepflanzten Stösse, zu neuer Bewegung angeregt wird. Sie wird daher in Ruhe bleiben, sobald die Stösse vom zitternden Körper sich fortzupflanzen aufhören.

§. 69. Lehrsatz. Die Geschwindigkeiten der in einem elastischen Mittel sich fortpflanzenden Stösse stehen in einem Verhältniss, welches aus dem halben directen der elastischen Kraft und dem halben indirecten Verhältniss der Dichtigkeit zusammengesetzt ist; vorausgesetzt, dass die elastische Kraft der Flüssigkeit ihrer Verdichtung proportional sei.

1. Fall. Sind die Mittel homogen und die Abstände der Stösse in ihnen unter sich gleich, ist aber die Bewegung in einem von ihnen stärker; so werden die Zusammenziehungen und die Ausdehnungen analoger Theile denselben Bewegungen proportional sein. Diese Proportion findet nicht genau statt; sind indessen die Zusammenziehungen und Ausdehnungen nicht sehr gross, so wird sie nahe richtig sein und man kann sie als physikalisch genau annehmen. Die bewegenden elastischen Kräfte verhalten sich aber wie die Zusammenziehungen und die Ausdehnungen, und die Geschwindigkeiten gleicher Theile, welche in derselben Zeit erzeugt werden, sind den Kräften proportional. Gleiche und correspondirende Theile entsprechender Stösse legen daher zusammen ihren Hin- und Hergang in Räumen zurück, welche den Zusammenziehungen und Ausdehnungen proportional sind und mit Geschwindigkeiten, welche sich wie die Wege verhalten. Folglich werden die Stösse, welche während der Zeit des Hin- und Herganges fortschreitend ihre ganze Breite zurücklegen, und welche immer an die Stelle der nächst vorhergehenden Stösse treten, wegen der Gleichheit der Abstände, mit gleicher Geschwindigkeit in dem einen und anderen Mittel fortrücken.

2. Fall. Sind die Abstände oder Breiten der Stösse grösser in

dem einen Mittel, als in dem andern, so wollen wir voraussetzen, dass die correspondirenden Theile jedesmal, wenn sie hin- und hergehen, Wege beschreiben, welche den Breiten der Stösse proportional sind; alsdann werden ihre Zusammenziehungen und Ausdehnungen gleich sein. Sind also die Mittel homogen, so werden die bewegenden elastischen Kräfte, welche sie mit reciproker Bewegung antreiben, auch gleich sein. Die Materie aber, welche durch diese Kräfte bewegt werden soll, verhält sich wie die Breite der Stösse und der Raum, in welchem sie ihren Hin- und Hergang vollführen müssen, steht in demselben Verhältniss. Die Zeit eines Hin- und Herganges steht also in einem Verhältniss, welches aus dem halben Verhältniss der Materie und dem halben des Raumes zusammengesetzt ist; sie ist mithin dem Raume selbst proportional. Die Stösse legen aber während der Zeiten eines Hin- und Herganges ihre Breiten, d. h. den Zeiten proportionale Wege zurück; also sind ihre Geschwindigkeiten gleich.

3. Fall. In Mitteln von derselben Dichtigkeit und elastischen Kraft haben alle Stösse dieselbe Geschwindigkeit. Vergrössert man entweder die Dichtigkeit oder die elastische Kraft des Mittels, so nimmt die bewegende Kraft im Verhältniss der elastischen und die zu bewegende Materie im Verhältniss der Dichtigkeit zu. Die Zeit, in welcher dieselben Bewegungen wie vorhin ausgeführt werden, wächst also im halben Verhältniss der Dichtigkeit und nimmt ab im halben Verhältniss der elastischen Kraft. Folglich steht die Geschwindigkeit der Stösse in einem Verhältniss, welches aus dem halben indirecten der Dichtigkeit des Mittels und dem halben directen Verhältniss der elastischen Kraft zusammengesetzt ist. W. z. b. w.

Die Wahrheit dieses Satzes geht noch deutlicher aus der Construction des folgenden Paragraphen hervor.

§. 70. Aufgabe. Die Dichtigkeit und elastische Kraft eines Mittels ist gegeben; man sucht die Geschwindigkeit der Stösse.

Denken wir uns, dass das Mittel durch ein aufliegendes Gewicht nach Art unserer Atmosphäre zusammengedrückt werde, und es sei A die Höhe eines homogenen Mittels, dessen Gewicht dem aufliegenden gleich und dessen Dichtigkeit dieselbe ist, als die des zusammengedrückten Mittels, in welchem die Stösse sich fortpflanzen. Man denke sich ferner ein Pendel construirt, dessen Länge zwischen Aufhänge- und Schwingungspunkt = A ist, und welches in derselben Zeit eine aus Hin- und Hergang zusammengesetzte Schwingung macht, worin die Stösse fortschreitend einen, der Peripherie eines Kreises zum Radius A gleichen, Weg zurücklegen. Bei derselben Construction wie §. 68. werde die beliebige physische Linie EF, indem sie in einzelnen Vibrationen den Weg PS beschreibt, in den äussersten Punkten P und S des Hin- und Herganges durch eine elastische Kraft gedrängt, welche ihrem Gewichte gleich ist. Sie wird alsdann die einzelnen Vibrationen in derselben Zeit ausführen, in welcher sie in einer Cycloïde von der Länge PS schwingen könnte, und zwar würde dies

geschehen, weil gleiche Kräfte gleiche Körperchen durch gleiche Räume treiben. Da nun die Schwingungszeiten im halben Verhältniss der Pendellängen stehen, und die Länge des Pendels der Hälfte des ganzen cycloïdischen Bogens gleich ist; so würde die Zeit Einer Vibration sich zur Schwingungszeit eines Pendels von der Länge A verhalten, wie $\sqrt{\frac{1}{2}PS} : \sqrt{A}$, d. h. wie $\sqrt{PO} : \sqrt{A}$. Die elastische Kraft, durch welche die kleine physische Linie EG in ihren äussersten Punkten P und S angetrieben wird, verhielt sich aber (in §. 68.) zu ihrer ganzen elastischen Kraft, wie HL — KN : V, d. h. (da K jetzt mit P zusammenfällt) wie HK : V[186]. Ferner verhält sich jene ganze Kraft, d. h. das aufliegende Gewicht, wodurch die kleine Linie EG zusammengedrückt wird, zum Gewicht der letztern, wie die Höhe A des aufliegenden Gewichtes zur Länge EG der Linie, d. h. wie A : EG. Man erhält daher durch Zusammensetzung das Verhältniss der auf EG in P und S einwirkenden Kraft zum Gewicht dieser kleinen Linie, wie HK . A : V . EG oder wie PO . A : V^2, weil früher (§. 68., Gl. 2.) HK : EG = PO : V war. Da nun die Zeiten, in denen gleiche Körper durch gleiche Wege getrieben werden, im umgekehrten halben Verhältniss der Kräfte stehen[187]); so wird die Zeit Einer Vibration unter Einwirkung des Gewichts sich verhalten, wie $\sqrt{V^2} : \sqrt{PO . A}$. und zur Zeit Einer Oscillation des Pendels von der Länge A, wie $\sqrt{V^2} : \sqrt{PO . A}$ und $\sqrt{PO} : \sqrt{A}$ zusammengesetzt, d. h. wie V : A.

Es legt aber in der Zeit Einer, aus Hin- und Hergang zusammengesetzten Vibration der Stoss fortschreitend seine Breite BC zurück. Es verhält sich daher die Zeit, in welcher der Stoss den Weg BC zurücklegt, zur Zeit Einer aus Hin- und Hergang zusammengesetzten Oscillation, wie V : A, d. h. wie BC zur Peripherie des mit dem Radius A beschriebenen Kreises.

Ferner steht die Zeit, in welcher der Stoss den Weg BC zurücklegt, zu der Zeit, in welcher er eine dieser Peripherie gleiche Länge zurücklegen würde, in demselben Verhältniss. Daher wird, in der Zeit einer solchen Oscillation, der Stoss die Länge dieser Peripherie beschreiben.

Zusatz 1. Die Geschwindigkeit der Stösse ist dieselbe, welche schwere Körper erlangen würden, indem sie, mit gleichförmig beschleunigter Bewegung fallend, $\frac{1}{2}$A zurücklegten. In der Zeit dieses Falles wird nämlich, mit der während desselben erlangten Geschwindigkeit, der Stoss einen Weg zurücklegen, welcher der ganzen Höhe A gleich ist, und daher wird er in der Zeit einer, aus Hin- und Hergang zusammengesetzten, Schwingung einen Weg zurücklegen, welcher der mit dem Radius A beschriebenen Peripherie gleich ist. Es verhält sich nämlich die Zeit des Falles zu der Schwingungszeit, wie der Radius eines Kreises zu seiner Peripherie.

Zusatz 2. Da nun jene Höhe A sich verhält, wie direct die elastische Kraft der Flüssigkeit und indirect die Dichtigkeit derselben; so steht die Geschwindigkeit der Stösse in einem Verhältniss, welches

aus dem halben indirecten Verhältniss der Dichtigkeit und dem halben directen der elastischen Kraft zusammengesetzt ist.

§. 71. Aufgabe. Die Abstände der Stösse zu finden.

Man suche die, einer gegebenen Zeit entsprechende, Zahl der Vibrationen des Körpers, durch dessen Zittern die Stösse hervorgebracht werden. Durch jene Zahl dividire man den Weg, welchen der Stoss in derselben Zeit zurücklegen könnte und es wird der so gefundene Theil der Breite eines Stosses gleich sein.

§. 72. Anmerkung. Die letzten Sätze beziehen sich auf die Bewegung des Lichtes und des Schalles. Das erstere pflanzt sich nämlich längs gerader Linien fort und kann (nach §§. 62 und 63.) nicht aus einem einzigen Stosse bestehen. Der Schall aber entspringt aus zitternden Körpern, und ist nach §. 64. nichts weiter, als ein fortgesetzter Stoss der Luft. Bestätigt wird dies durch die zitternde Bewegung, welche er in entgegenstehenden Körpern erregt, wenn die Töne selbst nur heftig und tief sind, wie diejenigen der Pauken; denn eine schnellere und kürzere zitternde Bewegung wird nicht so leicht erregt. Dass aber auch beliebige Töne, welche auf den Saiten tönender Körper angeschlagen werden, eine zitternde Bewegung hervorbringen, ist hinreichend bekannt. Dies wird auch durch die Geschwindigkeit der Töne bestätigt.

Das specifische Gewicht des Regenwassers verhält sich nämlich zu dem des Quecksilbers, wie ungefähr $1 : 13^2/_3$, und wenn das letztere im Barometer eine Höhe von 30 engl. Zoll erreicht, verhält sich das specifische Gewicht der Luft zu dem des Regenwassers, wie ungefähr 1 : 870; daher verhält sich das specifische Gewicht der Luft zu dem des Quecksilbers, wie 1 : 11890. Da ferner die Höhe des Quecksilbers 30 Zoll beträgt, so würde die Höhe der gleichförmigen Luft, deren Gewicht unsere unterhalb gelegene Atmosphäre zusammendrücken könnte, 356700 Zoll oder 29725 Fuss engl. betragen. Diese Höhe ist diejenige, welche wir bei der Construction der obigen Aufgabe (§. 70.) durch A. bezeichnet haben. Die Peripherie eines mit dem Radius von 29725 Fuss beschriebenen Kreises beträgt 186768 Fuss. Da ferner ein Pendel von $39^1/_5$ Zoll Länge, wie bekannt, eine aus Hin- und Hergang zusammengesetzte Schwingung in 2 Secunden vollendet; so wird ein Pendel von 29725 Fuss = 356700 Zoll eine ähnliche Schwingung in Zeit von $190^3/_4$ Secunden zurücklegen müssen[188]). In dieser Zeit legt aber der Schall fortschreitend einen Weg von 186,768 Fuss und in Zeit von 1 Secunde einen Weg von 979 Fuss zurück.

Uebrigens habe ich bei dieser Rechnung keine Rücksicht auf die Dicke der festen Theilchen der Luft genommen, durch welche sich der Schall augenblicklich fortpflanzt. Das Gewicht der Luft verhält sich nämlich zu dem des Wassers, wie 1 : 870, und Salze sind fast zweimal so dicht, als das letztere. Setzt man nun voraus, dass die Lufttheilchen ungefähr ebenso dicht, als Wasser- oder Salztheilchen seien und der lockere Zustand der Luft nur von den zwischen den Theilchen befind-

lichen Zwischenräumen herrühre; so wird der Durchmesser eines Lufttheilchens sich zum Abstande der Mittelpunkte zweier Theilchen ungefähr wie 1 : 9 oder 1 : 10[189]) und zum Abstande der Theilchen selbst wie 1 : 8 oder 1 : 9 verhalten.

Man muss daher zu den 979 Fuss, welche der Schall in 1 Secunde durchlaufen soll, nach der vorhergehenden Rechnung noch $\frac{979}{9} = 109$ Fuss ungefähr addiren; also legt der Schall in 1 Secunde etwa 1088 Fuss zurück. Hierzu kommt noch, dass die in der Luft enthaltenen Dämpfe eine andere Spannung als jene haben und einen anderen Ton angeben; sie nehmen daher kaum Theil an der Bewegung der reinen Luft, welche den Schall fortpflanzt. Befinden sich nun diese Theile in Ruhe, so wird die Bewegung schneller durch die reine Luft fortgepflanzt, und zwar im halben Verhältniss der geringeren Menge der Materie. Ist daher die Atmosphäre aus 10 Theilen reiner Luft und Einem Theile Dampf zusammengesetzt, so wird die Bewegung des Schalles schneller sein im Verhältniss $\sqrt{11} : \sqrt{10}$ d. h. ungefähr wie 21 : 20, als wenn sie 11 Theile reiner Luft enthielte. In diesem Verhältniss muss man die vorhergefundene Geschwindigkeit des Schalles vergrössert werden. Sie wird daher in 1 Secunde = 1142 Fuss. Dies muss sich so im Frühjahr und Herbst verhalten, wo die Luft durch eine mässige Wärme verdünnt und ihre Elasticität merklich vergrössert wird. Im Winter hingegen, wo die Luft durch die Kälte verdichtet und ihre Elasticität vermindert wird, muss die Bewegung im halben Verhältniss der Dichtigkeit der Luft langsamer sein. Im Sommer muss sie aber geschwinder sein.

Versuche haben in der That gezeigt, dass der Schall in 1 Secunde 1142 engl. oder 1070 par. Fuss zurücklegt.

Kennt man die Geschwindigkeit des Schalles, so kann man auch die Intervalle der Schwingungen bestimmen. Sauveur fand durch Versuche, dass eine offene, ungefähr 5 par. Fuss lange Röhre den Schall eines Tones hervorrief, den eine Saite angeben würde, welche in 1 Secunde 100 Vibrationen macht. Es finden also ungefähr 100 Vibrationen in einem Raume von etwa 1070 par. Fuss, welche der Schall in 1 Secunde zurücklegt, statt und eine Vibration nimmt daher einen Raum von etwa 10,7 Fuss, d. h. die doppelte Länge der Röhre ein. Hiernach ist es wahrscheinlich, dass die Breiten der Schwingungen solcher Töne, welche in offenen Röhren stattfinden, doppelt so gross sind, als die Länge der Röhren beträgt.

Ferner sieht man (nach §. 68., Zusatz dieses Buches), warum der Ton in demselben Augenblick aufhört, wo die Bewegungen des tönenden Körpers zur Ruhe kommen; warum wir sie nicht länger hören, wenn wir vom tönenden Körper entfernt sind, als wenn wir uns in seiner Nähe befinden. Man sieht auch durch die aufgestellten Principien ein, warum der Schall im Sprachrohr verstärkt wird. Jede reciproke Bewegung pflegt nämlich, so oft sie reflectirt wird, durch dieselbe Ursache zuzu-

nehmen, durch welche sie hervorgebracht wird. Daher verliert sich die Bewegung langsamer und wird stärker reflectirt in den Röhren, welche der Ausbreitung des Schalles Widerstand leisten; sie wächst daher durch die bei jeder Zurückwerfung eingeflösste neue Bewegung.

Dies sind die hauptsächlichsten Erscheinungen des Schalles.

ABSCHNITT IX.

Von der kreisförmigen Bewegung flüssiger Körper.

§. 73. Hypothese. Der Widerstand, welcher aus einer unvollkommenen Schlüpfrigkeit der Theile einer Flüssigkeit entspringt, ist unter übrigens gleichen Umständen der Geschwindigkeit proportional, mit welcher diese Theile sich von einander trennen.

§. 74. Lehrsatz. Dreht sich ein unbestimmt langer Cylinder in einer gleichförmigen und unbegrenzten Flüssigkeit mit gleichförmiger Bewegung um seine der Lage nach gegebene Axe, und wird die Flüssigkeit bloss durch Einwirkung derselben herumgetrieben; verharret ferner jeder Theil der Flüssigkeit gleichförmig in seiner Bewegung: so verhalten sich die Umlaufszeiten der Theile der Flüssigkeit wie ihre Abstände von der Axe des Cylinders.

Es sei AFL der gleichförmig um die Achse S gedrehte Cylinder, und es werde durch die concentrischen Kreise BGM, CHN, DJO, EKP

Fig. 186.

etc. die Flüssigkeit in unzählige und concentrische cylindrische Schalen von gleicher Dicke getheilt.

Da die Flüssigkeit homogen ist, so verhalten sich die gegenseitig ausgeübten Eindrücke zusammenhängender Schalen (nach §. 73) wie die gegenseitigen Verschiebungen und wie die zusammenhängenden Oberflächen, an denen die Eindrücke stattfinden. Ist der Eindruck gegen irgend eine Schale grösser oder kleiner an der concaven, als an der convexen Seite, so wird der stärkere Eindruck überwiegen, und die Bewegung der Schale entweder beschleunigen oder verzögern, je nachdem er in derselben oder der entgegengesetzten Richtung jener Bewegung einwirkt. Damit ferner jede Schale in ihrer Bewegung gleichförmig verharre, müssen die Eindrücke von beiden Seiten einander gleich sein und nach entgegengesetzten Richtungen erfolgen. Da nun die Eindrücke den zusammenhängenden Flächen und deren Verschiebungen proportional sind, so verhalten sich die letzteren umgekehrt wie die Oberflächen, d. h. umgekehrt wie die Entfernungen der Oberflächen von der Axe. Es verhalten sich aber ferner die Winkelbewegungen um die Axe, wie diese Verschiebungen, dividirt durch die Abstände, d. h. umgekehrt wie die Quadrate der Abstände. Errichtet man daher auf der unbegrenzten Linie SABCDEQ in ihren einzelnen Punkten die Perpendikel Aa, Bb, Cc, Dd, Ee etc., welche den Quadraten von SA, SB. SC, SD, SE etc. umgekehrt proportional sind, und denkt man sich durch die Endpunkte der Perpendikel eine hyperbolische Linie gezogen; so verhalten sich die Summen der Winkelbewegungen, d. h. die ganzen Winkelbewegungen wie die entsprechenden Summen der Linien Aa, Bb, Cc, Dd, Ee etc. Vermehrt man, um ein gleichförmig flüssiges Mittel zu erhalten, die Zahl der Schalen in's Unendliche, und vermindert man in demselben Maasse ihre Breite; so verhalten sich die Winkelbewegungen wie die, diesen Summen entsprechenden, hyperbolischen Flächen AaQ, BbQ, CcQ etc., und es verhalten sich die, den Winkelwegungen umgekehrt proportionalen Zeiten, umgekehrt wie diese Flächen. Es verhält sich daher die Umlaufszeit irgend eines Theilchens D umgekehrt wie die Fläche DdQ, d. h. (nach der bekannten Quadratur der Curven)[190] direct wie der Abstand SD. W. z. b. w.

Zusatz 1. Hiernach verhält sich die Winkelbewegung der Theilchen der Flüssigkeit umgekehrt wie ihre Abstände von der Axe des Cylinders und die absoluten Geschwindigkeiten sind einander gleich.

Zusatz 2. In einem cylindrischen Gefässe von unbestimmter Länge befindet sich eine Flüssigkeit und ein anderer Cylinder, beide Cylinder drehen sich um die gemeinschaftliche Axe und ihre Umdrehungszeiten sind ihren Halbmessern proportional. Verharret jeder Theil der Flüssigkeit in seiner Bewegung, so sind die Umlaufszeiten der einzelnen Theile ihren Abständen von der Axe der Cylinder proportional.

Zusatz 3. Wird dem auf diese Weise bewegten Cylinder und der Flüssigkeit irgend eine gemeinschaftliche Winkelbewegung hinzu-

gefügt oder genommen; so wird, weil diese neue Bewegung die wechselseitige Reibung der Theile der Flüssigkeit nicht ändert, auch die Bewegung der Theile unter sich unverändert bleiben. Die gegenseitige Verschiebung der Theile hängt nämlich von der wechselseitige Reibung ab und jeder Theil wird in derjenigen Bewegung verharren, welche durch die, an beiden Seiten gegen entgegengesetzte Theile ausgeübte, Reibung nicht mehr beschleunigt als verzögert wird.

Zusatz 4. Nimmt man daher dem ganzen System der Cylinder und der Flüssigkeit alle Winkelbewegung des äusseren Cylinders, so erhält man die Bewegung der Flüssigkeit in einem ruhenden Cylinder.

Zusatz 5. Ruhet daher die Flüssigkeit und der äussere Cylinder, und wird der innere gleichförmig umgedreht, so theilt sich die kreisförmige Bewegung der Flüssigkeit mit und wird sich allmählig durch die ganze Flüssigkeit fortpflanzen. Sie wird ferner nicht eher aufhören zu wachsen, als bis die einzelnen Theile der Flüssigkeit die im vorhergehenden Zusatz erklärte Bewegung erlangt haben.

Zusatz 6. Da die Flüssigkeit das Bestreben hat, ihre Bewegung noch weiter fortzupflanzen, so wird durch diesen Trieb auch der äussere Cylinder herumgedreht werden, wenn er nicht kräftig zurückgehalten wird und es wird seine Bewegung so lange beschleunigt werden, bis beide Cylinder gleiche Umlaufszeiten haben. Wird der äussere Cylinder durch eine Kraft festgehalten, so bestrebt er sich, die Bewegung der Flüssigkeit zu verzögern, und wenn nicht eine von aussen her beigebrachte Kraft den inneren Cylinder in seiner Bewegung erhält, wird jener ein allmähliges Aufhören derselben bewirken. Alles dieses kann man durch Versuche bei einem stehenden tiefen Wasser sehen.

§. 75. Lehrsatz. Wenn eine feste Kugel sich in einer gleichförmigen und unbegrenzten Flüssigkeit um eine, der Lage nach gegebene Axe, mit gleichförmiger Bewegung dreht, und die Flüssigkeit durch diesen Impuls allein zur Umdrehung getrieben wird; wenn ferner jeder Theil der Flüssigkeit gleichförmig in seiner Bewegung verharret: so verhalten sich die Umlaufszeiten dieser Theile wie die Quadrate ihrer Abstände vom Mittelpunkte der Kugel.

1. Fall. Es sei AFL die gleichförmig um die Axe S (Fig. §. 74) im Kreise herumgetriebene Kugel, und durch die Kreise BGM, CHN, DJO, EKP etc. werde die Flüssigkeit in unzählige concentrische Schalen von gleicher Dicke getheilt. Man denke sich nun jene Schalen fest, alsdann werden, da die Flüssigkeit gleichartig ist, die wechselseitig ausgeübten Eindrücke der sich berührenden Schalen (nach der Hypothese) ihren gegenseitigen Verschiebungen und den sich berührenden Oberflächen, an denen die Eindrücke erfolgen, proportional sein. Wenn der Eindruck auf eine dieser Schalen grösser oder kleiner an der concaven, als an der convexen Seite ist; so wird der stärkere Eindruck überwiegend sein und die Geschwindigkeit der Schale entweder beschleunigen oder verzögern, je nachdem er nach derselben oder nach der entgegengesetzten Richtung

ihrer Bewegung erfolgt. Damit ferner jede Schale gleichförmig in ihrer Bewegung verharre, müssen die Eindrücke von beiden Seiten einander gleich und entgegengesetzt gerichtet sein. Da nun die Eindrücke den sich berührenden Oberflächen und den gegenseitigen Verschiebungen der letzteren proportional sind; so werden die Verschiebungen sich umgekehrt, wie die Oberflächen, d. h. umgekehrt wie die Quadrate der Abstände dieser Oberflächen vom Centrum verhalten. Es verhalten sich aber die verschiedenen Winkelbewegungen um die Axe wie diese Verschiebungen, dividirt durch die Abstände, oder direct wie die Verschiebungen und indirect wie die Abstände, d. h. (wenn man die Verhältnisse zusammensetzt) indirect wie die Cuben der Abstände.

Wenn man daher in den einzelnen Punkten der unbestimmten Linie SABCDEQ Perpendikel Aa, Bb, Cc, Dd, Ee etc. errichtet, welche den Cuben von SA, SB, SC, SD, SE etc. umgekehrt proportional sind; so verhalten sich die Summen der verschiedenen Winkelbewegungen, wie die entsprechenden Summen der Linien Aa, Bb, Cc, Dd, Ee etc. Indem man nun (zur Herstellung eines gleichförmigen Mittels) die Zahl der Schalen in's Unendliche vermehrt und ihre Breite in demselben Maasse vermindert, so verhält sich die ganze Winkelbewegung wie die, jenen Summen analogen, hyperbolischen Flächen AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ etc. Ferner werden die, den Winkelbewegungen umgekehrt proportionalen, Umlaufszeiten sich umgekehrt wie diese Flächen verhalten. Es verhält sich daher die Umlaufszeit der beliebigen Schale DJO umgekehrt wie die Fläche DdQ, d. h. (nach der bekannten Quadratur der Curve[131]) direct wie das Quadrat des Abstandes SD. W. z. b. w.

2. Fall. Man ziehe vom Mittelpunkte aus sehr viele unbestimmte gerade Linien, welche mit der Axe gegebene Winkel bilden und einander um gleiche Stücke übertreffen. Indem diese geraden Linien sich um die Axe herumdrehen, wird jede der vorigen Schalen in unzählige Ringe getheilt, und jeder von diesen wird von vier anderen Ringen berührt werden, nämlich einem inneren, einem äusseren und zwei an seinen Seiten. Durch die Reibung des inneren und äusseren Ringes kann jeder einzelne Ring, bei der nach dem Gesetze des 1. Falles entstandenen Bewegung, nur gleich und nach entgegengesetzten Seiten gedrängt werden. Dies folgt aus dem Beweise des 1. Falles. Es wird daher jede, vom Mittelpunkte aus auf einer geraden Linie in's Unendliche fortgehende Reihe von Ringen, sich nach dem Gesetze des 1. Falles bewegen, so weit nicht die Reibung der an den Seiten befindlichen Ringe dies verhindert. Aber bei der nach diesem Gesetze stattfindenden Bewegung findet keine Reibung der Seitenringe statt, und die letztere verhindert daher nicht, dass die Bewegung nach jenem Gesetze erfolge. Wenn die vom Mittelpunkte gleich weit abstehenden Ringe sich entweder schneller oder langsamer an den Polen, als in der Nähe des Aequators, umdrehten; so würden die langsameren durch die wechselseitige Reibung beschleunigt, die schnelleren hingegen verzögert werden und so die Umlaufszeiten sich

stets, nach dem Gesetze des 1. Falles, der Gleichheit nähern. Diese Reibung verhindert daher nicht eine jenem Gesetze entsprechende Bewegung, dasselbe gilt daher auch hier, d. h. die Umlaufszeiten der einzelnen Ringe verhalten sich wie die Quadrate ihrer Abstände vom Centrum.

3. Fall. Nun theile man jeden Ring durch Querschnitte in unzählige Theilchen, welche eine absolut und gleichförmig flüssige Substanz enthalten. Da diese Schnitte sich nicht auf das Gesetz der Kreisbewegung beziehen, sondern nur zur Einschliessung der Flüssigkeit führen; so wird die Kreisbewegung wie früher fortdauern. Durch diese Schnitte werden alle noch so kleinen Ringe ihre Rauhigkeit und gegenseitige Reibung entweder gar nicht, oder gleich stark ändern. Bleiben somit die Ursachen einander proportional, so bleiben es auch die Wirkungen, d. h. die Bewegungen und Umlaufszeiten bleiben proportinal. W. z. b. w.

Da übrigens die Kreisbewegung und die hieraus entspringende Centrifugalkraft im Aequator grösser ist, als an den Polen, so muss irgend eine Ursache da sein, wodurch die einzelnen Theilchen in ihren Kreisen zurückgehalten werden, damit nicht die am Aequator befindliche Materie sich stets vom Mittelpunkte entferne, durch die äusseren Seiten eines Wirbels nach den Polen und von da längs der Axe in beständiger Circulation zum Aequator zurückkehre.

Zusatz 1. Hiernach verhalten sich die Winkelbewegungen aller flüssigen Theile um die Axe der Kugel umgekehrt wie die Quadrate der Abstände vom Centrum, und die absoluten Geschwindigkeiten umgekehrt wie diese Quadrate, dividirt durch die Abstände.

Zusatz 2. Dreht sich eine Kugel in einer ruhenden, ähnlichen und unbegrenzten Flüssigkeit mit gleichförmiger Bewegung um eine, der Lage nach gegebene Axe, so wird jene Bewegung der Flüssigkeit nach der Weise eines Wirbels mitgetheilt werden und sich nach und nach in's Unbegrenzte fortpflanzen. Sie wird ferner erst dann aufhören, in den einzelnen Theilen beschleunigt zu werden, wenn die Umlaufszeiten der letzteren den Quadraten ihrer Abstände vom Centrum proportional sind.

Zusatz 3. Da die inneren Theile des Wirbels wegen ihrer grösseren Geschwindigkeit gegen die äusseren reiben und drücken, und denselben hierdurch beständig Bewegung mittheilen; da diese äusseren Theile zugleich dieselbe Grösse der Bewegung auf andere weiter ausserhalb gelegene Theile übertragen und hierdurch die Grösse ihrer eigenen Bewegung unverändert beibehalten: so ist klar, dass die Bewegung beständig vom Mittelpunkte nach der Peripherie des Wirbels übertragen und durch die Unbegrenztheit derselben absorbirt wird. Die zwischen zwei beliebigen sphärischen, um den Wirbel concentrischen Oberflächen enthaltene Materie wird niemals beschleunigt werden, weil sie alle, von der inneren Materie enthaltene, Bewegung stets auf die äussere Materie überträgt.

Zusatz 4. Ferner ist, um den Wirbel beständig in demselben Zustande der Bewegung zu erhalten, irgend ein thätiges Princip erforderlich, von welchem die Kugel immer die Grösse der Bewegung erhalte, welche sie der Materie des Wirbels mittheilt. Ohne ein solches Princip müssen nothwendig die Kugel und die inneren Theile des Wirbels, da sie ihre Bewegung nach aussen fortpflanzen und keine neue Bewegung erhalten, allmählig sich verzögern und zuletzt aufhören sich umzudrehen.

Zusatz 5. Wenn eine andere Kugel in diesen Wirbel, bis zu einer gewissen Entfernung von seinem Mittelpunkte hineinschwimmt, und sich dabei um irgend eine der Neigung nach gegebene Axe, vermöge irgend einer Kraft, umdreht; so wird durch diese Umdrehung die Flüssigkeit in einen neuen Wirbel fortgerissen werden. Zuerst wird dieser zweite und kleine Wirbel mit seiner Kugel sich um das Centrum der ersteren drehen, inzwischen aber seine Bewegung sich weiter fortpflanzen und so nach und nach wie der erste Wirbel in's Unendliche ausbreiten. Auf dieselbe Weise wie diese zweite Kugel durch den ersten, wird auch die erste Kugel durch den zweiten Wirbel fortgerissen werden, dergestalt dass beide Kugeln sich um irgend einen, zwischen ihnen liegenden, Punkt herumdrehen und wegen jener Kreisbewegung sich von einander entfernen würden, wenn nicht irgend eine Kraft sie zusammen hielte.

Wenn später die beständig beigebrachten Kräfte, vermöge welcher die Kugeln in ihren Bewegungen verharren, zu wirken aufhörten und alles mechanischen Gesetzen überlassen würde; so müsste allmählig die Bewegung beider Kugeln (nach Zusätzen 3. und 4.) langsamer werden und endlich die Wirbel zur Ruhe kommen.

Zusatz 6. Wenn mehrere Kugeln sich an gegebenen Orten, um gegebene Axen und mit bestimmten Geschwindigkeiten fortwährend umdrehen, so werden eben so viele Wirbel entstehen, welche sich in's Unendliche ausdehnen. Denn die einzelnen Kugeln pflanzen nach derselben Weise, nach welcher es bei einer einzigen geschieht, ihre Bewegungen in's Unendliche fort, so dass jeder Theil der unbegrenzten Flüssigkeit durch die Bewegung angetrieben wird, welche aus der Wirksamkeit aller Kugeln hervorgeht. Die Wirbel werden daher nicht innerhalb bestimmter Grenzen eingeschlossen, sondern treten allmählig und wechselseitig in einander über, und vermöge ihrer gegenseitigen Wirkungen bewegen sich die Kugeln beständig von ihren Stellen, wie im vorhergehenden Zusatze gezeigt worden ist. Sie behalten daher keine bestimmte Lage gegen einander, wenn sie nicht durch irgend eine Kraft festgehalten werden. Wenn aber die Kräfte, welche durch ihre beständige Einwirkung auf die Kugeln diese Bewegungen erhalten, zu wirken aufhören; so wird die Materie, aus dem in Zusatz 3. und 4. angegebenen Grunde, nach und nach zur Ruhe kommen und aufhören, im Wirbel herumgetrieben zu werden.

Zusatz 7. Ist eine ähnliche Flüssigkeit in einem kugelförmigen

Gefässe verschlossen, und wird sie durch die gleichförmige Umdrehung einer im Mittelpunkt befindlichen Kugel im Wirbel herumgetrieben; drehen sich Kugel und Gefäss in derselben Richtung und um dieselbe Axe, sind zugleich ihre Umlaufszeiten den Quadraten ihrer Halbmesser proportional: so werden die Theile der Flüssigkeit nur dann erst ohne Beschleunigung und Verzögerung in ihrer Bewegung verharren, wenn ihre Umlaufszeiten den Quadraten der Abstände vom Mittelpunkte proportional sind. Keine andere Einrichtung des Wirbels kann von Dauer sein.

Zusatz 8. Wenn das Gefäss, die eingeschlossene Flüssigkeit und die Kugel diese Bewegung beibehalten, und sich ausserdem mit gemeinschaftlicher Winkelbewegung um irgend eine gegebene Axe umwälzen; so wird durch diese neue Bewegung die Reihung der flüssigen Theilchen unter sich unverändert bleiben. Die gegenseitige Ortsveränderung der Theilchen hängt nämlich von der Reibung ab, und jedes wird in einer Bewegung verharren, wodurch bewirkt wird, dass es durch die Reibung von der einen Seite nicht mehr verzögert, als von der entgegengesetzten beschleunigt wird.

Zusatz 9. Wenn daher das Gefäss ruhet und die Bewegung der Kugel gegeben ist, so wird auch die Bewegung der Flüssigkeit gegeben sein. Denkt man sich nämlich eine, durch die Axe der Kugel gehende und mit entgegengesetzter Bewegung sich umdrehende, Ebene und setzt man voraus, dass die Summe der Umdrehungszeiten der Ebene und der Kugel sich zu der letzteren verhalte, wie das Quadrat vom Halbmesser des Gefässes zum Quadrat des Halbmessers der Kugel; so werden die Umlaufszeiten der flüssigen Theile in Bezug auf diese Ebene sich verhalten, wie die Quadrate ihrer Abstände vom Mittelpunkte der Kugel.[192])

Zusatz 10. Wenn ferner das Gefäss sich um dieselbe Axe wie die Kugel, oder um irgend eine davon verschiedene Axe mit einer beliebigen gegebenen Geschwindigkeit bewegt; so ist auch die Bewegung der Flüssigkeit gegeben. Nimmt man nämlich dem ganzen Systeme die Winkelbewegung des Gefässes, so bleiben alle gegenseitigen Bewegungen dieselben, wie vorher nach Zusatz 8. Jene Bewegungen werden alsdann nach Zusatz 9. gegeben.

Zusatz 11. Wenn Gefäss und Flüssigkeit ruhen, die Kugel sich aber mit gleichförmiger Bewegung umdreht, so wird die letztere sich allmählig durch die ganze Flüssigkeit im Gefäss fortpflanzen und diese so herumgetrieben werden, wenn nicht eine Kraft es zurückhält. Flüssigkeit und Gefäss werden nicht früher aufhören, beschleunigt zu werden, als bis ihre Umlaufszeiten derjenigen der Kugel gleich sind. Wird das Gefäss durch irgend eine Kraft festgehalten, oder dreht es sich mit irgend einer constanten und gleichförmigen Bewegung um, so wird das Mittel allmälig zu dem, in den Zusätzen 8., 9. und 10. erklärten, Zustande der Bewegung gelangen und in keinem anderen verharren. Wenn hierauf die Kräfte, vermöge deren Gefäss und Kugel sich mit bestimmten Bewegungen um-

drehten, zu wirken aufhören und das ganze System mechanischen Gesetzen unterworfen ist; so werden Gefäss und Kugel mittelst der Flüssigkeit aufeinander wirken und nicht früher aufhören, ihre Bewegungen wechselseitig gegen einander fortzupflanzen, als bis ihre Umlaufszeiten einander gleich sind und das ganze System sich wie Ein fester Körper zugleich umdreht.

§. 76. Anmerkung. In dieser ganzen Untersuchung setze ich voraus, dass der flüssige Körper aus einer, in Bezug auf ihre Dichtigkeit und Flüssigkeit gleichartigen, Materie bestehe. So ist derjenige beschaffen, in welchem dieselbe Kugel bei derselben Bewegung und in derselben Zwischenzeit ähnliche und gleiche Bewegungen stets in gleiche Entfernungen fortpflanzen kann, wo auch immer die Kugel sich im flüssigen Körper befinde. Es versucht zwar die Materie, durch ihre kreisförmige Bewegung von der Axe des Wirbels zurückzuweichen und drückt daher gegen die weiter entfernte Materie. Aus diesem Drucke entspringt eine stärkere Reibung der Theile und eine schwierigere Trennung derselben von einander; folglich wird die Materie weniger flüssig werden. Sind ferner die Theile des flüssigen Körpers irgendwo dicker oder grösser, so ist derselbe weniger flüssig, weil die Zahl der Oberflächen, an denen die Theile sich von einander trennen können, geringer ist. Ich vermuthe, dass in derartigen Fällen die mangelnde flüssige Beschaffenheit entweder durch Schlüpfrigkeit der Theile, oder durch eine andere biegsam machende Eigenschaft ersetzt werde. Geschähe dies nicht, so würde die Materie da, wo sie weniger flüssig ist, fester zusammenhängen und träger sein, folglich die Bewegung langsamer annehmen und weiter fortpflanzen, als nach dem oben angegebenen Verhältniss der Fall sein soll. Ist die Form des Gefässes nicht sphärisch, so werden die Theilchen sich nicht in Kreislinien, sondern in Curven bewegen, welche der Figur des Gefässes ähnlich sind, und ihre Umlaufszeiten werden sich sehr nahe wie die Quadrate ihrer mittleren Abstände vom Centrum verhalten. In den Theilen zwischen dem Centrum und dem Umfange, wo die Räume breiter sind, werden die Bewegungen langsamer, wo jene enger sind, werden diese schneller sein; jedoch werden die schnelleren Theilchen nicht dahin streben, sich dem Umfange zu nähern. Sie beschreiben nämlich weniger gekrümmte Bogen und ihr Streben, sich vom Mittelpunkt zu entfernen, wird nicht weniger durch die Abnahme dieser Krümmung vermindert, als durch die Zunahme der Geschwindigkeit vermehrt. Indem sie von den engeren Räumen zu den weiteren fortschreiten, entfernen sie sich allmählig vom Centrum, werden aber durch diese Entfernung langsamer; indem sie später wieder von den weiteren zu den engeren Räumen übergehen, werden sie beschleunigt und es werden so die einzelnen Theilchen fortwährend wechselweise beschleunigt und verzögert. So verhält es sich in einem festen Gefässe; denn in einer unbegrenzten Flüssigkeit ist das Verhalten der Wirbel nach Zusatz 6. des vorhergehenden Paragraphen bekannt

Die Eigenschaften der Wirbel habe ich aber in diesem Lehrsatze zu erforschen versncht, nm zn erfahren, ob durch irgend ein Verhältniss derselben die Himmelserscheinnngen mittelst der Wirbel erklärt werden können. Es zeigt sich z. B. dass die Umlaufszeiten der um den Jupiter sich bewegenden Trabanten, im $^{3}/_{2}$ten Verhältniss ihrer Abstände vom Centrum des Jnpiters stehen, und dieselbe Regel gilt für die sich um die Sonne bewegenden Planeten. Diese Regeln gelten aber für jene Trabanten und diese Planeten aufs genaueste, so weit nämlich die astronomischen Beobachtungen dies bis jetzt angeben konnten.

Wenn daher jene Himmelskörper durch die um den Jupiter und die um die Sonne sich drehenden Wirbel herumgetragen werden, müssen auch diese sich nach demselben Gesetze herumdrehen. Die Umlaufszeiten der Theile des Wirbels standen aber im doppelten Verhältniss ihrer Entfernung vom Centrum der Bewegung, und es kann dieses Verhältniss nicht vermindert und etwa auf das $^{3}/_{2}$te reducirt werden, wenn nicht entweder die Materie des Wirbels desto flüssiger ist, je weiter sie vom Mittelpunkte absteht, oder der Widerstand, welcher aus der mangelhaften Schlüpfrigkeit der Theile der Flüssigkeit entspringt, durch die Zunahme der Geschwindigkeit, womit die Theile der Flüssigkeit sich von einander trennen, in einem grösseren Verhältniss wächst, als die Geschwindigkeit. Keines von beiden scheint jedoch mit der Vernunft (rationi) übereinzustimmen. Die dickeren und weniger flüssigen Theile werden, wenn sie nicht gegen den Mittelpunkt gravitiren, nach der Peripherie streben, und es ist wahrscheinlich, dass, wenn ich auch des Beweises wegen eine solche Hypothese, dass der Widerstand der Geschwindigkeit proportional sei, am Anfang dieses Abschnittes aufgestellt habe, doch der Widerstand in einem kleineren Verhältniss als dem der Geschwindigkeit stehe. Wird dies zugegeben, so werden die Umlaufszeiten der Theile des Wirbels in einem grösseren als dem doppelten Verhältniss ihrer Abstände vom Centrum stehen. Wenn die Wirbel (wie einige meinen) sich nahe beim Centrum schneller, hierauf bis zu einer gewissen Grenze langsamer, dann in der Nähe der Peripherie aufs neue schneller bewegen; so kann sicher weder das $^{3}/_{2}$te, noch irgend ein anderes festes und bestimmtes Verhältniss gelten. Es mögen daher die Naturforscher sehen, auf welche Weise jene Erscheinung des $^{3}/_{2}$ten Verhältnisses durch Wirbel erklärt werden könne.

§. 77. **Lehrsatz.** Körper, welche in einem Wirbel kreisförmige Umläufe machen, sind von derselben Dichtigkeit wie der Wirbel und bewegen sich, was Geschwindigkeit und Richtung betrifft, nach demselben Gesetze, wie die Theile desselben.

Nimmt man nämlich an, dass irgend ein kleiner Theil des Wirbels, dessen Theilchen oder physische Punkte eine gegebene Lage unter sich beibehalten, erstarre; so wird dieser, weil weder seine Dichtigkeit, noch die ihm eingeflösste Kraft, noch seine Gestalt sich ändert, sich nach

demselben Gesetzen wie früher bewegen. Umgekehrt wenn ein erstarrter und fester Theil des Wirbels dieselbe Dichtigkeit wie die übrigen Theile hat, und dann flüssig wird; so wird er sich nach demselben Gesetze wie früher bewegen, so weit nicht seine nun flüssig gewordenen Theilchen sich unter einander bewegen. Vernachlässigt man daher die Bewegung der Theilchen unter einander, als nicht zur fortschreitenden Bewegung des Ganzen gehörend; so wird die letztere unverändert wie vorher bleiben. Die Bewegung derselben wird aber mit derjenigen der anderen Theile des Wirbels, welche eben so weit vom Mittelpunkte entfernt sind, identisch sein, weil der flüssig gewordene feste Körper ein, den übrigen Theilen des Wirbels ähnlicher, Theil wird. Daher wird ein fester Körper, welcher gleiche Dichtigkeit wie die Materie des Wirbels besitzt, mit derselben Bewegung wie die Theile des Wirbels fortschreiten, indem er in Bezug auf die ihn zunächst umgebende Materie ruhet. Ist er dichter, so wird er dahin streben, weiter vom Mittelpunkte zurückzuweichen als früher, und indem er jene Kraft des Wirbels, durch welche er vorher in seiner Bahn, gleich wie im Zustande des Gleichgewichtes erhalten wurde, nun überwindet, wird er sich vom Mittelpunkte entfernen und bei seinem Umlaufe eine Spirale beschreiben, aber nicht mehr in denselben Kreis zurückkehren. Nach derselben Weise wird er, wenn er weniger dicht ist, sich dem Centrum nähern. Er wird daher nur dann denselben Kreis beschreiben, wenn er gleiche Dichtigkeit wie die Flüssigkeit hat. In diesem Falle ist aber gezeigt, dass er seinen Umlauf nach demselben Gesetze ausführen werde, welches die gleichweit vom Mittelpunkte entfernten Theile der Flüssigkeit befolgen. W. z. b. w.

Zusatz 1. Ein fester Körper, welcher sich in einem Wirbel bewegt und immer denselben Kreis beschreibt, wird in Bezug auf die Flüssigkeit, in welcher er schwimmt, ruhen.

Zusatz 2. Ist der Wirbel von gleichmässiger Dichte, so kann derselbe Körper in jeder Entfernung vom Centrum des Wirbels seinen Umlauf ausführen.

§. 78. Anmerkung. Hieraus ergibt sich, dass die Planeten nicht durch körperliche Wirbel herumgetragen werden. Nach den Hypothesen von Copernicus[193]) bewegen sich nämlich die um die Sonne fortgeführten Planeten in Ellipsen, deren Brennpunkt sich in der Sonne befindet und beschreiben mit den nach der Sonne gezogenen Radien Vectoren den Zeiten proportionale Flächen.

Die Theile eines Wirbels können sich aber nicht auf eine solche Weise bewegen. Es bezeichnen AD, BE, CF drei um die Sonne S beschriebene Bahnen, deren äusserste CF ein um die Sonne concentrischer Kreis sei, die Aphele der beiden inneren Bahnen seien A und B, ihre Perihele in D und E. Ein in der Bahn CF sich bewegender Körper wird, mit den nach der Sonne gezogenen Radien Vectoren der Zeit proportionale Flächen beschreiben und sich gleichförmig bewegen. Ein in

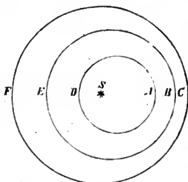


Fig. 187.

der Bahn BE sich bewegender Körper wird sich aber nach astronomischen Gesetzen langsamer im Aphel B und geschwinder im Perihel E bewegen, wogegen nach mechanischen Gesetzen die Materie des Wirbels sich in dem engeren Raume zwischen A und C geschwinder, als in dem weiteren Raume zwischen D und F, d. h. schneller im Aphel als im Perihel bewegen müsste. Beides widerstreitet einander.

So verhält sich im Anfange des Zeichens der Jungfrau, wo jetzt das Aphel des Mars sich befindet, der Abstand zwischen den Bahnen des Mars und der Venus zu ihrem Abstande im Anfange des Zeichens der Fische ungefähr wie 3 : 2[194]) und es muss daher die Materie des Wirbels sich zwischen jenen Bahnen in den Fischen schneller bewegen, als in der Jungfrau in demselben Verhältniss 3 : 2. Je enger nämlich der Raum ist, durch welchen dieselbe Menge der Materie in derselben Zeit geht, mit desto grösserer Geschwindigkeit muss sie hindurch gehen. Wenn daher die Erde, in dieser Materie am Himmel relativ ruhend, fortgetragen würde und mit ihr zugleich um die Sonne liefe; es würde ihre Geschwindigkeit im Anfange der Fische sich zu der Geschwindigkeit im Anfange der Jungfrau verhalten wie 3 : 2. Die tägliche scheinbare Bewegung der Sonne würde daher in der Jungfrau $> 70'$ und im Anfange der Fische $< 48'$ sein, während doch nach der Erfahrung jene scheinbare Bewegung der Sonne in den Fischen grösser als in der Jungfrau[195]), also die Bewegung der Erde in der Jungfrau grösser als in den Fischen ist.

Demnach widerspricht die Hypothese der Wirbel durchaus den astronomischen Erscheinungen, und dient nicht so sehr zu ihrer Erklärung, als zu ihrer Verwirrung. Wie aber jene Bewegungen in freien Räumen ohne Wirbel ausgeführt werden, kann man aus dem ersten Buche ersehen und wird vollständiger im Weltsysteme gelehrt werden.

Vom Weltsystem.

DRITTES BUCH.

In den vorhergehenden Büchern habe ich die Principien der Naturlehre dargestellt, jedoch nicht physische sondern nur mathematische, aus denen man nämlich in physikalischen Untersuchungen Schlüsse ziehen kann. Es sind das die Gesetze und Bedingungen der Bewegungen und Kräfte, welche sich hauptsächlich auf die Naturlehre beziehen. Damit dieselben aber nicht unfruchtbar erschienen, habe ich sie durch gewisse physikalische Anmerkungen erläutert, in denen ich dasjenige behandelte, was allgemein und hauptsächlich die Grundlage der Physik zu sein scheint, wie die Dichtigkeit und den Widerstand der Körper, die von Körpern leeren Räume, die Bewegung des Lichtes und des Schalles. Es bleibt noch übrig, dass wir nach jenen Principien die Einrichtung des Weltsystems kennen lernen.

Aus diesem Grunde hatte ich das dritte Buch in populärer Form geschrieben, damit es von mehreren gelesen würde. Diejenigen aber, welche die vorausgesetzten Principien nicht hinreichend eingesehen haben, würden die Kraft der Folgerungen nicht fassen und die Vorurtheile nicht ablegen, an welche sie sich seit vielen Jahren gewöhnt haben. Aus diesem Grunde habe ich, damit die Sache nicht in einen Streit hineingezogen werde, die Summe jenes Buches nach mathematischer Weise in Sätze übertragen, damit dieselben nur von denjenigen gelesen würden, welche die Principien vorher entwickelt haben. Da aber sehr viele Sätze dort vorkommen, welche auch die der Mathematik kundigen Leser zu lange anfhalten könnten, so will ich Niemanden veranlassen, sie alle zu entwickeln. Es dürfte hinreichend sein, wenn man die Erklärungen, die Gesetze der Bewegungen und die drei ersten Abschnitte des ersten Buches aufmerksam durchläse, hierauf zu diesem Buche vom Weltsystem überginge und die übrigen hier citirten Sätze der früheren Bücher nach Belieben zu Rathe zöge.

Regeln zur Erforschung der Natur.

1. Regel. An Ursachen zur Erklärung natürlicher Dinge nicht mehr zuzulassen, als wahr sind und zur Erklärung jener Erscheinungen ausreichen.

Die Physiker sagen: Die Natur thut nichts vergebens, und vergeblich ist dasjenige, was durch vieles geschieht und durch weniger ausgeführt werden kann. Die Natur ist nämlich einfach, und schwelgt nicht in überflüssigen Ursachen der Dinge.

2. Regel. Man muss daher, so weit es angeht, gleichartigen Wirkungen dieselben Ursachen zuschreiben.

So dem Athmen der Menschen und der Thiere, dem Falle der Steine in Europa und Amerika, dem Lichte des Küchenfeuers und der Sonne, der Zurückwerfung des Lichtes auf der Erde und den Planeten.

3. Regel. Diejenigen Eigenschaften der Körper, welche weder verstärkt noch vermindert werden können und welche allen Körpern zukommen, an denen man Versuche anstellen kann, muss man für Eigenschaften aller Körper halten.

Die Eigenschaften der Körper werden nämlich nur durch Versuche bekannt, und man muss daher diejenigen für allgemeine halten, welche im allgemeinen mit den Versuchen übereinstimmen, und die weder vermindert noch aufgehoben werden können. Offenbar kann man weder, dem Verlauf der Versuche zuwider, Träume ersinnen, noch sich von der Analogie der Natur entfernen, da diese einfach und mit sich übereinstimmend zu sein pflegt. Die Ausdehnung der Körper wird nur durch die Sinne erkannt, und nicht bei allen wahrgenommen; weil man sie aber bei allen wahrnehmbaren Körpern antrifft, nimmt man sie bei allen an. Dass mehrere Körper hart sind, erfahren wir durch Versuche. Die Härte des Ganzen entspringt aus der Härte der Theile, und hieraus schliessen wir mit Recht, dass nicht nur die wahrnehmbaren Theile dieser Körper, sondern auch die unzerlegbaren Theilchen aller Körper hart sind. Dass alle Körper undurchdringlich sind, leiten wir nicht aus der Vernunft, sondern aus Versuchen ab. Alles was wir unter Händen haben, finden wir undurchdringlich und daraus schliessen wir, dass die Undurchdringlichkeit eine Eigenschaft aller Körper ist. Dass alle Körper beweglich sind und vermöge einer gewissen Kraft, welche wir die Kraft der Trägheit nennen) in der Bewegung oder Ruhe verharren, schliessen wir daraus, dass wir diese Eigenschaften an allen betrachteten Körpern wahrgenommen haben. Die Ausdehnung, Härte, Undurchdringlichkeit, Beweglichkeit und Kraft der Trägheit des Ganzen entspringt aus denselben Eigenschaften der Theile; hieraus schliessen wir, dass die kleinsten Theile der Körper ebenfalls ausgedehnt, hart, undurchdringlich, beweglich und mit der Kraft der Trägheit begabt sind. Hierin besteht die Grundlage der gesammten Naturlehre. Ferner lernen wir aus den Erscheinungen, dass die sich wechselseitig berührenden Theile der Körper von einander getrennt werden können. Dass man durch Rechnung die

Theile noch in kleinere zerlegen könne, ist aus der Mathematik bekannt; ob man diese so zerlegt gedachten Theile durch Kräfte der Natur darstellen könne, ist ungewiss. Wenn es sich aber durch Einen Versuch ergäbe, dass einige unzerlegte Theilchen, durch Zerbrechung eines harten und festen Körpers, eine Theilung vertrügen; so würden wir daraus nach dieser Regel schliessen, dass nicht nur zerlegte Theile trennbar seien, sondern dass auch unzerlegte in's Unendliche getheilt werden können.

Sind endlich alle Körper in der Umgebung der Erde gegen diese schwer, und zwar im Verhältniss der Menge der Materie in jedem; ist der Mond gegen die Erde nach Verhältniss seiner Masse, und umgekehrt unser Meer gegen den Mond schwer; hat man ferner durch Versuche und astronomische Beobachtungen erkannt, dass alle Planeten wechselseitig gegen einander und die Cometen gegen die Sonne schwer sind; so muss man nach dieser Regel behaupten, dass alle Körper gegeneinander schwer seien. Stärker ist der Beweis in Bezug auf die allgemeine Schwere, als auf die Undurchdringlichkeit der Körper, über welche letztere wir keinen Versuch und keine Beobachtung der Himmelskörper haben. Ich behaupte aber doch nicht, dass die Schwere den Körpern wesentlich zukomme. Unter eigenthümlicher Kraft begreife ich die Kraft der Trägheit, welche unveränderlich ist, wogegen die Schwere mit der Entfernung von der Erde abnimmt.

4. Regel. In der Experimentalphysik muss man die, aus den Erscheinungen durch Induction geschlossenen, Sätze, wenn nicht entgegengesetzte Voraussetzungen vorhanden sind, entweder genau oder sehr nahe für wahr halten, bis andere Erscheinungen eintreten, durch welche sie entweder grössere Genauigkeit erlangen, oder Ausnahmen unterworfen werden.

Dies muss geschehen, damit nicht das Argument der Induction durch Hypothesen aufgehoben werde.

Erscheinungen.

1. Erscheinung. Die Jupitertrabanten beschreiben mit den, nach dem Mittelpunkte des Jupiter gezogenen, Radien der Zeit proportionale Flächenräume, und ihre siderischen Umlaufszeiten stehen im $^3/_2$ten Verhältniss ihrer Abstände von jenem Centrum.

Dies ergiebt sich aus den astronomischen Beobachtungen. Die Bahnen dieser Trabanten weichen nicht sehr von Kreisen ab, welche um den Jupiter concentrisch sind, und ihre Bewegungen in diesen Kreisen findet man gleichförmig. Dass aber die Umlaufszeiten im $^3/_2$ten Verhältniss der Halbmesser ihrer Bahnen stehen, nehmen die Astronomen einstimmig an, und ergiebt sich dies auch aus der folgenden Tafel.

Umlaufszeiten der Jupitertrabanten.

I.	II.	III.	IV.
$1^d\,18^h\,27^m\,34^s$;	$3^d\,13^h\,13^m\,42^s$,	$7^d\,3^h\,42^m\,36^s$;	$16^d\,16^h\,32^m\,9^s$.

Abstände der Trabanten vom Mittelpunkte des Jupiters in Jupiters-Halbmessern.

	I.	II.	III.	IV.
Nach d. Beobachtnng. v. Borellus	5,667	8,667	14	24,667
„ „ „ „ Townley durch Mikrom.	5,52	8,78	13,47	24,72
„ „ „ „ Cassini im Telescop gem.	5	8	13	23
„ „ „ „ „ durch Trab.-Verfinst.	5.667	9	14.383	25,3
Aus den Umlaufszeiten	5,667	9,017	14.384	25,299 [196])

Die Elongationen der Trabanten des Jnpiters hat Pound mit den besten Mikrometern auf folgende Weise bestimmt. Die grösste heliocentrische Elongation des vierten Trabanten vom Mittelpnnkte des Jupiters wurde mit einem Mikrometer in einem 15 Fuss langen Fernrohre gemessen; sie ergab sich in der mittleren Entfernung des Jnpiters von der Erde ungefähr = 8′ 16″.

Die Elongation des dritten Trabanten mass er in einem 123 Fuss langen Fernrohre nnd fand sie für dieselbe Entfernung des Jnpiters von der Erde = 4′ 42″. Die grössten Elongationen der beiden übrigen Trabanten, in derselben Entfernnng des Jupiters von der Erde, ergaben sich aus den Umlaufszeiten zn 2′ 56″ 47‴ und 1′ 51″ 6‴.

Der Dnrchmesser des Jupiters wurde öfters mit dem Mikrometer im Fernrohre vom 123 Fnss Länge gemessen, und ergab sicb auf die mittlere Entfernung des Jupiters von der Sonne oder Erde reducirt, stets $\angle$ 40″, nie $\angle$ 38″ und öfters $\angle$ 39″. In kürzeren Fernröhren ist dieser Durchmesser 40″ oder 41″.

Das Licht des Jnpiters wird nämlich durch ungleicbe Brechbarkeit etwas ansgedebnt, und diese Ausdehnung hat ein kleineres Verbältniss zu seinem Dnrchmesser in grösseren und vollkommeneren Fernröbren, als in kürzeren nud weniger vollkommenen. Die Zeiten, in denen zwei Trabanten, nämlicb der erste nnd dritte vor dem Jupiter vorübergingen, wurden vom Anfange des Eintritts bis znm Ende des Anstritts, und aucb vom vollständigen Eintritt bis znm vollständigen Anstritt, vermittelst desselben grösseren Fernrobres beobachtet. Der Durchmesser des Jupiters, in seinem mittleren Abstande von der Erde ergiebt sicb

aus dem Vorübergange des ersten Trabanten = 37,″125
„ „ „ „ dritten „ = 37,375.

Ancb die Zeit, in welcber der Schatten des ersten Trabanteu über den Jupiter wegging, wurde beobacbtet und es ergab sicb daraus, für den obigen mittleren Abstand, der Durcbmesser beiläufig = 37″. Nebmen wir an, dass der Durchmesser sehr nahe = 37″,25 sei, so werden die grössten Elongationen der vier Trabanten in Jnpitershalbmessern: 5,965; 9,494; 15,141; 26,630.[197])

2. Erscbeinung. Die Trabanten des Saturns beschreiben, mit den nacb dem Mittelpunkte des letzteren gezogenen Radien, den Zeiten proportionale Flächenränme und ihre siderischen Umlaufszeiten steben im $^3/_2$ten Verbältniss ihrer Abstände von jenem Centrum. Cassini be-

stimmte durch seine Beobachtnngen ihre Abstände vom Saturnscentrum und ihre Umlanfsseiten folgendermaassen:

	Umlaufszeiten der Trabanten.				Abstände der Trabanten vom Centrum des Satnrns in Halbmessern des Ringes.	
					Aus Beobachtungen.	Ans den Umlanfszeiten.
I.	1^d	21^h	18^m	27^s	1,95	1,93
II.	2	17	41	22	2,50	2,47
III.	4	12	25	12	3,50	3,45
IV.	15	22	41	14	8	8
V.	79	7	48	0	24	23,35[196])

Die grösste Elongation des vierten Trahanten vom Mittelpunkte des Satnrns pflegt man nach den Beobachtungen sehr nshe zn 8 Halbmessern anzunehmen. Dieselhe ergab sich aher, indem sie mit einem sehr guten Mikrometer in einem Huygensschen Fernrohre von 123 Fuss Länge gemessen wurde, gleich 8,7 Halbmessern. Nach dieser Beohachtnng nnd den Umlaufszeiten sind die Ahstände der Trahanten in Halbmessern des Ringes 2,1; 2,69; 3,75; 8,7; 25,35, (25,39).

Der Durchmesser des Saturns verhielt sich zn dem seines Ringes in demselben Fernrohre, wie 3 : 7 und der Durchmesser des Ringes ergab sieh am 28. nnd 29. Mai 1719 = 43″. Reducirt man denselben auf die mittlere Entfernung des Saturns von der Erde, so wird er = 42″ und der Durchmesser des Saturns selbst = 18″.

Dies verhält sich so in sehr langen nnd guten Fernröhren, weil in diesen die scheinbaren Grössen der Himmelskörper ein grösseres Verhältniss zur Ausdehnung des Lichtes an den Grenzen jener Körper haben, als in kleineren Fernröhren. Verwirft man alles irrige Licht, so bleiht der Durchmesser des Satnrns nicht grösser als 16″.[199])

3. Erscheinnng. Die fünf Planeten Mercnr, Venus, Mars, Jnpiter und Saturn schliessen mit ihren Bahnen die Sonne ein. Dass Mercur nnd Venns sich nm die Sonne bewegen, sieht man an ihren mondförmigen Phasen. Mit vollem Scheine lenchtend befinden sie sich jenseits, mit halben lenchteud in der Gegend der Sonne, und wenn sie sichelförmig erscheinen, diesseits derselben, wo sie bisweilen wie dunkle Flecke vor der Sonnenscheibe vorühergehen. Ferner hat man ans dem vollen Lichte des Mars in der Nähe der Conjunction der Sonne und aus dem höckrigen Ansehen in der Nähe der Quadraturen als gewiss erkannt, dass er um die Sonne länft. Vom Jupiter und Saturn wird dasselhe ans ihrem stets vollen Lichte erwiesen; dass sie nämlich nur durch das von der Sonne geliehene Licht glänzen, erhellt aus dem auf sie geworfenen Schatten der Trabanten.

4. Erscheinung. Die siderischen Umlaufszeiten der fünf Planeten um die Sonne, nnd die Umlaufszeit entweder der Sonne um die Erde oder dieser um jene, stehen im $^3/_2$ten Verhältnisse ihrer mittleren Entfernungen um die Sonne.

Dieses von Kepler gefundene Verhältniss ist bei Allen ausser Zweifel. Sowohl die Umlaufszeiten als die Dimensionen der Bahnen sind dieselben, mag die Sonne sich um die Erde, oder diese um jene bewegen. Ueber die Messung der Umlaufszeiten sind alle Astronomen einig. Die Grösse aller Bahnen sind besonders von Kepler und Bullialdus aus den Beobachtungen bestimmt, und die mittlern Entfernungen, welche den Umlaufszeiten entsprechen, weichen nicht merklich von den Entfernungen ab, welche jene beiden gefunden haben und sie liegen meistens in der Mitte zwischen ihren Angaben.

	Saturn.	Jupiter.	Mars.	Erde.	Venus.	Mercur.
Siderische Umlaufszeit. u. d. Sonne in Tagen	10759,275	4332,514	686,9785	365,2565	224,6176	87,9692
Mittlere Abstände v. d. Sonne nach Kepler	951000	519650	152350	100000	72400	38806
nach Bullialdus	954198	522520	152350	100000	72398	38585
aus den Umlaufszeiten	954006	520096	152369	100000	72333	38710[80])

Ueber die Abstände des Mercurs und der Venus von der Sonne zu streiten, ist kein Grund vorhanden, da dieselben durch ihre Elongationen von der Sonne bestimmt werden. In Bezug auf die Abstände der oberen Planeten von der Sonne wird aller Streit durch diese Verfinsterungen der Jupitertrabanten gehoben. Durch diese Verfinsterungen wird nämlich die Lage des Schattens bestimmt, welche der Jupiter wirft, und man erhält auf diese Weise eine heliocentrische Länge. Aus der gegenseitigen Vergleichung der heliocentrischen und geocentrischen Länge des Jupiters leitet man seinen Abstand her.

5. Erscheinung. Die Planeten beschreiben, mit den nach der Erde gezogenen Radien, keine den Zeiten proportionale Flächen, wohl aber durchlaufen sie, an den nach der Sonne gezogenen Radien, Flächen, welche den Zeiten proportional sind.

In Bezug auf die Erde schreiten sie bald vorwärts, bald stehen sie still, bald gehen sie rückwärts. In Bezug auf die Sonne aber gehen sie immer vorwärts, und zwar sehr nahe mit gleichförmiger Bewegung, jedoch etwas langsamer im Aphel und etwas schneller im Perihel, so dass die in gleichen Zeiten beschriebenen Flächenräume gleich werden. Dies ist ein den Astronomen sehr bekannter Satz, welcher beim Jupiter vorzüglich durch die Verfinsterungen seiner Trabanten bewiesen wird, und wodurch man, wie oben bemerkt, die Länge und die Entfernung desselben von der Sonne bestimmt.

6. Erscheinung. Der Mond beschreibt, mit den nach der Erde, gezogenen Radien, eine der Zeit proportinale Fläche.

Dies erhellt aus der Vergleichung der scheinbaren Bewegung des Mondes mit seinem scheinbaren Durchmesser. Gestört wird aber der Mond ein wenig durch die Kraft der Sonne, allein unmerklich kleine Fehler vernachlässige ich in diesen Erscheinungen.

ABSCHNITT I.
Von den Ursachen des Weltsystems.

§. 1. Lehrsatz. Die Kräfte, durch welche die Trabanten des Jupiters beständig von der geradlinigen Bewegung abgezogen, und in ihren Bahnen erhalten werden, sind nach dem Mittelpunkte des Jupiters gerichtet und den Quadraten ihrer Abstände von demselben Punkte umgekehrt proportional.

Der erste Theil dieses Satzes ergieht sich aus der 1. Erscheinung und aus §. 14. oder §. 16. des ersten Buches, und der folgende Theil aus derselben Erscheinung und §. 18. jenes Buches.

Dasselbe erklärt sich von den Trabanten des Saturns durch die 2. Erscheinnng.

§ 2. Lehrsatz. Die Kräfte, durch welche die Planeten beständig von der geradlinigen Bewegung abgezogen, und in ihren Bahnen erhalten werden, siud nach der Sonne gerichtet nnd den Quadraten ihrer Abstände von derselben umgekehrt proportional.

Der erste Theil dieses Satzes ergiebt sich aus der 5. Erscheinung und §. 14. des ersten Buches, der folgende aus der 4. Erscheinung und §. 18. jenes Buches. Am entschiedensten wird aber dieser Theil des Satzes durch die Ruhe der Apsiden erwiesen. Die kleinste Abweichung vom doppelten Verhältniss würde nämlich (nach §. 85., Zusatz 1. des ersten Buches) eine bei den einzelnen Umläufen bemerkbare, bei mehreren aber sehr beträchtliche, Bewegung der Apsiden hervorbringen.

§. 3. Lehrsatz. Die Kraft, welche den Mond in seiner Bahn erhält, ist nach der Erde gerichtet und dem Quadrat des Abstandes seiner Oerter vom Centrum der Erde umgekehrt proportional.

Der erste Theil der Behauptung ist durch die 6. Erscheiuuug und den §. 14. oder §. 16. des ersten Buches klar, der folgende Theil wird durch die sehr langsame Bewegung des Mond-Apogeums erwiesen. Jene Bewegung nämlich, welche in den einzelnen Umläufen $3^0\ 3'$ rechtläufig beträgt, kann vernachlässigt werden. Es erhellt aus §. 106., Zusatz 1. des erstsn Buches, dass, wenn der Abstand des Mondes vom Erdcentrum sich zum Halbmesser der letzteren wie D : 1 verhält, alsdann die Kraft, aus welcher eine solche Bewegung entspringt, proportional sei $\frac{1}{D^2 + \frac{4}{243}}$ d. h. dass sie umgekehrt in einem etwas grösseren Verhältniss als dem doppelten stehe, welches Verhältniss jedoch $59^3/_4$ mal dem doppelten näher als dem dreifachen liegt [201])

Dieser Zuwachs entspringt aber, wie später gezeigt werden wird, aus der Wirksamkeit der Sonne und ist daher hier zu vernachlässigen. Die Wirkung der Sonne, so weit sie den Mond von der Erde abzieht,

ist sehr nahe dem Abstande der beiden letzteren von einander proportional, und verhält sich daher (nach §. 106., Zusatz 2. des ersten Buches) zur Centripetalkraft des Mondes ungefähr wie 2 : 357,45 = 1 : 178,725.

Vernachlässigt man diese sehr kleine Kraft, so verhält sich die übrige Kraft, durch welche der Mond in seiner Bahn erhalten wird, umgekehrt wie D^2. Dies wird sich auch noch vollständiger zeigen, wenn man diese Kraft mit der Kraft der Schwere vergleicht, was im folgenden Paragraphen geschehen wird.

Zusatz. Wird die mittlere Centripetalkraft, welche den Mond in seiner Bahn erhält, erst im Verhältniss 177,725 : 178,725; hierauf auch im doppelten Verhältniss des Halbmessers der Erde zum mittleren Abstande des Mondmittelpunktes vom Centrum der Erde vergrössert: so erhält man die Centripetalkraft des Mondes an der Oberfläche der Erde, vorausgesetzt, dass jene Kraft bei der Annäherung zur Oberfläche der Erde stets im umgekehrten doppelten Verhältniss der Entfernung wachse.

§. 4. Lehrsatz. Der Mond ist gegen die Erde schwer, er wird durch die Schwere von der geradlinigen Bewegung abgezogen und in seiner Bahn erhalten.

Die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde in den Syzygien ist nach Ptolemäus und den meisten Astronomen = 59, nach Vendelinus und Huygens = 60, nach Copernicus = $60\frac{1}{3}$, nach Streetus = $60\frac{2}{5}$ und nach Tycho = $56\frac{1}{2}$ Erdhalbmesser. Tycho aber und alle diejenigen, welche seine Refractionstafeln benutzen, haben die Refraction der Sonne und des Mondes (ganz der Natur des Lichtes zuwider) grösser als diejenige der Fixsterne angenommen, und zwar um 4 bis 5 Minuten, und um eben so viel die Parallaxe des Mondes vergrössert, d. h. um $\frac{1}{12}$ oder $\frac{1}{15}$ der ganzen Parallaxe. Verbessert man diesen Fehler, so wird die Entfernung = $60\frac{1}{2}$ Erdhalbmessern, wie die anderen sie angeben. Wir wollen die mittlere Entfernung in den Syzygien = 60 Halbmessern annehmen und die siderische Umlaufszeit des Mondes = $27^d\ 7^h\ 43^m$ setzen, wie die Astronomen sie feststellen. Wenn wir ferner den Umfang der Erde nach den Messungen der Franzosen = 123249600 Pariser Fuss annehmen und uns denken, der Mond werde aller Bewegung beraubt und losgelassen, um vermöge der ganzen Kraft, durch welche er (nach §. 3., Zusatz) in seiner Bahn erhalten wird, zur Erde herabzusteigen; so wird er in einer Minute einen Weg von $15\frac{1}{12}$ Pariser Fuss zurücklegen. Man schliesst dies vermittelst einer Rechnung, welche man entweder nach §. 76. des ersten Buches, oder (was auf dasselbe hinauskommt) nach §. 18., Zusatz 9. desselben Buches anstellt. Der Sinus versus desjenigen Bogens, welchen der Mond bei seiner mittleren Bewegung und bei einer Entfernung von 60 Erdhalbmessern in 1 Minute beschreibt, ist nämlich ungefähr $15\frac{1}{12}$ Fuss oder genauer 15 Fuss 1 Zoll $1\frac{4}{9}$ Linien Pariser Maass gleich.[202]) Da nun jene Kraft bei der Annäherung zur Erde im umgekehrten doppelten Verhältniss des Abstandes zunimmt, und demnach an der Oberfläche der Erde 60.60

mal so gross als am Monde ist; so müsste ein, vermöge jener Kraft in unseren Gegenden fallender, Körper in 1 Minute einen Weg von $60.60.15^1/_{12}$ Fuss und in 1 Secunde $15^1/_{12}$ Fuss oder genauer 15 Fuss 1 Zoll $1^4/_9$ Linien Pariser Maass zurücklegen.

Auf der Erde fallen aber in der That die schweren Körper vermöge jener Kraft. Nach Huygens ist nämlich die Länge eines, in der Breite von Paris Secunden schlagenden, Pendels = 3 Fuss 8,5 Zoll Par. Maass. Die Höhe, welche ein fallender schwerer Körper in 1 Secunde beschreibt, steht zur halben Pendellänge im doppelten Verhältniss der Peripherie zum Durchmesser eines Kreises (nach Huygens); sie ist also = 15 Fuss 1 Zoll $1^7/_9$ Linie. Die Kraft, durch welche der Mond in seiner Bahn erhalten wird, ergibt sich daher, wenn er zur Erde herabsteigt, unserer Schwerkraft gleich und ist demnach (nach der 1. und 2. Regel) eben dieselbe Kraft, welche wir Schwere zu nennen pflegen. Wäre nämlich die Schwere von ihr verschieden, so müssten die, vermöge der beiden vereinten Kräfte der Erde sich nähernden, Körper doppelt so geschwind herabsteigen und in 1 Secunde einen Weg von $30^1/_6$ Fuss zurücklegen. Dies ist gegen die Erfahrung.

Die vorstehende Rechnung gründet sich auf die Hypothese, dass die Erde ruhe Denn wenn Erde und Mond sich um die Sonne, und inzwischen auch um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt bewegen; so wird bei unverändertem Gesetz der Schwere die gegenseitige Entfernung ihrer Mittelpunkte ungefähr $60^1/_2$ Erdhalbmesser sein, wie die Rechnung, welche nach §. 101. des ersten Buches angestellt werden kann, jedem zeigen wird.[203])

§. 5. Anmerkung. Der Beweis dieses Satzes kann ausführlich folgendermaassen angestellt werden. Wenn mehrere Monde um die Erde liefen, wie dies beim Jupiter und Saturn der Fall ist, so würden ihre Umlaufszeiten (indem man durch Induction schliesst) das von Kepler entdeckte Gesetz der Planeten befolgen, und es würden sich daher ihre Centripetalkräfte (nach §. 1. dieses Buches) umgekehrt wie die Quadrate ihrer Abstände vom Mittelpunkte der Erde verhalten. Wäre der Abstand des untersten von ihnen kleiner, und berührte er selbst beinahe die Gipfel der höchsten Berge; so würde seine Centripetalkraft, wodurch er in der Bahn erhalten wird (nach der vorstehenden Rechnung) sehr nahe der Schwere der auf jenen Gipfeln befindlichen Körper gleich sein. Würde nun dieser kleine Mond der Centripetalkraft, welche ihn in seiner Bahn in Bewegung erhielt, heraubt; so müsste jene Centripetalkraft bewirken, dass er zur Erde herabstiege, und zwar mit derselben Geschwindigkeit, welche die auf jenen Gipfeln fallenden Körper haben, weil nämlich ihre Kräfte einander gleich sind. Wäre jene Kraft, vermöge welcher der kleine Mond herabsteigt, von der Schwere verschieden und wäre er ausserdem gegen die Erde schwer, wie es die Körper auf jenen Bergen sind; so würde er vermöge beider vereinter Kräfte doppelt so schnell herabsteigen. Da nun beide Kräfte, sowohl die der schweren

Körper als die der Monde, gegen die Erde gerichtet, und da sie beide einander gleich und ähnlich sind; so werden sie (nach 1. und 2. Regel) auch dieselbe Ursache haben. Jene Kraft, welche den Mond in seiner Bahn erhält, wird daher dieselbe sein, welche wir Schwere zu nennen pflegen und zwar hauptsächlich desshalb, weil der kleine Mond entweder auf den Spitzen der Berge von aller Schwere frei sein, oder doppelt so geschwind als schwere Körper fallen würde.

§. 6. Lehrsatz. Die Jupitertrabanten gravitiren gegen den Jupiter, die Saturntrabanten gegen den Saturn, die Planeten gegen die Sonne und werden durch die Kraft ihrer Schwere stets von der geradlinigen Bewegung abgezogen und in krummlinigen Bahnen erhalten.

Die Bewegungen der Jupitertrabanten um den Jupiter, der Saturnstrabanten um den Saturn, die Bewegungen des Merkurs, der Venus, wie auch der übrigen Planeten um die Sonne sind Erscheinungen von derselben Art, und hängen daher (nach 2. Regel) von Ursachen derselben Art ab; besonders da gezeigt ist, dass die Kräfte, von denen jene Bewegungen abhängen, nach den Mittelpunkten des Jupiters, des Saturns und der Sonne gerichtet sind, und bei der Entfernung von diesen Mittelpunkten in demselben Verhältniss und nach demselben Gesetze abnehmen, wie die Kraft der Schwere bei der Entfernung von der Erde.

Zusatz 1. Die Schwere findet daher gegen alle Planeten und Trabanten statt. Dass nämlich die Venus, der Merkur und die anderen Planeten von derselben Art wie der Jupiter und der Saturn seien, bezweifelt niemand. Da nun jede Anziehung nach dem 3. Gesetz der Bewegung wechselseitig ist, so wird der Jupiter gegen alle seine Trabanten, der Saturn gegen die seinigen, die Erde gegen den Mond und die Sonne gegen alle Planeten schwer sein.

Zusatz 2. Die nach jedem einzelnen Planeten gerichtete Schwere ist indirect dem Quadrate des Abstandes jedes einzelnen Ortes von seinem Mittelpunkte proportional.

Zusatz 3. Alle Planeten sind nach Zusatz 1. und 2. gegen einander schwer, daher werden der Jupiter und der Saturn sich wechselseitig in der Nähe ihrer Conjunction anziehen und ihre wechselseitigen Bewegungen merklich stören. Eben so wird die Sonne die Bewegung des Mondes, die Sonne und der Mond unser Meer stören, wie im Folgenden gezeigt werden wird.

§. 7. Anmerkung. Bis jetzt haben wir jene Kraft, welche die Himmelskörper in ihren Bahnen erhält, Centripetalkraft genannt. Dass sie mit der Schwere identisch sei, ist ausgemacht, und wir wollen sie daher künftig Schwere nennen. Die Ursache jener Centripetalkraft, welche den Mond in seiner Bahn erhält, kann nämlich nach der 1., 2. und 4. Regel auf alle Planeten ausgedehnt werden.

§. 8. Lehrsatz. Alle Körper sind gegen die einzelnen Planeten schwer, und die Gewichte der ersteren gegen jeden Planeten sind in

gleichen Abständen vom Mittelpunkt des letzteren der Menge der in den einzelnen Körpern befindlichen Materie proportional.

Dass der Fall aller schweren Körper gegen die Erde (wenigstens nach Fortnahme der ungleichen Verzögerung, welche aus dem geringen Widerstande der Luft entspringt) in gleichen Zeiten erfolge, haben schon vor langer Zeit andere beobachtet, und am genauesten kann man die Gleichheit der Zeiten an Pendeln wahrnehmen. Ich habe Versuche angestellt mit Gold, Silber, Blei, Glas, Sand, Kochsalz, Holz, Wasser und Waizen. Zur Vergleichung benutzte ich zwei gleiche runde Büchsen. Die eine füllte ich mit Holz an und hing dasselbe Gewicht Goldes (so genau ich konnte) im Schwingungspunkt jener auf. Die an gleichen, 11 Fuss langen Fäden hängenden Büchsen bildeten Pendel, welche in Bezug auf Gewicht, Figur und Widerstand der Luft durchaus einander gleich waren, und sie schwangen, bei gleichen Schwingungen nebeneinander angebracht, sehr lange hin und her. Ferner verhielt sich die Menge der Materie im Golde (nach dem zweiten Buche, §. 34. Zusatz 1. und 6.) zur Menge der Materie im Holze, wie die Wirkung der bewegenden Kraft auf das ganze Gold, zu derselben Wirkung auf das ganze Holz, d. h. wie das Gewicht des einen zu dem des andern. Eben so mit den übrigen. Bei Körpern von demselben Gewicht könnte ein Unterschied der Materie, selbst wenn er kleiner als $\frac{1}{1000}$ des ganzen wäre, durch diese Versuche deutlich wahrgenommen werden.

Dass nun aber die Natur der Schwere gegen die Planeten dieselbe sei, wie gegen die Erde, ist ausser allem Zweifel. Denken wir uns nämlich diese irdischen Körper bis zur Mondbahn emporgehoben, und mit dem aller Bewegung beraubten Monde losgelassen, damit sie zugleich gegen die Erde fallen; so werden sie, wie wir bereits gezeigt haben, sicher in gleichen Zeiten gleiche Wege wie der Mond beschreiben, und sie werden sich daher zu der Menge der Materie im Monde verhalten, wie ihre Gewichte zum Gewicht des letzteren. Da ferner die Jupitertrabanten sich in Zeiten um den Jupiter bewegen, welche im $^3/_2$ten Verhältniss ihrer Abstände von seinem Mittelpunkte stehen, so wird ihre beschleunigende Schwerkraft gegen den Jupiter den Quadraten dieser Abstände indirect proportional sein. In gleichen Abständen von demselben würden ihre beschleunigenden Schwerkräfte einander gleich werden. Ferner würden sie, wenn sie von gleichen Höhen herabfallen, in gleichen Zeiten gleiche Wege beschreiben, ganz wie es mit schweren Körpern auf unserer Erde geschieht.

Auf dieselbe Weise würden die um die Sonne sich bewegenden Planeten, wenn sie in gleichen Abständen von dieser losgelassen würden, gegen sie hin in gleichen Zeiten gleiche Wege beschreiben. Die Kräfte aber, durch welche ungleiche Körper gleich beschleunigt werden, verhalten sich wie die Körper, d. h. die Gewichte sind der Menge der Materie in den Planeten proportional. Dass ferner die Gewichte des Jupiters und

seiner Trabanten gegen die Sonne der Menge der in ihnen respective enthaltenen Materie proportional sind, folgt nach dem ersten Buche, §. 106., Zusatz 3. aus der höchst regelmässigen Bewegung der Trabanten. Würden nämlich einige von ihnen, nach Verhältniss der Menge ihrer Materie, stärker als die übrigen zur Sonne hingezogen, so würde die Bewegung der Trabanten (nach dem eben erwähnten §., Zusatz 2.) durch die ungleiche Anziehung gestört werden. Wenn in gleichen Abständen von der Sonne ein Trabant gegen dieselbe schwerer nach Verhältniss seiner Masse wäre, als der Jupiter nach seiner Masse, und zwar in dem beliebigen gegebenen Verhältniss d : e; so würde der Abstand zwischen dem Mittelpunkte der Sonne und dem der Trabantenbahn stets grösser sein, als der Abstand zwischen dem ersteren Punkte und dem Mittelpunkte des Jupiters und zwar sehr nahe im halben Verhältniss, wie ich durch eine angestellte Rechnung gefunden habe. Eben so würde, wenn ein Trabant im Verhältniss d : e weniger schwer gegen die Sonne wäre, der Mittelpunkt seiner Bahn in jenem halben Verhältniss weniger von der Sonne entfernt sein, als der Mittelpunkt des Jupiters. Wenn daher in gleichen Abständen von der Sonne die beschleunigende Schwerkraft irgend eines Trabanten gegen die letztere grösser oder kleiner wäre, als die beschleunigende Schwerkraft des Jupiters und zwar nur um $\frac{1}{1000}$ der ganzen Schwerkraft; so würde der Mittelpunkt des Trabanten von der Sonne um ein $\frac{1}{2000}$ des ganzen Abstandes mehr oder weniger entfernt sein, als der Jupiter[204], d. h. um $^1/_5$ des Abstandes des äussersten Trabanten vom Jupiter. Eine solche Excentricität der Bahn würde vollkommen bemerkbar sein. Die Bahnen der Trabanten sind aber um den Jupiter concentrisch, mithin sind die beschleunigenden Kräfte der Schwere des Jupiters und seiner Trabanten gegen die Sonne einander gleich. Aus demselben Grunde sind die Gewichte des Saturns und seiner Trabanten gegen die Sonne, in gleichen Abständen von derselben, der Menge der Materie proportional, welche jeder von ihnen enthält. Ferner werden der Mond und die Erde entweder gar kein Gewicht gegen die Sonne haben, oder es wird dasselbe genau ihren Massen proportional sein. Nach §. 6., Zusatz 1. und 3. sieht man aber, dass sie ein Gewicht haben müssen. Demnach verhalten sich die Gewichte aller einzelnen Theile eines beliebigen Planeten gegen einen andern Planeten unter sich, wie die Menge der Materie, welche jeder enthält. Denn wenn einige dieser Theile mehr oder weniger gravitirten, als nach Verhältniss der Menge ihrer Materie; so würde der ganze Planet in einem grösseren oder kleineren Verhältniss, als dem der Menge seiner Materie schwer sein, je nach der Natur der Theile, deren er eine grössere Menge enthielte. Es verschlägt dabei nichts, ob diese Theile äussere oder innere Theile der Planeten sind. Setzt man z. B. voraus, dass die hier auf der Erde befindlichen Körper bis zur Mondbahn erhöhet würden,

so vergleiche man sie mit dem Mondkörper. Verhielten sich ihre Gewichte zu denen der äusseren Theile des Mondes, wie die Mengen der Materie; ständen sie aber zu den Gewichten seiner inneren Theile in einem grösseren oder kleineren Verhältniss: so würden dieselben Körper zum Gewicht des ganzen Mondes in einem grösseren oder kleineren Verhältniss stehen. Dies widerspräche aber dem, was wir so eben bewiesen haben.

Zusatz 1. Die Gewichte der Körper hängen also nicht von ihrer Gestalt oder Textur ab. Könnten sich nämlich dieselben mit ihrer Gestalt verändern, so würden sie bald grösser bald kleiner werden, je nach den verschiedenen Formen bei gleicher Materie. Dies ist durchaus gegen die Erfahrung.

Zusatz 2. Alle Körper, welche die Erde umgeben, sind gegen dieselbe schwer, und ihre Gewichte sind, wenn sie sich in gleichen Abständen von der Erde befinden, der Menge der Materie eines jeden proportional. Dies hat man durch Versuche an allen erlangten Körpern gezeigt, und nach der 3. Regel kann man dasselbe von allen Körpern im Allgemeinen behaupten. Wäre der Aether oder ein beliebiger anderer Körper ganz frei von Schwere, oder gravitirte er in einem kleineren Verhältniss als dem der Menge seiner Materie; so würde, da Körper dieser Art von anderen (nach Aristoteles, Decartes und Andern) nur durch die Gestalt ihrer Theile verschieden sind, es sich ereignen können, dass sie durch allmählige Formänderung in solche Körper übergingen, welche im Verhältniss ihrer Materie schwer sind. Auf entgegengesetzte Weise könnten sehr schwere Körper im Laufe der Zeiten ihre Schwerkraft verlieren, indem sie dieselbe Form wie jene annähmen. Die Gewichte würden also von den Formen abhängen, und könnten sich mit ihnen ändern, was dem im Zusatz 1. Bewiesenen widerspricht.

Zusatz 3. Alle Räume sind nicht gleich stark angefüllt. Wären sie es nämlich, so würde das specifische Gewicht der Flüssigkeit, welche sich in der Gegend der Luft befindet, wegen der höchsten Dichtigkeit der Materie, dem des Quecksilbers, Goldes oder irgend eines sehr dichten Körpers um nichts nachgeben. Weder Gold noch irgend ein anderer Körper könnte daher in der Luft sinken; denn die Körper sinken in den Flüssigkeiten nur, weil sie specifisch schwerer sind. Wenn aber die Menge der Materie in einem gegebenen Raume bis zu einem gewissen Punkte durch irgend eine Verdünnung vermindert werden kann; warum sollten sie dann nicht bis ins Unendliche vermindert werden können?

Zusatz 4. Wenn alle feste Theilchen aller Körper gleich dicht sind, und sie ohne Poren nicht locker werden können, so giebt es einen leeren Raum. Ich behaupte, die Theilchen sind gleich dicht, wenn ihre Kraft der Trägheit ihrer Grösse proportional ist.

Zusatz 5. Die Schwere ist von einer anderen Art, als die magnetische Kraft; diese ist nämlich nicht der Menge der angezogenen Materie proportional. Gewisse Körper werden stärker, andere schwächer,

viele aber gar nicht durch den Magneten angezogen. Die magnetische Kraft desselben Körpers kann vermehrt oder vermindert werden; sie ist bisweilen viel grösser, nach Verhältniss der Menge der Materie, als die Schwerkraft. Sie nimmt mit der Entfernung vom Magneten nicht im doppelten, sondern fast im dreifachen Verhältniss ab; so weit ich es durch ziemlich grobe Versuche habe bestimmen können.

§. 9. Lehrsatz. Die Schwere kommt allen Körpern zu, und ist der in jedem enthaltenen Menge der Materie proportional. Wir haben oben bewiesen, dass alle Planeten wechselseitig gegen einander schwer seien; dass die Schwere gegen einen von ihnen, welchen man besonders betrachtet, sich umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes von seinem Schwerpunkte verhalte und dass folglich (nach dem ersten Buche, §. 110. nebst Zusätzen) die Schwere in allen Planeten der Menge ihrer Materie proportional sei. Ferner sind alle Theile eines Planeten A gegen irgend einen andern Planeten B schwer, und es verhält sich die Schwere eines beliebigen Theiles zu der des Ganzen, wie die Materie des ersteren zu der des letzteren. Endlich ist (nach dem 3. Gesetze der Bewegung) die Wirkung der Gegenwirkung gleich. Seinerseits wird daher auch der Planet B gegen alle Theile von A schwer sein, und es wird seine Schwere gegen einen beliebigen Theil sich zu seiner Schwere gegen den ganzen Planeten verhalten, wie die Materie dieses Theiles zur Materie des ganzen. W. z. b. w.

Zusatz 1. Die Schwere gegen einen ganzen Planeten ist also aus der Schwere gegen alle seine Theile zusammengesetzt. Wir haben Beispiele hiervon an den magnetischen und elektrischen Anziehungen; denn die Anziehung gegen das Ganze ist aus den Anziehungen gegen alle einzelnen Theile zusammengesetzt. Man sieht ein, dass es sich eben so mit der Schwere verhält, indem man annimmt, dass mehrere kleine Planeten sich in einer Kugel vereinigen und einen grossen Planeten bilden; denn die Kraft des Ganzen muss aus den Kräften der zusammensetzenden Theile entspringen, Wenn jemand hiergegen den Einwurf macht, dass nach diesem Gesetze alle Körper auf Erden gegen einander gravitiren müssten und dass diese gegenseitige Schwere doch nicht bemerkbar sei; so antworte ich, dass diese wechselseitige Schwere der Körper sich zu ihrer Schwere gegen die Erde verhält, wie die Masse der ersteren zur Masse der letzteren. Die wechselseitige Schwere ist daher bei weitem nicht stark genug, um wahrgenommen werden zu können.

Zusatz 2. Die Schwere gegen jedes gleiche Theilchen eines Körpers ist dem Quadrat des Abstandes von diesen Theilchen umgekehrt proportional. Dies erhellt aus dem ersten Buche, §. 117., Zusatz 3.

§. 10. Lehrsatz. Wenn die Materie zweier Kugeln, welche gegeneinander schwer sind, überall in gleichen Abständen von ihrem Mittelpunkte homogen ist; so verhält sich das Gewicht der einen Kugel

gegen die andere umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes des einen Mittelpunktes vom anderen.

Nachdem ich gefunden hatte, dass die Schwere gegen einen ganzen Planeten aus der gegen alle seine einzelnen Theile zusammengesetzt, und dass die Kraft eines jeden Theiles dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportional sei; war ich ungewiss, ob dieses umgekehrte doppelte Verhältniss für die, aus allen partiellen Kräften zusammengesetzte, ganze Kraft genau, oder nur sehr nahe gültig sei. Man könnte nämlich glauben, dass dieses Verhältniss, welches hinreichend genau für grössere Entfernungen gilt, nahe an der Oberfläche der Planeten eine bedeutende Aenderung erleiden müsse, und zwar wegen der Ungleichheit der Abstände ihrer Theile und wegen ihrer verschiedenen Lage. Die §.§. 118. und 119. des ersten Buches und ihre Zusätze zeigten mir aber, dass dieses Verhältniss noch genau im vorliegenden Falle wahrgenommen werden muss.

Zusatz 1. Hiernach kann man die Gewichte der Körper gegen verschiedene Planeten finden, und unter einander vergleichen. Die Gewichte gleicher Körper, welche sich in kreisförmigen Bahnen um Planeten bewegen, verhalten sich nämlich (nach §. 18., Zusatz 2. des ersten Buches) direct wie die Durchmesser dieser Kreise und indirect wie die Quadrate der Umlaufszeiten. Ihre Gewichte an der Oberfläche dieser Planeten, oder in beliebigen Abständen von ihren Mittelpunkten sind nach dem gegenwärtigen §. grösser oder kleiner im indirecten doppelten Verhältniss der Abstände.

Nun beträgt die Umlaufszeit der Venus um die Sonne 224 Tage $16\frac{3}{4}$ Std.,
die Umlaufszeit des 4. Jupitertrabanten um seinen
Planeten . . . . 16 „ $16\frac{8}{15}$ „
„ „ „ 6. Saturntrabanten (des Huygensschen) um den Saturn . . . 15 „ $22\frac{2}{3}$ „
„ „ „ Mondes um die Erde 27 Tage 7 Stunden 43 Min.

Indem ich nun diese Umlaufszeiten und die mittlere Entfernung der Venus von der Sonne, die grösste heliocentrische Elongation des 4. Jupitertrabanten vom Jupiter = 8′ 16″, die des Huygens'schen Trabanten vom Centrum des Saturns = 3′ 4″ und die des Mondes vom Mittelpunkte der Erde = 10′ 33″ in Anwendung brachte; fand ich, dass in gleichen Abständen die Gewichte gleicher Körper gegen die Mittelpunkte der Sonne, des Jupiters, des Saturns und der Erde respective proportional waren, den Zahlen 1, $\frac{1}{1067}$, $\frac{1}{3021}$, $\frac{1}{169282}$.[205])

In ungleichen Abständen ändern sich diese Gewichte im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Abstände. z. B. Die Gewichte gleicher Körper auf der Sonne, dem Jupiter, dem Saturn und der Erde
in den Abständen 10000 997 791 109
von ihren Mittelpunkten, d. h. an ihren Oberflächen, sind respective proportional den Zahlen 10000 943 529 435[206]).

In der Folge werden wir sehen, wie schwer Körper an der Oberfläche des Mondes sind.

Zusatz 2. Man kennt nun auch die Menge der Materie, welche jeder dieser Himmelskörper enthält. Diese Mengen verhalten sich nämlich, wie die anziehenden Kräfte in gleichen Abständen von ihren Mittelpunkten, d. h. die Massen der Sonne, des Jupiters, des Saturns und der Erde sind respective proportional den Zahlen: 1, $^1/_{1067}$, $^1/_{3021}$, $^1/_{169282}$. Findet man die Parallaxe der Sonne grösser oder kleiner als 10'' 30''' = 10,''5, so muss man die Menge der Materie, welche die Erde enthält, im dreifachen Verhältniss vermehren oder vermindern.[207])

Zusatz 3. Man kann auch die Dichtigkeiten der Planeten bestimmen. Da die Gewichte gleicher und gleichartiger Körper gegen gleichartige Kugeln, nach §. 114. des ersten Buches, den Durchmessern der letzteren proportional sind; so werden die Dichtigkeiten ungleichartiger Kugeln sich verhalten, wie diese Gewichte, dividirt durch ihre Durchmesser. Nun hat man gefunden, dass die wahren Durchmesser von Sonne, Jupiter, Saturn und Erde respective

proportional sind:	10000, 997, 791, 109
die Gewichte gegen dieselben respective proportional sind	10000, 943, 529, 435
mithin sind ihre Dichtigkeiten proportional . .	100; 94,6; 66,9; 399.

Die Dichtigkeit der Erde, welche durch diese Rechnung bestimmt wird, hängt nicht von der Parallaxe der Sonne ab; sie ist durch die Parallaxe des Mondes bestimmt worden, und daher genau Die Sonne ist daher etwas dichter als der Jupiter, Jupiter dichter als Saturn und die Erde viermal so dicht als die Sonne; dies muss man der Wärme der letzteren zuschreiben, welche die Materie auflockert. Der Mond ist dichter als die Erde, wie wir in der Folge sehen werden.

Zusatz 4. Die Planeten sind also desto dichter, je kleiner sie unter übrigens gleichen Umständen sind; also nähert sich die Kraft der Schwere an ihrer Oberfläche mehr der Gleichheit. Die der Sonne näheren Planeten sind, unter übrigens gleichen Umständen, dichter; also die Erde dichter als der Jupiter, dieser dichter als der Saturn. Sie mussten in verschiedene Entfernungen von der Sonne gestellt werden, damit jeder Planet, nach Verhältniss seiner Dichtigkeit, mehr oder weniger durch die Sonne erwärmt würde. Befände sich unsere Erde in der Saturnsbahn, so würde unser Wasser beständig gefroren sein; läge sie hingegen in der Merkursbahn, so würde das Wasser augenblicklich verdampfen. Das Licht der Sonne, welchem die Wärme proportional ist, ist nämlich auf dem Merkur siebenmal (6,674) dichter, als auf der Erde und ich habe mittelst des Thermometers gefunden, dass, wenn die Wärme der Sonne siebenmal stärker wäre, als sie in unserem Sommer ist, sie das Wasser augenblicklich zum Sieden bringen würde.

Es ist nicht zu bezweifeln, dass die Materie des Merkurs der Wärme entspreche, welche sie empfängt, und dass sie folglich dichter

sei, als die Materie der Erde. Je dichter nämlich die Materie ist, desto mehr Wärme ist erforderlich, damit erstere dieselben Wirkungen erleide.[208])

§. 11. Lehrsatz. Die Schwere nimmt im Innern der Planeten sehr nahe im Verhältniss des Abstandes vom Mittelpunkte ab.

Wäre die Materie des Planeten von gleicher Dichtigkeit, so würde dieser Satz, nach §. 115. des ersten Buches, genau wahr sein. Der Fehler ist daher so gross, als er aus der ungleichförmigen Dichtigkeit entspringen kann.

§. 12. Lehrsatz. Die Bewegung der Planeten im Himmelsraume kann sehr lange fortdauern.

In §. 61. des zweiten Buches haben wir gezeigt, dass eine gefrorene Wasserkugel, welche sich frei in unserer Luft bewegte, durch den Widerstand der letzteren $^1/_{4586}$ ihrer Bewegung verlieren würde, während sie die Länge ihres Halbmessers zurücklegt. Dasselbe Verhältniss muss ungefähr bei viel grösseren Kugeln stattfinden, welche sich zugleich mit weit grösserer Geschwindigkeit als der dort ausgeführten, bewegen.

Die Erdkugel ist aber weit dichter, als wenn sie ganz aus Wasser bestände; dies zeige ich folgendermaassen. Bestände sie ganz aus Wasser, so würde es Körper geben, welche weniger dicht wären, und wegen ihres geringeren specifischen Gewichtes von selbst an die Oberfläche kommen und oben schwimmen müssten. Aus demselben Grunde würde eine ganz von Wasser umgebene Erdkugel an einer Stelle oben schwimmen, wenn sie lockerer als Wasser wäre, und jenes Wasser sich gänzlich an der entgegengesetzten Seite ansammeln. Eine gleiche Schlussfolgerung gilt für unsere Erde, welche grösstentheils vom Meere umgeben ist. Wäre sie nicht dichter als dasselbe, so würde sie oben schwimmen und nach Verhältniss der specifischen Leichtigkeit zum Theil aus dem Wasser heraustreten, welches sich gänzlich in den entgegengesetzten Gegenden ansammeln würde. Durch ein ähnliches Raisonnement kann man den Schluss ziehen, dass die Sonnenflecken leichter seien, als die leuchtende Materie der Sonne, auf welcher sie schwimmen.[209]). Ferner muss bei jeder beliebigen Bildung eines Planeten, welchen man ursprünglich als flüssig annimmt, die schwerere Materie in der Mitte gelegen haben.

Da nun die Erde gewöhnlich zweimal so schwer als Wasser, und wenn man etwas weiter gräbt, 3, 4 und selbst 5 mal so schwer als letzteres gefunden wird; so hat die Erdkugel wahrscheinlich 5 oder 6 mal mehr Materie, als wenn sie nur aus Wasser zusammengesetzt wäre, besonders nachdem wir gezeigt haben, dass sie ungefähr 4 mal so dicht als der Jupiter ist (§. 10., Zusatz 3.). Ist also die Materie des letzteren etwas dichter als Wasser, so ist es klar, dass er in einem Zeitraum von 30 Tagen, in welchem er 459 seiner Halbmesser zurücklegt, etwa $^1/_{10}$ seiner Bewegung in einem Mittel verlieren würde, welches dieselbe Dichtigkeit wie unsere Luft hätte.[210]) Nun nimmt der Widerstand der Mittel mit ihrem Gewichte und ihrer Dichtigkeit ab. Wasser z. B.,

welches $13^5/_8$ mal leichter als Quecksilber ist, leistet einen $13^5/_8$ mal geringeren Widerstand, als die letztere Flüssigkeit, und die Luft, welche 860 mal leichter als Wasser ist, leistet einen 860 mal geringeren Widerstand als dieses. In der Himmelsgegend, wo das Gewicht des Mittels, in welchem die Planeten sich bewegen, in's Unendliche abnimmt, muss der Widerstand fast = 0 sein.

In §. 31. des zweiten Buches haben wir gesehen, dass in einer Höhe von 200 Meilen über der Oberfläche der Erde, die Dichtigkeit der daselbst befindlichen Luft sich zur Dichtigkeit der uns umgebenden Luft verhält, wie 0,0000000000003998 : 30 = 1 : 75 Billionen.

Der Jupiter würde also, wenn er sich in einem Mittel von dieser Dichtigkeit bewegte, nicht ein $^1/_{1000000}$ seiner Bewegung in 1000000 Jahren verlieren.[211]) Wir kennen nur die Luft, die Ausdünstungen und die Dämpfe, welche in der Nähe der Erdoberfläche Widerstand ausüben. Hat man sie nämlich aus einem Glascylinder sorgfältig fortgeschafft, so fallen die Körper darin frei, ohne irgend einen bemerkbaren Widerstand zu erleiden; dergestalt, dass selbst Gold und eine sehr dünne Feder, welche zugleich losgelassen werden, mit gleicher Geschwindigkeit fallen und zu derselben Zeit am Boden anlangen, nachdem sie eine Höhe von 4, 6, oder 8 Fuss zurückgelegt haben, wie man durch Versuch gefunden hat. Es ist also klar, dass die Planeten und Cometen sich sehr lange werden bewegen können, ohne in den von Luft und Ausdünstungen freien Himmelsräumen einen bemerkbaren Widerstand zu erleiden.

§. 13. I. Hypothese. Der Mittelpunkt des Weltsystems befindet sich in Ruhe.

Man gibt dies allgemein zu, nur behaupten die Einen, die Erde sei dieses Centrum, die Anderen hingegen, die Sonne sei es. Wir wollen sehen, was aus dieser Hypothese folgt.

§. 14 Lehrsatz. Der gemeinschaftliche Schwerpunkt der Sonne und aller Planeten befindet sich in Ruhe.

Dieser Schwerpunkt wird nämlich (nach Zusatz 4. der Gesetze) entweder ruhen oder sich gleichförmig in gerader Linie bewegen. Ginge er stets vorwärts, so würde der Mittelpunkt des Weltsystems sich nicht in Ruhe befinden; dies widerspricht der Hypothese.

§. 15. Lehrsatz. Die Sonne ist immer in Bewegung, sie entfernt sich aber nur sehr wenig von dem gemeinschaftlichen Schwerpunkt aller Planeten.

Nach §. 10., Zusatz 2. verhält sich nämlich die Masse der Sonne zu derjenigen des Jupiters, wie 1067 : 1; ferner steht die Entfernung des Jupiters von der Sonne zum Halbmesser der letzteren in einem etwas grösseren Verhältniss.[212]) Mithin wird der gemeinschaftliche Schwerpunkt beider Himmelskörper in einen Punkt fallen, welcher ein wenig über der Oberfläche der Sonne liegt. Nach demselben Raisonnement verhält sich die Masse der Sonne zu derjenigen des Saturns, wie 3021 : 1; die Entfernung der letzteren von der ersteren steht zum Halbmesser der

Sonne in einem etwas kleineren Verhältniss; der gemeinschaftliche Schwerpunkt beider fällt daher etwas unterhalb der Oberfläche der Sonne. Führt man nun dieselbe Rechnung für die anderen Planeten weiter, so findet man, dass, wenn die Erde und alle Planeten sich auf derselben Seite der Sonne befänden, der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller dieser Gestirne sich kaum um einen Durchmesser der Sonne vom Mittelpunkt der letzteren entfernen würde. Da nun in allen anderen Fällen der Abstand zwischen diesem Centrum und dem gemeinschaftlichen Schwerpunkte noch kleiner ist, und der letztere sich immer in Ruhe befindet; so bewegt sich die Sonne je nach der verschiedenen Lage der Planeten, wird sich aber nie weit von jenem Schwerpunkt entfernen.

Zusatz. Der gemeinschaftliche Schwerpunkt der Sonne, der Erde und aller Planeten muss also als der Mittelpunkt der Welt[213]) angesehen werden. Diese Körper ziehen sich nämlich wechselseitig an und befinden sich, nach den Gesetzen der Bewegung, vermöge ihrer Schwerkraft stets in Bewegung. Ihre beweglichen Mittelpunkte können also nicht als ruhendes Centrum der Welt angenommen werden. Sollte derjenige Körper, gegen welchen die Schwere alle anderen Körper stärker antreibt, in dieses Centrum gesetzt werden (wie dies die gewöhnliche Meinung ist); so würde dieses Vorrecht der Sonne zukommen. Diese aber bewegt sich, und man muss daher zum gemeinschaftlichen Centrum einen unbeweglichen Punkt wählen, von welchem der Mittelpunkt der Sonne sich möglichst wenig entfernt und noch weniger entfernen würde, wenn die Sonne selbst grösser und dichter wäre. Im letzteren Falle würde sie sich nämlich weniger stark bewegen.

§. 16. Lehrsatz. Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, deren einer Brennpunkt sich im Mittelpunkte der Sonne befindet, und die um denselben beschriebenen Flächenräume sind den Zeiten proportional.

Wir haben oben diese Bewegungen nach den Erscheinungen discutirt. Sind die Principien der ersteren einmal bekannt, so schliessen wir aus ihnen a priori auf die Bewegungen der Himmelskörper. Hat man also gefunden, dass die Gewichte der Planeten gegen die Sonne den Quadraten ihrer Abstände von derselben umgekehrt proportional sind; so leuchtet nach §§. 13., 29. und 32., Zusatz 1. des ersten Buches ein, dass, wenn die Sonne sich in Ruhe befände und die Planeten nicht wechselseitig auf einander wirkten, alle ihre Bahnen Ellipsen sein würden, deren gemeinschaftlicher Brennpunkt in der Sonne läge, und dass sie um denselben Flächenräume beschreiben würden, welche den Zeiten proportional wären. Nun sind aber die wechselseitigen Wirkungen der Planeten auf einander so schwach, dass sie vernachlässigt werden können, und nach §. 107. des ersten Buches wirken sie weniger störend auf die Beschreibung ihrer Ellipsen um die Sonne ein, wenn man diese als beweglich annimmt, als wenn man sie als unbeweglich voraussetzte.

Indessen darf man die Einwirkung des Jupiters auf den Saturn nicht ganz vernachlässigen. Die Schwere gegen den Jupiter verhält

sich zu der gegen die Sonne (in gleichen Abständen) wie 1 : 1067. In der Conjunction von Jupiter und Saturn wird also, da die Entfernung beider von einander sich zum Abstand des Saturns von der Sonne ungefähr wie 4 : 9 verhält; die Schwere des Saturns gegen den Jupiter sich zu seiner Schwere gegen die Sonne verhalten, wie 81 : 16 . 1067, d. h. ungefähr wie 1 : 211.[214])

Hiernach wird die Bahn des Saturns bei jeder Conjunction mit dem Jupiter so merklich gestört werden, dass es die Astronomen bemerken mussten. Seine Excentricität wird bald vergrössert, bald verkleinert, nach den verschiedenen Lagen des Planeten in diesen Conjunctionen. Sein Aphel geht bald vor-, bald rückwärts und seine mittlere Bewegung wird wechselweise beschleunigt und verzögert. Indessen kann man die ganze Störung, welche die Anziehung des Jupiters in der Bewegung des Saturns um die Sonne hervorbringt, mit Ausnahme der Störung in der mittleren Bewegung, fast ganz fortschaffen; wenn man den unteren Brennpunkt seiner Bahn (nach §. 108. des ersten Buches) im gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Sonne und des Jupiters annimmt. Alsdann wird diese Störung, wenn sie am grössten ist, kaum 2 Minuten übersteigen. Eben so überschreitet die grösste Störung in der jährlichen mittleren Bewegung kaum 2 Minuten.

In der Conjunction des Jupiters und des Saturns verhalten sich die beschleunigenden Schwerkräfte der Sonne gegen den Saturn, des Jupiters gegen den Saturn und des Jupiters gegen die Sonne, wie etwa

$$16 : 81 : \frac{16 \,.\, 81 \,.\, 3021}{25} = 16 : 81 : 156609.$$ [215])

Der Unterschied der Schwerkräfte von Sonne und Jupiter gegen Saturn verhält sich also zur Schwerkraft des Jupiters gegen die Sonne, wie 65 : 156609 = 1 : 2409.

Die grösste Kraft des Saturns zur Störung der Bewegung des Jupiters ist diesem Unterschiede proportional, also die Störung der Jupitersbahn weit geringer, als die der Saturnsbahn.

Die Störungen der übrigen Planetenbahnen sind noch weit geringer, mit Ausnahme der Erdbahn, auf welche der Mond merklich störend einwirkt. Der gemeinschaftliche Schwerpunkt der Erde und des Mondes beschreibt um die Sonne eine Ellipse, in deren Brennpunkt sich die letztere befindet und deren, um diesen Punkt beschriebene Flächenräume den Zeiten proportional sind. Die Erde bewegt sich um diesen gemeinschaftlichen Schwerpunkt ungefähr in 1 Monat.

§. 17. **Lehrsatz.** Das Aphel und die Knoten der Bahnen befinden sich in Ruhe.

Das Aphel befindet sich in Ruhe nach §. 29. des ersten Buches, und nach §. 13. desselben Buches sind auch die Ebenen, mithin ihre Knoten unbeweglich. Man muss indessen gestehen, dass die Wirkungen der Planeten und Cometen auf einander einige Ungleichheiten hervor-

bringen können; dieselben sind aber so gering, dass man sie hier vernachlässigen kann.

Zusatz 1. Die Fixsterne befinden sich auch in Ruhe, denn sie behalten dieselbe Lage in Bezug auf die Aphele und Knoten bei.[216])

Zusatz 2. Da nun die jährliche Bewegung der Erde keine bemerkbare Parallaxe bei ihnen hervorbringt, so verursachen ihre anziehenden Kräfte keine merklichen Wirkungen in der Gegend unseres Sonnensystems, weil die gegenseitige Entfernung ungeheuer gross ist. Vielleicht heben auch die Fixsterne, welche in allen Gegenden des Himmels gleichmässig zerstreut sind, ihre wechselseitigen Wirkungen durch entgegengesetzte Anziehungen auf, nach §. 22. des ersten Buches.[217])

§. 18. Anmerkung. Da die gegenseitige Einwirkung derjenigen Planeten, welche der Sonne am nächsten sind, wie Merkur, Venus, Erde und Mars, wegen der Kleinheit der letzteren, fast unmerklich ist; so werden ihre Knoten und Aphele sich in Ruhe befinden, bis auf die Störung, welche die Einwirkung des Jupiters, des Saturns und anderer oberhalb derselben befindlicher Körper herbeiführen kann. Hieraus kann man nach der Theorie der Schwere schliessen, dass ihre Aphele sich ein wenig rückläufig in Bezug auf die Fixsterne bewegen, und zwar im $^3/_2$ten Verhältniss der Abstände dieser Planeten von der Sonne. Wenn also das Aphel des Mars sich in 100 Jahren um 33' 20" rückläufig in Bezug auf die Fixsterne bewegt, so werden die Aphele der Erde, der Venus und des Merkurs respective in derselben Zeit 17' 40", 10' 53" und 4' 16" zurücklegen.[218]) Man berücksichtigt aber im vorhergehenden Paragraphen diese fast unmerklichen Bewegungen nicht.

§. 19. Aufgabe. Man soll die Hauptdurchmesser der Bahnen finden.

Man nehme sie, nach §. 35. des ersten Buches, im $^3/_2$ten Verhältniss ihrer Umlaufszeiten. Hierauf vergrössere man, nach §. 101. desselben Buches, den Durchmesser einer jeden Bahn in dem Verhältniss, in welchem die Cubikwurzel aus der Summe der Massen des Planeten und der Sonne zur Cubikwurzel aus der Sonnenmasse steht.

§. 20. Aufgabe. Man soll die Excentricität und das Aphel der Bahnen finden.

Die Auflösung ergibt sich aus §. 39. des ersten Buches.

§. 21. Lehrsatz. Die tägliche Bewegung der Planeten ist gleichförmig, und die Libration des Mondes entspringt aus seiner täglichen Bewegung.

Dies erhellt aus dem ersten Gesetze der Bewegung und aus §. 107., Zusatz 22. des ersten Buches.

Der Jupiter vollendet seine tägliche Umdrehung in Bezug auf die Fixsterne nach 9^h 56^m, der Mars nach 24^h 39^m, die Venus nach etwa 23^h, die Erde nach 23^h 56^m, die Sonne nach $25^1/_2$ Tagen und der Mond nach 27 Tagen 7^h 43^m.[219]) Dies ergeben die Erscheinungen. Da

die Flecke auf der Sonnenscheibe nach $27^1/_2$ Tagen in dieselbe Lage, in Bezug auf die Erde zurückkommen; so muss die Sonne sich in Bezug auf die Fixsterne ungefähr in $25^1/_2$ Tagen umdrehen.[220]) Da der Tag des sich gleichförmig um seine Axe drehenden Mondes einen Monat beträgt, so wird immer sehr nahe dieselbe Seite desselben dem entfernten Brennpunkte zugewendet sein und, je nach der Lage dieses Brennpunktes auf der einen oder andern Seite von der Erde abgewendet sein. Dies ist die Libration des Mondes in der Länge. Was seine Libration in der Breite betrifft, so entspringt dieselbe aus seiner Breite und der Neigung seiner Axe gegen die Ekliptik. Mercator hat diese Theorie der Libration, nach meinen Briefen an denselben, in seiner 1676 erschienenen Astronomie weitläufig ausgeführt.

Der am weitesten entfernte Trabant des Saturns (der 6.) scheint sich mit einer ähnlichen Bewegung um seine Axe zu drehen, und dem Saturn immer dieselbe Seite zuzuwenden. So oft er sich nämlich dem östlichen Theile der Bahn dieses Planeten nähert, sieht man ihn kaum und bisweilen verschwindet er gänzlich. Dies kann daher rühren, dass er der Erde alsdann einen Theil seiner Oberfläche zuwendet, auf welchem sich Flecken befinden. Dies hat Cassini bemerkt.

Der entfernteste Trabant des Jupiters scheint ebenfalls sich auf dieselbe Weise um seine Axe zu drehen. Er hat nämlich in dem, dem Jupiter entgegengesetzten Theile seiner Oberfläche einen Flecken, welchen man jedesmal, wenn der Trabant zwischen dem Jupiter und unserm Auge vorübergeht, so sieht, als ob er sich auf der Scheibe des Jupiters selbst befände.

§. 22. Lehrsatz. Die Axen der Planeten sind kleiner, als die Durchmesser ihrer Aequatoren.

Hätten die Planeten keine tägliche Rotationsbewegung um ihre Axen, so müssten sie, wegen der überall gleichen Schwere ihrer Theilchen, kugelförmig sein. Die Rotationsbewegung bewirkt, dass die Theile, welche sich von der Axe zu entfernen streben, gegen den Aequator ansteigen. Wäre aber die Materie, woraus sie bestehen, flüssig, so würde ihre Erhebung gegen den Aequator den Durchmesser dieses Kreises vergrössern, und ihr Sinken an den Polen die Axe verkleinern. Nun lehren uns die astronomischen Beobachtungen, dass auf dem Jupiter der von einem Pole zum andern gehende Durchmesser kleiner ist, als der von Osten gegen Westen gerichtete. Durch ähnliche Raisonnements werden wir sehen, dass, wenn unsere Erde nicht am Aequator etwas höher als an den Polen wäre, die Meere an den letzteren sich senken, am ersteren sich erheben und so diese Länder überschwemmen würden.

§. 23. Lehrsatz. Man soll das Verhältniss der Axen eines Planeten finden.

Norwood unser Landsmann maass um das Jahr 1635 eine Länge von 905751 engl. Fuss zwischen London und York, und indem er den Breitenunterschied beider Oerter durch Beobachtungen zu 2° 28′ be-

stimmte, fand er, dass der Grad 367196 engl. Fuss, d. h. 57300 Toisen[221]) betrug.

Picard maass einen Bogen von $1^0\ 22'\ 55''$ auf dem Meridian zwischen Amiens und Malvoisin, und fand daraus den Grad = 57060 Toisen.

Cassini der Vater maass die Entfernung im Meridian zwischen der Stadt Collioure in Roussillon und der Sternwarte von Paris; sein Sohn fügte den Abstand zwischen dem letzteren Punkte und dem Thurme von Dünkirchen hinzu. Die ganze Entfernung betrug $486156\frac{1}{2}$ Toisen, der Breitenunterschied zwischen Collioure und Dünkirchen $8^0\ 31'\ 12\frac{5}{6}''$ und hiernach der Bogen eines Grades = 57061 Toisen.

Aus dem mittleren Werthe von 57060 Toisen erhält man die Peripherie der Erde = 123249600 Pariser Fuss
und ihren Halbmesser = 19615800 „ „
vorausgesetzt, dass die Erde kugelförmig sei.[222])

Wir haben oben (§. 4.) dritten Buches, gesehen, dass in der Breite von Paris schwere Körper beim freien Falle in 1 Secunde 15 Fuss 1 Zoll $1\frac{7}{9}$ Linien = $2173\frac{7}{9}$ Linien zurücklegen. Das Gewicht der Körper wird aber durch das Gewicht der sie umgebenden Luft vermindert. Setzt man diese Verminderung = $\frac{1}{10000}$ des ganzen Gewichts, so würde der Körper beim Fall im leeren Raume während einer Secunde 2174 Linien zurücklegen. Ein Körper, welcher sich in einem Kreise bewegte, dessen Halbmesser = 19615800 Par. Fuss ist, und welcher seinen Umlauf gleichförmig in $23^h\ 56^m\ 4^s$ Sternzeit zurücklegte, würde in 1 Secunde einen Bogen von 1433,46 Fuss beschreiben. Der Sinusversus dieses Bogens ist = 0,0523656 Fuss = 7,54064 Linien.[223])

Die Kraft, mit welcher schwere Körper in der Breite von Paris herabsteigen, verhält sich zur Centrifugalkraft unter dem Aequator, welche durch die tägliche Bewegung der Erde hervorgebracht wird, wie 2174 : 7,54064.

Die Centrifugalkraft der Körper unter dem Aequator verhält sich zu derjenigen Centrifugalkraft, durch welche die Körper das Bestreben erhalten, sich in der Breite von Paris, d. h. $48^0\ 50'\ 10''$ perpendikulär von der Erde zu entfernen, wie das Quadrat des Radius zum Quadrat des Cosinus dieser Breite, d. h. wie 7,54064 : 3,267.

Addirt man diese Kraft zu derjenigen, welche den Fall der schweren Körper in der Breite von Paris bewirkt; so wird ihr durchfallener Raum, welcher in dieser Breite durch die ganze Kraft der Schwere hervorgebracht wird, in 1 Secunde 2777,267 Linien = 15 Fuss 1 Zoll 5,267 Linien betragen. Ferner wird die ganze Kraft der Schwere in dieser Breite sich zur Centrifugalkraft unter dem Aequator verhalten wie 2177,267 : 7,54064 = 289 : 1.

Es stelle nun APBQ die Figur der Erde vor, welche nicht mehr sphärisch, sondern durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe PQ entstanden gedacht wird und es sei ACQqca ein Kanal, welcher

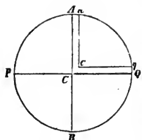


Fig. 188.

vom Pol Qq bis zum Centrum Cc und von diesem bis zum Aequator Aa mit Wasser angefüllt ist. Alsdann muss das Gewicht des Wassers im Zweige ACca sich zu dem Gewicht des im Zweige QCcq vorhandenen Wassers verhalten, wie 289 : 288, und zwar dessbalb, weil die aus der Kreisbewegung entspringende Centrifugalkraft einen Theil von 289 trägt und aufhebt, und daher die 288 Theile Wassers im Schenkel ACca die 289 Theile im anderen Schenkel tragen.

Nach der Methode (von §. 137., Zusatz 2. des ersten Buches) finde ich, dass, wenn die Erde aus einer homogenen Materie zusammengesetzt, wenn sie von aller Bewegung frei wäre und wenn ihre Axe PQ sich zum Durchmesser AB wie 100 : 101 verhielte; alsdann die Schwere im Orte Q sich zur Schwere in demselben Orte, aber auf einer Kugel zum Mittelpunkt C und Radius CP oder CQ verhalten würde, wie 126 : 125.[224])

Durch dasselbe Raisonnement findet man, dass die Schwere im Orte A eines durch Umdrehung der Ellipse APBQ um die Axe AB beschriebenen Elipsoïds sich zur Schwere in demselben Orte A auf einer, um C als Mittelpunkt und mit CA als Radius beschriebenen Kugel verhalte, wie 125 : 126.[225])

Ferner ist die Schwere im Orte A auf der Erde die mittlere Proportionale zwischen der Schwerkraft auf diesem Sphäroïd und der auf dieser Kugel stattfindenden. Die letztere würde nämlich, wenn man ihren Durchmesser im Verhältniss 101 : 100 verminderte, in die Figur der Erde übergehen, und eben so würde diese Figur, durch in gleichem Verhältniss ausgeführte Verminderung des auf beide Durchmesser AB und PQ perpendiculären Durchmessers in das benannte Sphäroïd übergehen. In dem einen und andern Falle würde die Schwere in A sehr nahe in demselben Verhältniss kleiner werden.[226])

Es verhält sich daher die Schwere in A auf der, zum Radius CA und Mittelpunkt C gehörigen Kugel, zur Schwere in demselben Punkte auf der Erde, wie 126 : 125,5, und die Schwere in Q auf der zum Radius CQ gehörigen Kugel, zur Schwere im Punkt A auf der zum Radius CA gehörigen Kugel, wie ihre Durchmesser (nach §. 114. des ersten Buches), d. h. wie 100 : 101.

Verbindet man die drei Verhältnisse

126 : 125
126 : 125,5
100 : 101

mit einander, so erhält man das Verhältniss der Schwere auf der Erde

im Orte Q, zur Schwere auf derselben im Orte A = 501 : 500.[227])

Nach §. 137., Zusatz 3. des ersten Buches ist nun aber die Schwere in jedem der beiden Schenkel ACca und QCcq des Kanals, dem Abstande des jedesmaligen Ortes vom Centrum der Erde proportional. Werden daher diese Schenkel durch transversale und gleich weit von einander abstehende Oberflächen in Stücke, welche den ganzen proportional sind, getheilt; so werden die Gewichte einer beliebigen Anzahl von Stücken eines dieser Schenkel, zu den Gewichten von eben so viel Stücken des anderen Schenkels in einem Verhältniss stehen, welches aus der Menge der Materie und der beschleunigenden Kraft zusammengesetzt ist, d. h. in dem Verhältniss 101.500 : 100.501 = 505 : 501.

Wenn daher die Centrifugalkraft eines beliebigen Stückes vom Schenkel ACca, welche aus der täglichen Bewegung entspringt, sich zum Gewichte desselben Stückes verhielte, wie 4 : 505; dergestalt, dass von dem Gewichte dieses in 505 Theile zerlegten Stückes die Centrifugalkraft deren 4 fortnähme: so würden die Gewichte in beiden Schenkeln gleich und daher die Flüssigkeit im Gleichgewicht bleiben.

Allein die Centrifugalkraft eines beliebigen Stückes verhält sich zu dessen Gewicht, wie 1 : 289, d. h. die Centrifugalkraft, welche $^4/_{505}$ des Gewichtes betragen sollte, beträgt nur $^1/_{289}$. Man kann daher durch eine einfache Proportion finden, dass, wenn vermöge der Centrifugalkraft $= ^4/_{505}$ die Höhe des Wassers im Schenkel ACca die Höhe des im Schenkel QCcq befindlichen Wassers um $^1/_{100}$ der ganzen Höhe übertrifft, alsdann die Centrifugalkraft $= ^1/_{289}$ nur einen analogen Unterschied von $^1/_{229}$ der ganzen Höhe hervorbringen wird. Der Durchmesser der Erde, welcher durch ihre Pole geht, wird sich daher zum Durchmesser des Aequators verhalten, wie 229 : 230.

Nach **Picard's** Messung ist nun der mittlere Halbmesser der Erde = 19615800 Par. Fuss = 3923,16 Meilen (die Meile = 5000 Fuss vorausgesetzt); daher wird die Erde am Aequator höher sein, als am Pole um 85472 Fuss = $17^1/_{10}$ Meilen

und die Höhe am Aequator selbst ungefähr = 19658600 Fuss
an den Polen „ „ = 19573000 „

Ist ein Planet kleiner oder grösser als die Erde, seine Dichtigkeit aber und die Dauer der täglichen Umdrehung dieselbe; so wird auch das Verhältniss der Centrifugalkraft zur Schwere dasselbe bleiben und daher auch das Verhältniss der Axe zum Durchmesser des Aequators dasselbe sein.

Wenn die tägliche Bewegung in einem beliebigen Verhältniss beschleunigt oder verzögert wird, so nimmt die Centrifugalkraft im doppelten Verhältniss zu oder ab, und folglich nimmt auch der Unterschied der Durchmesser nahe in demselben doppelten Verhältniss zu oder ab. Nimmt die Dichtigkeit des Planeten in irgend einem Verhältniss zu oder ab, so wird die gegen ihn gerichtete Schwere in demselben Verhältniss

26*

grösser oder kleiner. Der Unterschied der Durchmesser wird aber im Gegentheil in dem Verhältniss, wie die Schwere wächst kleiner werden und grösser in dem Verhältniss, wie jene abnimmt. Nun dreht sich, in Bezug auf die Fixsterne, die Erde in $23^h\ 56^m$ } um die Axe;
der Jupiter in 9 56 }
also verhalten sich die Quadrate dieser Zeiten, wie 29 : 5 ferner ihre Dichtigkeiten wie 400 : 94,5 (§. 10., Zusatz 3.).

Hiernach wird der Unterschied der Durchmesser des Jupiters sich zum kleinen Durchmesser verhalten, wie

$\frac{29}{5} \cdot \frac{400}{94,5} \cdot \frac{1}{229} : 1$, d. h. nahe wie $1 : 9\frac{1}{3}$.

Der Durchmesser des Jupiters von Ost nach West verhält sich also zum Durchmesser zwischen den Polen sehr nahe, wie $10\frac{1}{3} : 9\frac{1}{3}$.

Da nun der grösste scheinbare Durchmesser = 37'' ist, so ist der kleinste = 33''. 25''', und addirt man zu jedem 3'' wegen des falschen Lichtes (lux erratica); so werden die scheinbaren Durchmesser dieses Planeten 40'' und 36'' 25''' sein, d. h. sich nahezu verhalten wie $11\frac{1}{6} : 10\frac{1}{6}$.

Dieses Verhältniss soll aber nur unter der Voraussetzung gelten, dass alle Materie des Jupiters gleich dicht sei. Wäre sie nämlich in der Nähe des Aequators dichter, als gegen die Pole zu, so würden ihre Durchmesser sich verhalten können, wie 12 : 11, oder 13 : 12, oder selbst wie 14 : 13.

Cassini beobachtete im Jahre 1691, dass der Durchmesser des Jupiters von Osten gegen Westen den Durchmesser zwischen den Polen um $\frac{1}{15}$ übertraf. Unser Landsmann Pound maass mit einem Fernrohre von 123 Fuss Länge und einem vortrefflichen Mikrometer die Durchmesser des Jupiters im Jahre 1719 und fand sie wie die folgende Tabelle angibt:

Zeit.	Grosser Durchmesser.	Kleiner Durchmesser.	Verhältniss beider.
Januar 28 6^h	13,40 Theile	12,28 Theile	12 : 11
März 6 7	13,12 „	12,20 „	$13\frac{3}{4} : 12\frac{3}{4}$
„ 9 7	13,12 „	12,08 „	$12\frac{2}{3} : 11\frac{2}{3}$
April 9 9	12,32 „	11,48 „	$14\frac{1}{2} : 13\frac{1}{2}$ [225]

Diese Theorie stimmt mit den Erscheinungen überein. Die Planeten werden nämlich in der Nähe ihres Aequators sich stärker am Sonnenlicht erwärmen und mehr ausgedörrt werden, als an den Polen.

Dass die Schwere unter dem Aequator, durch die tägliche Bewegung unserer Erde geringer werde und letztere daher mehr am Aequator als an den Polen gehoben werden müsse (wenn die Materie gleichförmig dicht ist), wird sich klarer durch die Pendelversuche zeigen, welche ich im folgenden Paragraphen besprechen will.

§. 24. Aufgabe. Man soll die Gewichte der Körper in verschiedenen Gegenden der Erde bestimmen und mit einander vergleichen.

Die Gewichte des, in den ungleichen Schenkeln (Figur 188.) des Kanals ACQqca eingeschlossenen, Wassers sind gleich, und die Gewichte ihrer Theile, welche den Schenkeln proportional und auf dieselbe Weise in ihrem Ganzen gelegen sind, verhalten sich zu einander, wie ihre ganzen Gewichte und sind daher einander gleich. Daher werden solche Gewichte, welche gleich und in diesen Schenkeln gleich gelegen sind, sich umgekehrt wie diese Schenkel, d. h. wie 230 : 229 verhalten. Dieselbe Bewandtniss hat es mit allen beliebigen gleichartigen und gleichen Körpern, welche in den Schenkeln dieses Kanals ähnlich gelegen sind; ihre Gewichte werden sich umgekehrt wie diese Schenkel verhalten, d. h. umgekehrt wie die Entfernungen dieser Körper vom Mittelpunkte der Erde. Ferner werden die Gewichte der, an den oberen Enden dieser Kanäle oder an der Oberfläche der Erde gelegenen, Körper sich untereinander umgekehrt wie ihre Entfernung vom Mittelpunkte verhalten.

Aus demselben Grunde sind die Gewichte, in jeder anderen beliebigen Gegend auf der Oberfläche der Erde, den Entfernungen ihrer Orte vom Mittelpunkte der Erde umgekehrt proportional; folglich wird unter der Voraussetzung, dass die Erde ein Sphäroïd sei, ihr Verhältniss gegeben sein. Hieraus leitet man folgenden Satz ab: Beim Fortgange vom Aequator nach den Polen zu wird die Gewicht-Zunahme sehr nahe dem Sinus versus der doppelten Breite oder, was dasselbe ist, dem Quadrat des Sinus der Breite proportional.[229]) Die Bogen der Breitengrade im Meridian wachsen sehr nahe in demselben Verhältniss.[230]) Nun ist die Breite von Paris $= 48^0\ 50'$, die Breite der unter dem Aequator liegenden Orte $= 0^0\ 0'$ und endlich die Breite der unter den Polen liegenden $= 90^0$. Die Sinus versus der doppelten Bogen sind folglich respective 11334, 0, 20000, für den Radius = 10000. Ferner verhält sich die Schwere an den Polen zu der unter dem Aequator stattfindenden, wie 230 : 229, also der Ueberschuss der ersteren Schwere über die letztere wie 1 : 229. Man findet daher, dass der Ueberschuss der in der Breite von Paris stattfindenden Schwere sich zu der unter dem Aequator stattfindenden Schwere verhält, wie $1 \cdot \frac{11334}{20000} : 229 =$ 5667 : 2290000. Die ganzen Schwerkräfte an diesen beiden Orten verhalten sich daher wie 2295667 : 2290000.

Da nun die Längen der Pendel, welche ihre Schwingungen in gleichen Zeiten ausführen, im directen Verhältniss der Schwerkräfte stehen; da ferner die Länge des Secundenpendels in der Breite von Paris = 3 Fuss $8^1/_2$ Linien, oder vielmehr, wegen des Gewichts der Luft = 3 Fuss $8^5/_9$ Linien ist: so wird die Länge des Pendels unter dem Aequator um 1,087 Linien kleiner sein, als die des synchronischen Pendels von Paris.[231])

Durch eine ähnliche Rechnung habe ich die folgende Tafel erhalten:

Breite des Ortes.	Pendellänge.		Länge eine Meridiangrades.
Grad.	Fuss.	Linien	Toisen.
0	3	7,468	56637
5	3	7,482	56642
10	3	7,526	56659
15	3	7,596	56687
20	3	7,692	56724
25	3	7,812	56769
30	3	7,948	56823
35	3	8,099	56882
40	3	8,261	56945
41	3	8,294	56958
42	3	8,327	56971
43	3	8,361	56984
44	3	8,394	56997
45	3	8,428	57010
46	3	8,461	57022
47	3	8.494	57035
48	3	8,528	57048
49	3	8,561	57061
50	3	8,594	57074
55	3	8,756	57137
60	3	8,907	57196
65	3	9,044	57250
70	3	9,162	57295
75	3	9,258	57332
80	3	9.329	57360
85	3	9.372	57377
90	3	9,387	57382

Man ersieht aus dieser Tafel, dass die Ungleichheit der Grade so gering ist, dass man in der Geographie die Erde als kugelförmig ansehen kann; besonders wenn die Materie am Aequator etwas dichter ist, als in der Nähe der Pole.

Einige Astronomen, welche nach sehr entfernten Gegenden gesandt worden waren, um daselbst astronomische Beobachtungen anzustellen, bemerkten, dass die Bewegung der Pendeluhren am Aequator langsamer war, als in unseren Gegenden. Richer war der erste, welcher dies im Jahre 1672 auf der Insel Cayenne wahrnahm. Als er im Monat August den Durchgang der Fixsterne durch den Meridian beobachtete, fand er, dass seine Peudeluhr gegen die mittlere Bewegung der Sonne retardirte, und zwar betrug der tägliche Unterschied $2^m\ 28^s$.

Er liess hierauf ein einfaches Pendel so schwingen, dass seine Schwingungen mit denen der sehr guten Pendeluhr isochronisch wurden, bestimmte so die Länge des ersteren und wiederholte seine Versuche 10 Monate hindurch mehrere Male in jeder Woche. Als er nach Frankreich zurückgekehrt war, verglich er die Länge dieses Pendels mit der Länge des Secundenpendels zu Paris (welche 3 Fuss $8^3/_5$ Linien pariser Maass betrug) und fand das Pendel unter dem Aequator um $1^1/_4$ Linie kürzer, als das zu Paris.

Nach dieser Zeit fand unser Landsmann Halley um das Jahr

1677, dass auf St. Helena die Bewegung einer Pendeluhr langsamer war, als in London. Er bestimmte den Unterschied nicht, verkürzte jedoch sein Pendel um mehr als $^1/_8$ Zoll oder $1^1/_2$ Linien. Um diese Operation auszuführen, brachte er, da die Länge der Schraube am unteren Theile des Pendels nicht ausreichte, einen hölzernen Ring an der Schraubenhülse an und hing daran das Gewicht des Pendels auf.

Hierauf bestimmten im Jahre 1682 Varin und Deshayes die Länge des Secundenpendels auf der Pariser Sternwarte zu 3 Fuss $8^5/_9$ Linien und fanden nach derselben Methode die Länge des synchronischen Pendels auf der Insel Gorea gleich 3 Fuss $6^5/_9$ Linien; also einen Unterschied von 2 Linien.

In demselben Jahre fanden sie auf den Inseln Guadeloupe und Martinique die Länge des synchronischen Pendels gleich 3 Fuss $6^1/_2$ Linien.

Couplet der Jüngere regulirte im Juli 1697 auf der Pariser Sternwarte seine Pendeluhr nach mittlerer Sonnenzeit, so dass sie geraume Zeit hindurch mit der mittleren Bewegung der Sonne übereinstimmte. Als er sich im darauf folgenden November zu Lissabon befand, bemerkte er, dass dieselbe Pendeluhr retardirte und zwar in 24 Stunden um 2^m 13^s.

Im darauf folgenden März fand er zu Paraïbo eine 24stündige Verzögerung derselben Uhr gegen Paris von 4^m 12^s.

Er versichert ferner, dass das Secunden schlagende Pendel zu Lissabon um $2^1/_2$ Linien und zu Paraïbo um $3^2/_3$ Linien kürzer war, als das Secundenpendel zu Paris. Er würde diese Unterschiede richtiger angegeben haben, wenn er dafür respective $1^1/_3$ und $2^5/_9$ Linien gesetzt hätte; denn diese Unterschiede entsprechen den von ihm beobachteten Zeitunterschieden von 2^m 13^s und 4^m 12^s. Man darf also diesen rohern Versuchen kein grosses Vertrauen schenken.

In den folgenden Jahren, d. h. 1699 und 1700 bestimmte Deshayes, bei seinem neuen Aufenthalte in Amerika, die Länge des Secundenpendels auf den Inseln Cayenne und Granada etwas kleiner als 3 Fuss $6^1/_2$ Linien. Auf der Insel St. Christoph fand er diese Länge = 3 Fuss $6^3/_4$ Linien, und auf St. Domingo = 3 Fuss 7 Linien.

Im Jahre 1704 fand Feuillén zu Portobello in Amerika die Länge des Secundenpendels = 3 Fuss $5^7/_{12}$ Linien, d. h. fast 3 Linien kürzer als in Paris. Er muss jedoch bei seinen Beobachtungen einen Fehler begangen haben, denn als er hierauf nach Martinique gekommen war, fand er die Länge des isochronischen Pendels nur = 3 Fuss $5^{10}/_{12}$ Linien.

Nun ist für

	die Breite	
Paraïbo . . .	— 6°	38′
Portobello .	+ 9	33
Cayenne . .	+ 4	55
Gorea . . .	+ 14	40

Guadelonpe .	+ 14	0
Martinique .	+ 14	44
Granada . .	+ 12	6
St. Christoph.	+ 17	19
St. Domingo .	+ 19	48.

Der Ueberschuss der Pendellänge in Paris über die in diesen Breiten beobachteten Längen des isochronischen Pendels ist ein wenig grösser, als die oben berechnete Tabelle der Pendellängen angiebt. Die Erde muss also am Aequator etwas stärker erhöht sein, als die frühere Rechnung es ergiebt, und ihre Materie muss in der Nähe des Mittelpunktes dichter sein, als nahe an ihrer Oberfläche; vorausgesetzt indessen, dass die Wärme der heissen Zone die Länge des Pendels nicht etwas vergrössert habe.

Picard hat beobachtet, dass eine Eisenstange, welche beim Frostwetter 1 Fuss lang war, nachdem man sie durch Feuer etwas erwärmt hatte, eine Länge von 1 Fuss und $^1/_4$ Linie annahm. Später machte De la Hire die Bemerkung, dass eine während des Winters 6 Fuss lange Eisenstange 6 Fuss und $^2/_3$ Linien lang wurde, als sie im Sommer der Sonnenwärme ausgesetzt worden war. Im ersten Falle war die Wärme grösser als im zweiten, in diesem aber grösser, als die Wärme der äusseren Theile des menschlichen Körpers; denn die Metalle erlangen eine grosse Wärme, wenn man sie im Sommer der Einwirkung der Sonne aussetzt. Das Pendel einer Uhr wird aber niemals der Sonne ausgesetzt, und erlangt selbst nie die Wärme der äusseren Theile des menschlichen Körpers. Das Pendel, dessen Länge 3 Fuss betrug, konnte also im Sommer nie mehr als $^1/_4$ Linie länger werden, als im Winter; folglich kann man die Unterschiede, welche sich zwischen der Länge isochronischer Pendel in verschiedenen Gegenden zeigen, nicht dem Temperatur-Unterschiede der Klimate zuschreiben. Sie können eben so wenig den, in die Beobachtungen der französischen Astronomen eingeschlichenen, Fehlern zugeschrieben werden; denn obgleich sie nicht vollkommen unter sich übereinstimmen, so sind doch die Fehler so klein, dass man sie vernachlässigen kann. Diese Beobachtungen stimmen alle darin überein, dass sie die isochronischen Pendel in der Nähe des Aequators kürzer ergeben, als auf der pariser Sternwarte, und nach allen ist der Unterschied nie $\angle$ $1^1/_4$ Linien und $>$ $2^2/_3$ Linien. In den Beobachtungen von Richer zu Cayenne betrug der Unterschied $1^1/_4$ Linien, in denen von Deshayes der corrigirte Unterschied $1^1/_2$ oder $1^3/_4$ Linien und in den anderen weniger genauen Beobachtungen ungefähr 2 Linien. Diese Verschiedenheit der Angaben muss man zum Theil den begangenen Beobachtungsfehlern, zum Theil der Unähnlichkeit der inneren Theile unserer Erde und der verschiedenen Höhe der Gebirge, zum Theil endlich der verschiedenen Temperatur der Luft zuschreiben.

Eine 3 Fuss lange Eisenstange ist in England während des Winters um $^1/_6$ Linie kürzer, als im Sommer, so weit ich es beurtheilen konnte.

Nimmt man diesen, durch die Wärme verursachten, Unterschied von den $1\frac{1}{4}$ Linien, welche Richer gefunden hat, fort; so bleibt immer noch ein Längen-Unterschied von $1\frac{1}{12}$ Linien, welcher genügend mit dem, früher durch die Theorie gefundenen, von $1\frac{87}{1000}$ Linien übereinstimmt. Richer wiederholte seine Beobachtungen zu Cayenne, 10 Monate hindurch, in jeder Woche und verglich die Länge des Pendels an diesem Orte mit der in Frankreich bestimmten Länge desselben. Die anderen Beobachter haben ihre Bestimmungen nicht mit derselben Sorgfalt und Vorsicht angestellt, und sieht man daher Richer's Beobachtungen als genau an, so folgt daraus, dass die Erde am Aequator ungefähr um 17 Meilen höher sein müsse, als an den Polen, wie die vorhergehende Theorie es ergeben hat.[232])

§. 25. **Lehrsatz.** Die Aequinoctialpunkte schreiten zurück, und die Erdaxe befindet sich bei jedem jährlichen Umlaufe in einer wankenden Bewegung (Nutation), vermöge welcher sie sich zweimal der Ekliptik nähert und zweimal in ihre erste Lage zurückkehrt.

Dies wird durch §. 107., Zusatz 20. des ersten Buches erwiesen; die Nutation muss aber sehr schwach sein und man kann sie kaum bemerken.[233])

§. 26. **Lehrsatz.** Alle Bewegungen des Mondes und alle Ungleichheiten folgen aus den angeführten Principien.

Während die grösseren Planeten sich um die Sonne bewegen, können sie auf ihrer Bahn andere kleinere Planeten mit sich führen, welche sich in Ellipsen um sie drehen, in deren Brennpunkt der Mittelpunkt der grösseren Planeten liegt. Dies ist nach §. 106. des ersten Buches klar. Die Bewegungen der kleinen Planeten werden auf mehrfache Weise durch die Einwirkung der Sonne gestört, indem diese solche Ungleichheiten in ihrer Bewegung hervorbringen muss, wie man sie an unserem Monde wahrnimmt. In den Syzygien bewegt sich derselbe (nach §. 107., Zusatz 2., 3., 4. und 5.) geschwinder und beschreibt mit dem nach der Erde gezogenen Radius in gleichen Zeiten grössere Flächenräume, er durchläuft eine weniger gekrümmte Bahn und nähert sich folglich der Erde mehr, als in den Quadraturen; so weit nicht seine excentrische Bewegung dies verhindert. Die Excentricität des Mondes ist nämlich am grössten (nach §. 107., Zusatz 9.), wenn sein Apogeum in den Syzygien, und am kleinsten, wenn es in den Quadraturen liegt. Der Mond geht daher im Perigeum schneller und ist der Erde näher, und umgekehrt bewegt er sich im Apogeum langsamer und ist weiter von der Erde entfernt, wenn er sich in den Syzygien befindet, als wenn er in den Quadraturen stände. Ferner schreitet das Apogeum vorwärts, die Knoten bewegen sich hingegen rückwärts, jedoch mit ungleicher Bewegung.[234]) Das Apogeum geht (nach §. 107., Zusatz 7. und 8.) schneller vorwärts in den Syzygien und langsamer rückwärts in den Quadraturen, und durch den Ueberschuss der rechtläufigen Bewegung über die rückgängige geht es jährlich in rechtläufiger Richtung fort. Die Knoten befinden sich aber (nach §. 107., Zusatz 2.)

in den Syzygien in Ruhe und gehen in den Quadraturen sehr schnell rückwärts. Was die grösste Breite des Mondes betrifft, so ist sie grösser in den Quadraturen, als in den Syzygien (nach §. 107., Zusatz 10.). Die mittlere Bewegung ist (nach §. 107., Zusatz 6.) langsamer im Perihel der Erde, als in ihrem Aphel. Dies sind die ausgezeichnetsten Ungleichheiten, welche die Astronomen in der Bewegung des Mondes wahrgenommen haben.

Es giebt deren noch einige andere, welche von den früheren Astronomen nicht beobachtet worden sind, und welche dermaassen die Bewegung des Mondes stören, dass man sie bis jetzt durch kein Gesetz auf eine bestimmte Regel hat zurückführen können. Solche sind die Geschwindigkeiten oder die stündlichen Bewegungen des Apogeums und der Knoten des Mondes, und ihre Gleichungen, so wie auch der Unterschied zwischen der grössten Excentricität in den Syzygien und der kleinsten in den Quadraturen, wie auch die Ungleichheit, welche man die Variation nennt. Alle diese Grössen nehmen jährlich (nach §. 107., Zusatz 14.) im dreifachen Verhältniss des scheinbaren Durchmessers der Sonne zu und ab. Ferner nimmt die Variation sehr nahe im doppelten Verhältniss der Zeit, welche zwischen den Quadraturen verfliesst, zu und ab (nach §. 10., Zusatz 1. und 2. und §. 107., Zusatz 16. des ersten Buches). Diese Ungleichheit wird aber gewöhnlich in den astronomischen Rechnungen auf die Mittelpunktsgleichung des Mondes bezogen und mit ihr verbunden.

§. 27. Aufgabe. Die Ungleichheiten in den Bewegungen der Jupiters- und der Saturnstrabanten aus den Bewegungen des Mondes abzuleiten.

Man kann aus den Bewegungen unseres Mondes die analogen Bewegungen der Monde oder Trabanten des Jupiters folgendermaassen ableiten. Nach §. 107., Zusatz 16. des ersten Buches steht die mittlere Bewegung der Knoten des äussersten Jupiterstrabanten zur mittleren Bewegung der Knoten unseres Mondes in einem Verhältniss, welches aus dem doppelten Verhältniss der Umlaufszeit der Erde zur Umlaufszeit des Jupiters um die Sonne und dem einfachen Verhältniss der Umlaufszeit des Trabanten um den Jupiter zur Umlaufszeit des Mondes um die Erde zusammengesetzt ist Hiernach werden in 100 Jahren die Knoten des vierten Trabanten sich um 8^0 24′ rückgängig bewegen.[235])

Nach demselben Zusatz verhalten sich die mittleren Bewegungen der Knoten der inneren Trabanten zur Bewegung der Knoten des vorher besprochenen, wie die Umlaufszeiten jener zur Umlaufszeit dieses Trabanten; sie sind daher gegeben.

Aus demselben Zusatze folgt auch noch, dass die rechtläufige Bewegung der oberen Apside eines Trabanten sich zur rückläufigen Bewegung seiner Knoten verhält, wie die Bewegung des Apogeums unseres Mondes, zur Bewegung seiner Knoten. Sie ist daher ebenfalls gegeben. Die so gefundene Bewegung der oberen Apside muss jedoch in dem

Verhältniss 5 : 9 oder beiläufig 1 : 2 vermindert werden, aus einem Grunde, der hier nicht füglich auseinander zu setzen ist.

Die grössten Gleichungen der Knoten und der oberen Apside eines beliebigen Trabanten verhalten sich sehr nahe zu den grössten Gleichungen der Knoten und des Apogeums unseres Mondes, wie respective die Bewegung der beiden ersten in der Zeit eines Umlaufes der ersten Gleichungen, zur Bewegung der beiden letzten in der Zeit eines Umlaufes der letzteren Gleichungen.

Die Variation eines Satelliten, wie man sie vom Jupiter aus wahrnehmen würde, verhält sich zur Variation des Mondes, wie sich die ganzen Bewegungen der beiderseitigen Knoten, während der Umlaufszeiten des Trabanten und des Mondes um die Sonne verhalten. Dies ergibt sich aus demselben Zusatz. Beim 4. Trabanten übertrifft sie nicht 5'',2.[236])

§. 28. Lehrsatz. Die Ebbe und Fluth des Meeres werden durch die Wirkungen der Sonne und des Mondes hervorgebracht.

Nach §. 107., Zusatz 19. und 20. des ersten Buches sieht man, dass das Meer sich zweimal, während eines Sonnen- und eines Mondtages heben und senken, und dass die grösste Erhebung des Wassers im freien und tiefen Meere dem Durchgange des Gestirns durch den Meridian in einem Zeitraum folgen muss, der kürzer ist, als 6 Stunden. Dies geschieht wirklich im Atlantischen und Aethiopischen Meere, auf dem ganzen östlichen Strich zwischen Frankreich und dem Vorgebirge der guten Hoffnung; wie auch im Stillen Meere, an den Küsten von Chili und Peru. An allen diesen Küsten treffen nämlich die Fluthen in der zweiten, dritten und vierten Stunde ein, mit Ausnahme derjenigen Orte, wo die vom tiefen Meere durch Untiefen fortgepflanzten Fluthen bis zur fünften, sechsten Stunde und zuweilen noch darüber hinaus verzögert werden. Ich zähle hierbei die Stunden von dem Durchgange des einen oder des anderen Gestirns durch den Meridian des Ortes, sowohl über als unter dem Horizont, and und verstehe unter einer Stunde den 24sten Theil der Zeit, welche der Mond bei seiner scheinbaren täglichen Bewegung gebraucht, um zum Meridian des Ortes zurückzukehren.

Die grösste Kraft der Sonne oder des Mondes, um die Gewässer des Meeres zu heben, findet in demselben Augenblick statt, in welchem diese Gestirne den Meridian des Ortes erreichen. Die Kraft, welche sie alsdann auf das Meer ausüben, hält daselbst während einer gewissen Zeit an, und nimmt durch die neue ihr hierauf beigebrachte Kraft zu, bis das Meer zu seiner grössten Höhe gelangt. Dies geschieht in Zeit von 1, 2 oder öfters von 3 Stunden an den Küsten; oder selbst in einem längeren Zeitraum, wenn das Meer viel Sandbänke hat.

Die beiden Bewegungen, welche durch diese Gestirne hervorgebracht werden, kann man nicht jede für sich wahrnehmen, sondern es bildet sich daraus eine zusammengesetzte Bewegung. In der Conjunction oder Opposition beider Gestirne treffen ihre Wirkungen zusammen und verursachen die grösste Fluth. In den Quadraturen hebt die Sonne das

Wasser zu der Zeit, wo der Mond es senkt, und senkt es, wenn dieser es hebt. Die Ebbe und Fluth ist alsdann das Resultat des Unterschiedes beider entgegengesetzt wirkenden Kräfte, und daher dann am kleinsten. Da nun die Erfahrung lehrt, dass der Mond eine grössere Wirkung auf das Meer ausübt, als die Sonne; so tritt die grösste Höhe des Wassers beiläufig um die dritte Mondstunde ein. Ausserhalb der Syzygien und Quadraturen müsste die grösste Höhe des Wassers, in Folge der blossen Einwirkung des Mondes, zur dritten Mondstunde, und in Folge der blossen Einwirkung der Sonne, um die dritte Sonnenstunde eintreten. Durch diese zusammengesetzten Einwirkungen wird sie zu einer zwischenliegenden Zeit eintreten, die aber der dritten Mondstunde näher liegt, als der dritten Sonnenstunde. Beim Uebergange des Mondes von den Syzygien zu den Quadraturen, wo die dritte Sonnenstunde der dritten Mondstunde vorangeht, wird auch die grösste Höhe des Wassers der dritten Mondstunde vorangehen, und zwar um eine Zwischenzeit, welche ein wenig nach den Octanten des Mondes am grössten ist. Beim Uebergange von den Quadraturen zu den Syzygien findet das Entgegengesetzte statt; die grösste Fluth folgt auf die dritte Mondstunde und zwar nach Zwischenzeiten, welche denjenigen gleich sind, um welche sie ihr vorher voranging.

Dies sind die Gesetze der Ebbe und Fluth in den freien Meeren. An den Mündungen der Flüsse aber gelangen, unter übrigens gleichen Umständen, die grössten Fluthen später zur Spitze. Die Wirkungen beider Gestirne sind von ihren Abständen von der Erde abhängig; in kleineren Abständen bringen sie nämlich grössere, in grösseren kleinere Wirkungen hervor, und zwar stehen die letzteren im dreifachen Verhältniss ihrer scheinbaren Durchmesser. Da nun die Sonne sich während des Winters in ihrer Erdnähe befindet, so wirkt sie stärker auf das Meer und daher sind (unter sonst gleichen Umständen) die Fluthen der Syzygien etwas grösser, die Fluthen der Quadraturen etwas kleiner im Winter als im Sommer. Der Mond kommt jeden Monat in seine Erdnähe, und daher sind alsdann die Fluthen grösser, als 15 Tage vor- oder nachher, wo er sich in seiner Erdferne befindet. Durch diese beiden Ursachen wird bewirkt, dass in zwei benachbarten Syzygien die beiden grössten Fluthen nicht genau auf einander folgen.

Die Wirkungen beider Gestirne hängen auch von ihrer Declination, oder ihrem Abstande vom Aequator ab. Befände sich nämlich das Gestirn im Pole, so würde es die einzelnen Theile des Wassers auf constante Weise anziehen, ohne dass seine Wirkung grösser oder kleiner würde und folglich würde es keine wechselnde Bewegung hervorbringen. Entfernen sich also diese Gestirne vom Aequator nach den Polen hin, so müssen ihre Wirkungen allmählig schwächer werden und daher in den Syzygien der Solstitien kleinere Fluthen verursachen, als in den Syzygien der Aequinoctien. In den Quadraturen der Solstitien hingegen müssen die Fluthen grösser sein, als in den Quadraturen der Aequinoctien; weil die Wirkungen des Mondes, welcher sich alsdann im

Aequator befindet, diejenigen der Sonne bei weitem übertrifft. Die grössten Fluthen treten demnach in den Syzygien, und die kleinsten in den Quadraturen, zu den Zeiten beider Aequinoctien ein; ferner wird die grösste Fluth in den Syzygien, wie die Erfahrung lehrt, immer von der kleinsten in den Quadraturen begleitet.

Da die Sonne im Winter weniger von der Erde entfernt ist, als im Sommer, so wird die grösste und kleinste Ebbe und Fluth häufiger dem Frühlings-Aequinoctium vorangehen, als ihm nachfolgen, und häufiger dem Herbst-Aequinoctium folgen, als ihm vorangehen.

Die Wirkungen beider Gestirne hängen noch von der Breite des Ortes ab. Es stelle ApEP die überall von einem sehr tiefen Meere bedeckte Erde vor, C sei ihr Mittelpunkt, P und p ihre Pole, und AE der Aequator. F sei ein beliebiger, ausserhalb des Aequators angenommener Ort, und Ff der Parallel desselben, so wie Dd derjenige Parallel, welcher jenem auf der anderen Seite des Aequators entspricht. L sei der Ort, an welchem der Mond sich 3 Stunden früher befand, H der ihm perpendikulär auf der Erde entsprechende, so wie h der dem letzteren entgegengesetzte Ort. K und k seien die Oerter, welche von jenen um 90° abstehen; CH und Ch die grössten Höhen des Meeres, vom Mittelpunkte der Erde an gemessen, so wie CK und Ck die kleinsten Höhen desselben. Beschreibt man über den Axen Hh und Kk eine Ellipse, so wird dieselbe durch ihre Umdrehung um die grösste Axe Hh ein Sphäroïd HPKhpk beschreiben, welches sehr nahe die Figur des Meeres darstellt. CF, Cf, CD und Cd werden die Höhen des Meeres in den Orten F, f, D, d sein.

Fig. 198.

Beschreibt ferner bei der besprochenen Umdrehung der Ellipse der beliebige Punkt N einen Kreis MN, welcher die Parallelen Ff und Dd in den Punkten R und T, so wie den Aequator AE in S schneidet; so wird CN die Höhe des Meeres in allen, auf diesem Kreise gelegenen Orten R, S, T sein. Bei der täglichen Umdrehung eines beliebigen Ortes F, wird die grösste Erhöhung des Wassers in F um die dritte Stunde nach der oberen Culmination des Mondes stattfinden. Die grösste Senkung wird in Q, drei Stunden nach dem Untergang des Mondes, hierauf die grösste Erhebung in f, drei Stunden nach der unteren Culmination und endlich die grösste Senkung in Q, drei Stunden nach dem Anfang des Mondes stattfinden. Die letzte Erhebung des Wassers in f wird kleiner sein, als die erste in F.

Denken wir uns das ganze Meer in zwei halbkugelförmige Ströme getheilt, von denen der eine, nach Norden gerichtete, sich auf der Halbkugel KHk, der andere nach Süden gerichtete, sich auf der entgegengesetzten Halbkugel Khk befindet. Diese Ströme sind einander immer entgegengesetzt, und kommen nach der Reihe in den Meridian jedes Ortes auf der Erde, in der Zwischenzeit von 12 Mondstunden. Da aber die nördlichen Gegenden mehr am nördlichen Strome, die südlichen am südlichen Antheil haben; so müssen sich zusammengesetzte Fluthen bilden, welche wechselweise grösser und kleiner in jedem Orte ausserhalb des Aequators sind, in welchem beide Gestirne auf- und untergehen. Die grösste Fluth wird also, wenn der Mond gegen das Zenit des Ortes hin abweicht, nahe auf die dritte Stunde nach der oberen Culmination des Mondes fallen; wechselt die Abweichung des Mondes, so wird diese Fluth die kleinste werden. Der grösste Unterschied dieser Fluthen trifft auf die Zeit der Solstitien, besonders wenn der aufsteigende Knoten des Mondes im ersten Punkte des Widders liegt. Dies stimmt mit der Erfahrung überein, denn im Winter sind die Morgenfluthen grösser, als die des Abends; im Sommer ist das Umgekehrte der Fall. In Plymouth steigt dieser Unterschied auf 1 Fuss, in Bristol auf 15 Zoll, wie Colepress und Sturm beobachtet haben.

Die Bewegungen des Meeres, von denen ich bisher gesprochen habe, werden ein wenig durch diese wechselseitige Kraft der Gewässer geändert, vermöge welcher die Fluth noch einige Zeit wird fortdauern können, obgleich die Einwirkung beider Gestirne bereits aufgehört hat. Diese Erhaltung der Bewegung, wenn letztere einmal beigebracht ist, vermindert den Unterschied der wechselseitigen Fluthen und bewirkt, dass die unmittelbar nach den Syzygien eintretenden grösser und die nach den Quadraturen kleiner ausfallen. Desshalb sind die wechselseitigen Fluthen in Plymouth und Bristol nicht um viel mehr als 1 Fuss oder 15 Zoll von einander verschieden, dergestalt dass die grössten Fluthen in diesen Häfen nicht die ersten, sondern die dritten nach den Syzygien sind. Alle diese Bewegungen werden verzögert, wenn das Meer über Untiefen fortgeht, so dass die allergrössten Fluthen in gewissen Meerengen und Strom-Mündungen nur erst auf den vierten oder fünften Tag nach den Syzygien fallen.

Ferner kann es auch vorkommen, dass die Fluth sich vom Ocean durch verschiedene Meerengen nach demselben Hafen fortpflanzt, und schneller durch die einen als durch die anderen fortgeht. Hierdurch wird dieselbe Fluth in zwei oder mehrere zertheilt, welche nach einander ankommen und sie bildet so neue Bewegungen verschiedener Art. Denken wir uns zwei gleiche Fluthen, welche aus verschiedenen Orten nach demselben Hafen gelangen, und von denen die eine der anderen um 6 Stunden vorangeht, und um die dritte Stunde nach der Culmination des Mondes den Hafen erreicht. Befände sich der Mond bei seiner Culmination im Aequator, so würden alle 6 Stunden gleiche Fluthen eintreten,

welche mit gleichen Ebben zusammenträfen. Hierdurch würde bewirkt werden, dass das Wasser während dieses ganzen Tages stillstände. Wiche nun der Mond vom Aequator ab, so würden die Fluthen, welche, wie wir gesehen haben, wechselweise grösser und kleiner werden, sich aus ihm nach diesem Hafen ebenfalls wechselweise zu je zwei grösseren und kleineren Fluthen fortpflanzen. Die beiden grösseren Fluthen würden bewirken, dass das Wasser in der Mitte zwischen beiden seine grösste Höhe erreichte; die grössere und die kleinere, dass das Wasser in der Mitte zwischen beiden zu einer mittleren Höhe gelangte und endlich würde es in der Mitte der beiden kleineren Fluthen die kleinste Höhe erreichen. Demnach würde das Wasser innerhalb 24 Stunden, nicht wie gewöhnlich zweimal, sondern nur einmal seine grösste und einmal seine kleinste Höhe erreichen. Die grösste Höhe des Wassers wird, wenn der Mond nach dem über dem Horizont des Ortes befindlichen Pole hin vom Aequator abweicht, auf die 6te oder 13te Stunde nach der Culmination des Mondes fallen, und sie wird sich in eine Ebbe verwandeln, wenn der Mond die entgegengesetzte Abweichung annimmt.

Halley hat Beispiele von allen diesen Erscheinungen in den Beobachtungen der Piloten zu Batsham, einem Hafen des Königreiches Tunquin, welcher eine nördliche Breite von 20° 50′ hat, gefunden. In diesem Hafen findet gar keine Fluth an dem Tage statt, welcher auf den Durchgang des Mondes durch den Aequator folgt. Wenn der Mond hierauf anfängt, gegen Norden hin abzuweichen, nimmt man den Anfang der Ebbe und Fluth wahr, nicht zweimal des Tages wie in anderen Häfen, sondern nur einmal. Die Fluth tritt ein, wenn der Mond unter-, die Ebbe, wenn er aufgeht. Erstere wächst mit der Abweichung des Mondes, bis zum 7ten oder 8ten Tage, worauf sie während der 7 folgenden Tage in demselben Maasse abnimmt, in welchem sie vorher zugenommen hatte. Geht der Mond in die entgegengesetzte Abweichung über, so hört die Fluth gänzlich auf und verwandelt sich in Ebbe, welche beim Untergange des Mondes eintritt, während die Fluth sich zur Zeit des Aufganges einstellt, bis der Mond wieder die erste Abweichung annimmt. Man gelangt zu diesem Hafen und den ihm benachbarten Orten auf zwei verschiedenen Wegen, der eine im Chinesischen Meere zwischen dem Continente und der Insel Luconia, der andere im Indischen Meere zwischen dem Continente und der Insel Borneo.

Wenn also die Fluthen durch diese Meerengen fortgehend, aus dem Indischen Meere in 12, aus dem Chinesischen in 6 Stunden, also in der dritten und neunten Mondstunde ankommen; so bilden sie die zusammengesetzten Bewegungen. Ob die Beschaffenheit jener Meere eine andere und eigenthümliche sei, dies zu bestimmen überlasse ich den Beobachtungen, welche man an den benachbarten Küsten anstellen kann.

Ich habe bis jetzt die Ursachen der Bewegung des Mondes und der Meere gegeben; es bleibt mir noch übrig, die Grösse derselben zu behandeln.

ABSCHNITT II.
Von der Grösse der Mond-Ungleichheiten.

---

§. 29. Aufgabe Man soll die Kräfte der Sonne finden, womit sie die Bewegungen des Mondes stört.

Es bezeichne S die Sonne, T die Erde, P den Mond und CADB die Bahn des letzteren. Es sei $SK = ST$ und $SL : SK = SK^2 : SP^2$. Ferner sei $LM \mp PT$. Wird nun die beschleunigende Schwerkraft der Erde gegen die Sonne durch ST oder SK ausgedrückt, so wird SL die

Fig. 190.

beschleunigende Schwerkraft des Mondes gegen die Sonne sein, und zwar ist diese aus den Theilen SM und ML zusammengesetzt, von denen LM und der Theil TM von SM die Bewegungen des Mondes stören, wie wir im ersten Buche, §. 107. nebst Zusätzen gesehen haben.

Die Erde und der Mond bewegen sich um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt, daher wird die Bewegung der ersteren ebenfalls durch ähnliche Kräfte gestört. Man kann jedoch die Summe dieser Kräfte und Bewegungen auf den Mond beziehen und erstere durch analoge Linien TM und LM darstellen.

Die Kraft LM, in ihrem mittleren Werthe, steht zur Centripetalkraft, vermöge welcher der Mond sich in seiner Bahn, im Abstande PT um die als ruhend angenommene Erde bewegen könnte, im doppelten Verhältniss der Umlaufszeit des Mondes um die Erde, zur Umlaufszeit der letzteren um die Sonne (nach §. 107., Zusatz 17. des ersten Buches). Das Verhältniss ist demnach

$$(27^d\ 7^h\ 43^m)^2 : (365^d\ 6^h\ 9^m)^2 = 1000 : 178725 = 1 : 178^{29}/_{40}.^{237})$$

Nun haben wir in §. 4. dieses Buches gefunden, dass, wenn die Erde nnd der Mond sich um ihren gemeinschaftlichen Schwerpnnkt bewegen, ihre mittlere Entfernung sehr nahe $60\frac{1}{2}$ Erdhalhmessern gleich ist. Ferner verhält sich die Kraft, vermöge welcher der Mond sich in seiner Bahn um die ruhende Erde und im Abstande $PT = 60\frac{1}{2}$ Erdhalbmessern bewegen könnte, zu derjenigen Kraft, vermöge welcher er sich in derselben Zeit, in einem Abstande von 60 Erdhalbmessern herumbewegen könnte, wie $60\frac{1}{2} : 60$.

Endlich verhält sich diese Kraft zur Schwerkraft anf der Erde sehr nahe, wie $1 : 60^2$. Es verhält sich daher die mittlere Kraft ML zur Schwerkraft an der Oberfläche der Erde, wie $1 \,.\, 60\frac{1}{2} : 60^3 \,.\, 178\frac{29}{40} = 1 : 638092{,}6$[238]). Hieraus und aus dem Verhältniss der Linien TM und ML ist die Kraft TM zu finden und dies sind die Kräfte der Sonne, wodnrch die Bewegungen des Mondes gestört werden.

§. 30. Aufgahe. Man soll die stündliche Zunahme der, durch den Mond um die Erde beschriebenen Fläche hestimmen, voransgesetzt, dass die Bahn kreisförmig sei.

Wir haben gesehen, dass die vom Radius des Mondes um die Erde beschriebenen Flächenränme den Zeiten proportional sind, so weit nicht durch die Einwirkung der Sonne die Bewegungen des Mondes gestört werden. Wir wollen nun nntersuchen, welche Ungleichheit des Momentes oder der stündlichen Zunahme hierdurch hervorgehracht wird. Um die Rechnung zu erleichtern, wollen wir die Mondhahn als kreisförmig voraussetzen und alle Ungleichheiten vernachlässigen, mit Ausnahme derjenigen, von der hier die Rede ist.

Wegen der grossen Entfernung der Sonne nehmen wir an, dass SP und ST einander parallel seien. Hierdurch wird die mittlere Kraft LM auf ihren mittleren Werth TP, so wie die Kraft TM auf ihren mittleren Werth $3 \,.\, PK$ reducirt. Diese Kräfte bilden, nach Gesetze, Zusatz 2., durch Zusammensetzung die Kraft TL, welche indem man LE perpendikulär auf den Radius TP zieht, sich in die beiden Seitenkräfte TE und EL zerlegen lässt. Die erste von diesen, TE wirkt immer längs des Radius TP, und wird die Beschreibung der durch den letzteren durchlaufenen Fläche TPC weder beschleunigen noch verzögern. Was die zweite Seitenkraft EL anbelangt, so wirkt sie längs der auf den Radins perpendiknlären Linie und beschleunigt oder verzögert jene Beschreibung eben so sehr,

Fig. 191.

als sie die Bewegung des Mondes beschleunigt oder verzögert. Diese Beschleunigung des letzteren, welche in jedem Augenblicke beim Uebergange von der Quadratur C zur Conjunction A erfolgt, ist der beschleunigenden Kraft EL selbst, d. h. $\frac{3PK \cdot TK}{TP}$ proportional. Die Zeit werde durch die mittlere Bewegung, oder (was fast auf dasselbe herauskommt) durch den Winkel CTP oder den Bogen CP dargestellt. Man ziehe CG perpendikulär auf CT und mache CG = CT; man denke sich ferner den Quadranten AC in unendlich viele gleiche Theile Pp, etc. getheilt, welche eben so viel gleiche Zeittheile darstellen. Man ziehe ferner pk perpendikulär auf CT und die Linie TG, welche die verlängerten Linien KP und kp in F und f schneidet. Offenbar ist nun FK = TK und Kk : PK = Pp : TP [239]) d. h. Kk im gegebenen Verhältniss. Es wird daher FK . Kk oder die Fläche FKkf proportional $\frac{3PK \cdot TK}{TP}$, d. h. EL; folglich wird die ganze Fläche GCKF der Summe aller Kräfte EL, welche während der ganzen Zeit CP auf den Mond gewirkt haben, proportional. Jene Fläche ist also der Geschwindigkeit proportional, welche alle diese Kräfte hervorgebracht haben, d. h. der Beschleunigung, womit die Fläche CTP beschrieben wird, oder dem Increment des Moments.

Die Kraft, vermöge welcher der Mond seinen Umlauf um die als ruhend angenommene Erde, im Abstande TP und in der Zeit ADBC = $27^d\ 7^h\ 43^m$ zurücklegen könnte, würde bewirken, dass ein fallender Körper während der Zeit CT den Weg $\frac{1}{2}$CT durchliefe und in derselben Zeit eine Geschwindigkeit erlangte, welche derjenigen des Mondes in seiner Bahn gleich wäre. Dies erhellt aus §. 18., Zusatz 9. des ersten Buches. Da nun das auf TP gefällte Perpendikel Kd = $\frac{1}{3}$EL und auch in den Octanten = $\frac{1}{2}$TP oder = $\frac{1}{2}$ML ist; so wird die Kraft EL in den Octanten, wo sie am grössten ist, die Kraft ML im Verhältniss 3 : 2 übertreffen. Sie wird sich daher zu der Kraft, vermöge welcher der Mond sich um die ruhende Erde in seiner Umlaufszeit bewegen könnte, verhalten wie 100 : $\frac{2}{3}$. 17872,5 (§. 29.) = 100 : 11915. In der Zeit CT müsste sie eine Geschwindigkeit hervorbringen, welche $\frac{100}{11915}$ der Geschwindigkeit des Mondes gleich wäre, und während der Zeit CPA müsste sie eine Geschwindigkeit erzeugen, welche im Verhältniss CA : CT oder CA : TP grösser wäre.

Die grösste Kraft EL in den Octanten werde durch die Fläche FK . Kk = $\frac{1}{2}$TP . Pp [240]) dargestellt. Die Geschwindigkeit, welche die grösste Kraft in einer beliebigen Zeit CP hervorbringen könnte, wird sich alsdann zu der Kraft, welche durch die kleinste ganze Kraft EL erzeugt werden kann, verhalten wie $\frac{1}{2}$TP . CP : KCGF, und die während der ganzen Zeit CPA erzeugten Geschwindigkeiten wie $\frac{1}{2}$TP . CA : TCG = CA : TP.

Die Geschwindigkeit am Ende der ganzen Zeit wird also $\frac{100}{11915}$

der Geschwindigkeit des Mondes gleich sein. Addirt und subtrahirt man von der letzteren, welche dem mittleren Momente der Fläche analog ist, die Hälfte von jener Geschwindigkeit und stellt man das mittlere Moment durch die Zahl 11915 dar; so wird die Summe 11915 + 50 = 11965 das grösste Moment der Fläche in den Syzygien, und der Unterschied 11915 — 50 = 11865 das kleinste Moment derselben Fläche in den Quadraturen darstellen.[241]) Die während gleicher Zeiten in den Syzygien und Quadraturen beschriebenen Flächen verhalten sich daher zu einander, wie 11965 : 11865. Addirt man zum kleinsten Moment 11865 ein anderes, welches sich zum Unterschiede 100 beider verhält, wie FKCG : TCG oder (was dasselbe ist) wie $PK^2 : PT^2 = Pd : PT$;[242]) so wird die Summe das Moment der Fläche in dem Falle darstellen, wo der Mond sich in einem beliebigen zwischenliegenden Orte P befindet.

Alles dieses findet unter der Voraussetzung statt, dass die Sonne und die Erde sich in Ruhe befinden, und der Mond seinen Umlauf in der synodischen Zeit von 27ᵈ 7ʰ 43ᵐ vollende. Die wahre synodische Umlaufszeit beträgt aber 29ᵈ 12ʰ 44ᵐ und daher müssen die Incremente der Momente im Verhältniss der Umlaufszeiten, d. h. im Verhältniss 1080853 : 1000000 vergrössert werden. Auf diese Weise wird das ganze Increment, welches $^{100}/_{11915}$ vom mittleren Momente betrug, jetzt $^{100}/_{11023}$ desselben werden. Es wird daher das Moment der Fläche in den Quadraturen des Mondes sich zum entsprechenden Moment in den Syzygien verhalten, wie 11023 — 50 : 11023 + 50 = 10973 : 11073; und zum Moment, wenn der Mond sich in einem beliebigen zwischenliegenden Orte P befindet, wie 10973 : 10973 + Pd, vorausgesetzt das TP = 100 sei.

Die Fläche, welche der Mond um die Erde in jedem gleichen Zeittheilchen beschreibt, ist also sehr nahe der Summe aus der Zahl 219,46 und dem Sinus versus des doppelten Abstandes des Mondes von der nächsten Quadratur, in einem Kreise zum Radius = 1, proportional.[243]) Alles dieses unter der Voraussetzung, dass die Variation in den Octanten von mittlerer Grösse sei. Ist sie daselbst grösser oder kleiner, so muss dieser Sinus versus in demselben Verhältniss vergrössert oder verkleinert werden.

§. 31. Aufgabe. Man soll aus der stündlichen Bewegung des Mondes seinen Abstand von der Erde finden.

Die Fläche, welche der Mond in jedem Augenblick um die Erde beschreibt, ist der stündlichen Bewegung desselben und dem Quadrat seines Abstandes von der Erde zusammengesetzt proportional.[244]) Folglich steht der Abstand in einem Verhältniss, welches aus dem halben directen Verhältniss der Fläche und dem halben indirecten der stündlichen Bewegung zusammengesetzt ist.

Zusatz 1. Man erhält durch dieses Mittel den scheinbaren Durchmesser des Mondes, indem derselbe sich umgekehrt wie der Abstand von der Erde verhält. Es mögen die Astronomen untersuchen, wie genau diese Regel mit den Erscheinungen übereinstimmt.

Zusatz 2. Man kann hiernach auch, mittelst der Erscheinungen, die Bahn des Mondes viel genauer als bisher bestimmen.

§. 32. Aufgabe. Man soll die Durchmesser der Bahn bestimmen, in welcher der Mond sich bewegen muss; vorausgesetzt, dass sie keine Excentricität habe.

Die Krümmung der Curve, welche ein beweglicher Körper beschreiben würde, wenn eine Kraft ihn stets nach einer auf erstere perpendikulären Linie anzöge, steht im directen Verhältniss der Anziehung und im indi-

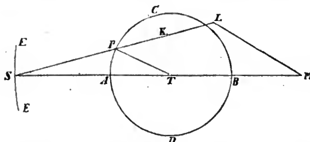


Fig. 192.

recten Verhältniss des Quadrats der Geschwindigkeit.[245]) Ich setze voraus, dass die Krümmungen der Curve unter einander im letzten Verhältniss der Sinusse oder Tangenten der Berührungswinkel stehen, welche gleichen Radien angehören, im Fall die letzteren unendlich klein werden.

Die Anziehung des Mondes gegen die Erde in den Syzygien ist der Ueberschuss seiner Schwere gegen diese über die Kraft der Sonne $= 2PK$, welche letztere der Unterschied der Schwere des Mondes und der Erde gegen die Sonne ist. In den Quadraturen ist jene Anziehung gleich der Summe der Schwere des Mondes gegen die Erde und der gegen die Erde gerichteten Sonnenkraft. Setzt man nun $\frac{AC + CT}{2} = N$, so werden diese Anziehungen sehr nahe proportional $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{CT \cdot N}$ und $\frac{178725}{CT^2} + \frac{1000}{AT \cdot N}$ oder auch

$$1. \quad 178725\, CT^2 \cdot N - 2000 \cdot AT^2 \cdot CT \text{ und } 178725 AT^2 \cdot N + 1000 CT^2 \cdot AT.$$[246])

Wird nämlich die beschleunigende Schwerkraft des Mondes gegen die Erde durch die Zahl 178725 dargestellt, so ist die mittlere Kraft ML, welche in den Quadraturen $= PT$ oder $= TK$ und den Mond gegen die Erde zieht, gleich 1000, und die mittlere Kraft TM in den Syzygien $= 3000$. Subtrahirt man von der letzteren die mittlere Kraft ML, so bleibt 2000 übrig, womit der Mond sich in den Syzygien von der Erde entfernt und welche ich oben $2 \cdot PK$ genannt habe.

Die Geschwindigkeit des Mondes in den Syzygien A und B verhält sich zu seiner Geschwindigkeit in den Quadraturen, wie CT : AT, und wie das Moment der Fläche, welches der Mond in den Syzygien um die Erde beschreibt, zu dem Moment derselben Fläche in den Quadraturen, zusammensetzt; also wie

2. 11073 . CT : 10973 . AT.

Verbindet man dieses Verhältniss, indirect und doppelt genommen, mit dem obigen 1., direct und einfach genommen; so ist es klar, dass die Krümmung der Mondbahn in den Syzygien sich zu ihrer Krümmung in den Quadraturen verhält, wie $120406729 . 178725 . AT^2 . CT^2 . N - 120406729 . 2000\ AT^4 . CT : 122611329 . 178725\ AT^2 . CT^2 . N + 122611329 . 1000\ AT . CT^4$ d. h. wie

3. $2151969 . AC . CT . N - 24081 . AT^3 : 2191371\ AT . CT . N + 12261\ CT^3$.

Da die Figur der Mondbahn unbekannt ist, wollen wir voraussetzen, sie sei gleich der Ellipse DBCA, in deren Mittelpunkte T sich die Erde befindet. Ihre grosse Axe DC gehe durch die Quadraturen, ihre kleine Axe AB durch die Syzygien. Da die Ebene dieser Ellipse sich mit einer Winkelbewegung um die Erde dreht, und da die Curve, deren Krümmung wir suchen, in einer von aller Winkelbewegung freien Ebene beschrieben sein soll; so müssen wir die Figur betrachten, welche der Mond in dieser festen Ebene beschreibt, während er seinen Umlauf in dieser Ellipse macht, d. h. die Figur Cpa. Jeder Punkt p der letzteren wird so bestimmt, dass man einen beliebigen Punkt P in der Ellipse annimmt um den Ort des Mondes darzustellen und hierauf Tp = TP so legt, dass der Winkel PTp der scheinbaren Bewegung der Sonne seit der Quadratur C gleich werde, oder (was sehr nahe auf dasselbe hinauskommt), dass ∠ CTp : CTP, wie die synodische Umlaufszeit des Mondes zu seiner periodischen, oder

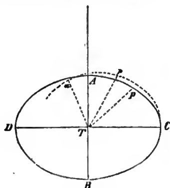


Fig. 193.

4. $CTp : CTP = 29^d\ 12^h\ 44^m : 27^d\ 7^h\ 43^m$.

Nimmt man also CTa : CTA (90°) in demselben Verhältniss, und macht man Ta = TA; so ist a die untere und C die obere Apside der Bahn Cpa. Was die Krümmungen in diesen beiden Punkten betrifft, so finde ich nach Ausführung der erforderlichen Rechnung, dass der Unterschied zwischen der Krümmung der Bahn Cpa im Scheitel a und der Krümmung des Kreises zum Mittelpunkt T und Radius TA sich zum Unterschiede zwischen der Krümmung der Ellipse im Scheitel A und der

Krümmung desselben Kreises verhält, wie $CTP^2 : CTp^2$. Ferner verhält sich die Krümmung der Ellipse in A zur Krümmung dieses Kreises, wie $TA^2 : TC^2$. Die Krümmung dieses Kreises zur Krümmung desjenigen Kreises, dessen Mittelpunkt T und Radius TC ist, verhält sich wie TC : TA. Ferner verhält sich die Krümmung des letzteren Kreises zur Krümmung der Ellipse in C, wie $TA^2 : TC^2$.

Endlich verhält sich der Unterschied zwischen der Krümmung der Ellipse in C und der Krümmung des letzteren Kreises zum Unterschiede zwischen der Krümmung der Figur Cpa im Scheitel C und der Krümmung des letzteren Kreises, wie $\angle CTp^2 : CTP^2$. Dies findet man leicht aus den Sinussen der Berührungswinkel und der Unterschiede dieser Winkel.[247])

Benutzt man alle diese Verhältnisse, so findet man, dass die Krümmung der Bahn Cpa in a sich zu ihrer Krümmung in C verhält, wie

$$5. \quad AT^3 + \frac{16824}{100000} CT^2 . AT : CT^3 + \frac{16824}{100000} AT^2 . CT.^{248})$$

Die Zahl $\frac{16824}{100000}$ stellt den Unterschied der Quadrate $\angle CTp^2 - \angle CTP^2$, dividirt durch CTP^2, oder was dasselbe ist $\frac{(29^d\ 12^h\ 44^m)^2 - (27^d\ 7^h\ 43^m)^2}{(27^d\ 7^h\ 43^m)^2}$ dar.

Da nun a die Syzygie und C die Quadratur des Mondes vorstellt, so muss das eben gefundene Verhältniss dasselbe sein, welches oben in Gl. 3. für die Krümmung der Mondbahn in den Syzygien zur Krümmung in den Quadraturen gefunden worden ist. Um nun das Verhältniss CT : AT zu finden, brauchen wir nur die äusseren und mittleren Glieder der so entstehenden Proportion mit einander zu multipliciren, und erhalten so, nachdem die entstehenden Glieder durch TC . AT dividirt worden sind, folgende Gleichung:

$$6. \quad 2062{,}79 . CT^4 - 2151969\ N . CT^3 + 368676\ N . AT . CT^2 + 36342\ AT^2 . CT^2 - 362047\ N . AT^2 . CT + 2191371\ N . AT^3 + 4051{,}4\ AT^4 = 0.$$

Setzt man in derselben $N = \frac{CT + AT}{2} = 1$ und $\frac{CT - AT}{2} = x$ also $CT = 1 + x$ und $AT = 1 - x$; so ergibt sich $x = 0{,}00719$, also die halbe grosse Axe $CT = 1{,}00719$ und die halbe kleine Axe $AT = 0{,}99281$ so wie sehr nahe $CT : AT = 70^1/_{24} : 69^1/_{24}$.

Es verhält sich daher der Abstand des Mondes von der Erde in den Syzygien zum Abstande in den Quadraturen, wie $69^1/_{24} : 70^1/_{24}$ oder in runden Zahlen wie 69 : 70; vorausgesetzt, dass man von der Excentricität abstrahire.

§. 33. **Aufgabe.** Man soll die Variation des Mondes finden.

Diese Ungleichheit des Mondes entsteht zum Theil aus der elliptischen Gestalt seiner Bahn, zum Theil aus der Ungleichheit der Momente der Fläche, welche er um die Erde beschreibt. Setzt man voraus, dass

der Mond P (Fig. 193.) sich in einer Ellipse DBCA um die ruhende und im Mittelpunkt derselben befindliche Erde bewege; so wird er Flächen CTP beschreiben, welche den Zeiten proportional sind. Verhält sich ferner die halbe grosse Axe CT der Ellipse zur halben kleinen CA, wie 70 : 69, so wird die Tangente von CTP sich zur Tangente der mittleren Bewegung, letztere von der Quadratur C an gerechnet, sich verhalten wie 69 : 70.[249])

Die Beschreibung der Fläche CTP muss aber, beim Uebergange des Mondes von der Quadratur zur Syzygie beschleunigt werden und zwar so, dass ein Moment in der Syzygie sich zum Moment in der Quadratur verhalte, wie 11073 : 10973 und dass der Ueberschuss des Momentes in irgend einem zwischenliegenden Orte P über das Moment in der Quadratur proportional sei $\sin CTP^2$ (§. 30.). Dies wird man genau genug ausführen, wenn man tgCTP im Verhältniss $\sqrt{10973} : \sqrt{11073} = 68,6877 : 69$ vermindert. Hierdurch wird tg CTP zur Tangente der mittleren Bewegung, wie 68,6877 : 70,[250]) sich verhalten. In den Octanten, wo die mittlere Bewegung = 45° ist, wird daher der Winkel CTP = 44° 27′ 28″, und subtrahirt man diesen von der mittleren Bewegung; so bleibt 32′ 32″ als grösste Variation. Dies würde sich so verhalten, wenn der Mond beim Uebergange von der Quadratur zur Syzygie einen, genau 90° fassenden, Winkel CTA beschriebe. Wegen der Bewegung der Erde aber, vermöge welcher die Sonne in ihrer scheinbaren Bewegung rechtläufig fortgeht, beschreibt der Mond, ehe er die Sonne erreicht, einen Winkel CTa, welcher im Verhältniss der synodischen Umlaufszeit zur periodischen, d. h. im Verhältniss $29^d\ 12^h\ 44^m : 27^d\ 7^h\ 43^m$ grösser als 90° ist. Man muss daher alle Winkel um den Mittelpunkt T in demselben Verhältniss vergrössern, wodurch die vorher gefundene grösste Variation von 32′ 32″ nun in 35′ 10″ übergeht.

So gross ist die Variation in der mittleren Entfernung der Sonne von der Erde, indem man die Unterschiede vernachlässigt, welche aus der Krümmung der grossen Bahn und aus der verschiedenen Wirkung der Sonne auf den Mond, wenn dieser neu und wachsend, als wenn er voll und abnehmend ist, hervorgehen.

Für die anderen Abstände der Sonne von der Erde steht die grösste Variation in einem Verhältniss, welches aus dem doppelten directen der synodischen Umlaufszeit des Mondes (für eine gegebene Jahreszeit) und dem dreifachen indirecten Verhältniss des Abstandes der Erde von der Sonne zusammengesetzt ist. Im Apogeum der Sonne ist daher die grösste Variation 33′ 14″ und im Perigeum 37′ 11″; vorausgesetzt, dass die Excentricität der Sonne sich zur halben grossen Axe ihrer Bahn verhalte, wie $16\frac{15}{16} : 1000$.

Wir haben bis jetzt die Variation des Mondes unter der Voraussetzung gefunden, dass seine Bahn nicht excentrisch, und dass in den Octanten sein Abstand von des Erde immer der mittlere sei. Da aber der Mond, vermöge seiner Excentricität, der Erde bald näher, bald ferner ist, als in der eben betrachteten Bahn; so kann auch seine

Variation etwas grösser oder kleiner als nach der hier angeführten Regel werden. Diese Aenderungen durch Beobachtnngen zu bestimmen, überlasse ich den Astronomen.

§. 34. Aufgabe. Man soll die stündliche Bewegung der Mondknoten in einer kreisförmigen Bahn bestimmen.

Es bezeichne S die Sonne, T die Erde, P den Mond, NPn die Mondbahn und Npn dieselbe, auf die Ebene der Ekliptik projicirt. Fer-

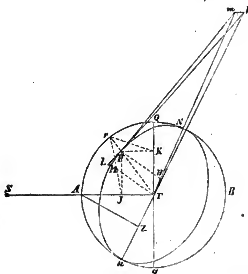


Fig. 194.

ner seien N und n die Knoten, nTNm die unbestimmt verlängerte Knotenlinie, PJ sei auf ST, PK auf Qq, Pp auf die Ebene der Ekliptik perpendikulär gefällt. A und B bezeichnen die Syzygien des Mondes, Q und q seine Quadraturen in der Ebene der Ekliptik, AZ sei perpendikulär auf die Knotenlinie Nn gezogen und pK perpendikulär auf die Linie Qq, welche beide Quadraturen verbindet. Die Kraft der Sonne wodurch die Bewegung des Mondes gestört wird, ist (nach § 29.) aus zwei Kräften zusammengesetzt, von denen die eine LM, die andere der Linie MT, in der Figur jenes Paragraphen, proportional ist.

Durch die erstere wird der Mond gegen die Erde, durch die zweite gegen die Sonne gezogen und zwar längs einer ST parallelen Linie.

Die Kraft LM wirkt längs der Ebene der Mondbahn, und kann daher die Lage derselben nicht ändern; sie braucht deshalb hier nicht betrachtet zu werden. Was die Kraft MT betrifft, durch welche die Ebene der Mondbahn gestört wird, so wird sie durch 3. PK oder 3. JT ausgedrückt. Sie verhält sich (nach §. 29.) zu derjenigen Kraft, ver-

möge welcher der Mond sich gleichförmig während seiner periodischen Umlaufszeit um die als ruhend vorausgesetzte Erde bewegen könnte, wie 3. JT : 178,725 mal den Radius, oder wie JT : 59,575 mal den Radius des Kreises.

Uebrigens nehme ich bei dieser und den folgenden Rechnungen alle vom Monde zur Sonne gezogenen Linien als parallel mit denjenigen an, welche von der Erde zur Sonne gezogen sind. Die Neigung dieser Linien vermindert nämlich in einigen Fällen nahezu alle Wirkungen eben so sehr, als sie dieselben in anderen Fällen vermehrt, und wir suchen hier die mittleren Bewegungen der Knoten, indem wir die unmerklichen kleinen Theile vernachlässigen, durch welche die Rechnung zu verwickelt werden würde.

PM bezeichne nun den Bogen, welchen der Mond in einem gegebenen Zeittheilchen beschreibt und ML die kleine Linie, welche der Mond in derselben Zeit, vermöge der vorher angeführten Kraft 3. JT zurücklegen könnte. Man ziehe PL und PM, verlängere beide bis l und m, wo sie die Ebene der Ekliptik schneiden; ferner ziehe man aus P das Perpendikel PH auf Tm. Da LM der Ebene der Ekliptik parallel ist, und daher die in dieser Ebene liegende Linie lm nicht schneiden kann; da ferner beide Linien ML und ml in derselben Ebene LMPml liegen: so müssen sie einander parallel und daher $\triangle$ LMP $\sim$ lmP sein. Nun liegt MPm in der Ebene der Bahn, in welcher sich der Mond in P bewegt, daher wird der Punkt m auf die Linie Nn fallen, welche durch die Knoten N,n dieser Bahn gezogen ist. Ferner würde die Kraft, welche die Beschreibung von $\frac{1}{2}$ LM bewirkt, in derselben Zeit die Beschreibung dieser ganzen Linie LM herbeiführen, wenn sie auf einmal im Orte P ganz angebracht wäre. Sie würde daher den Mond zwingen, sich auf dem zur Sehne LP gehörigen Bogen zu bewegen; der Mond würde daher aus der Ebene MPmT in die Ebene LPlT gebracht und die durch diese Kraft erzeugte Winkelbewegung der Knoten dem Winkel mTl gleich sein. Nun ist ml : mP = ML : MP, also, weil MP durch die Voraussetzung einer constanten Zeit gegeben ist, ml proportional dem Rechteck ML. mP, d. h. JT. mP.

Setzt man nun $\angle$ Tml = 90°, so wird $\angle$ mTl proportional $\frac{ml}{Tm}$ also auch proportional $\frac{JT.\ mP}{Tm}$; oder, was auf dasselbe hinauskommt (weil Tm : mP = TP: PH), der Winkel mTl proportional $\frac{JT\ .\ PH}{TP}$ oder JT . PH, weil TP gegeben ist.

Da aber der Winkel Tml oder STN nicht = 90° ist, so wird $\angle$ mTl kleiner und zwar im Verhältniss von sinSTN zum Radius oder dem AZ : AT.

Die Geschwindigkeit der Knoten wird demnach proportional JT . PH . AZ, oder dem Produkt sin TPJ . sinPTN . sin STN.

Befinden sich die Knoten in den Quadraturen und der Mond in

den Syzygien, so sind diese Winkel = 90°; alsdann liegt die kleine Linie ml in unendlicher Entfernung, und es wird ∠ mTl = mPl.

Im diesem Falle verhält sich der Winkel mPl zu ∠ PTM, welchen der Mond während derselben Zeit in seiner scheinbaren Bewegung um die Erde beschreibt, wie 1: 59,575

Der Winkel mPl ist nämlich = LPM, d. h. = dem Winkel, um welchen der Mond vom geradlinigen Wege abgebracht wird, und welcher in dieser gegebenen Zeit durch die Sonnenkraft 3.JT allein hervorgebracht werden würde, wenn der Mond aufhörte, schwer zu sein. Ferner ist PTM gleich dem Winkel, um welchen der Mond vom gradlinigem Wege durch diejenige Kraft allein, welche ihn in seiner Bahn erhält, abgebracht wird, indem man von der Sonnenkraft 3.JT abstrahirt. Diese Kräfte verhalten sich zu einander, nach dem oben Gesagten, wie 1: 59,575.

Da nun die stündliche mittlere Bewegung des Mondes, in Bezug auf die Fixsterne 32′ 56″,5 beträgt, so wird die stündliche Bewegung des Knotens in diesem Falle 33″,2.

In anderen Fällen wird sich die stündliche Bewegung der Knoten zur grössten 33″,2 verhalten, wie das Produkt sin TPJ . sin PTN . sin STN zum Cubus des Radius. Der Winkel TPJ bezeichnet den Abstand des Mondes von der Quadratur, PTN den Abstand des Mondes vom Knoten und STN den Abstand des Knotens von der Sonne.

So oft das Zeichen eines dieser Winkel vom Positiven zum Negativen, oder umgekehrt vom Negativen zum Positiven übergeht, wird die Bewegung der Knoten aus einer rückgängigen in eine rechtläufige und umgekehrt übergehen. Hiervon rührt es her, dass die Knoten allemal vorwärtsschreiten, wenn der Mond sich zwischen einer der Quadraturen und dem ihr am nächsten liegenden Knoten befindet. In den anderen Fällen gehen die Knoten rückwärts und vermöge des Ueberschusses der rückläufigen Bewegung über die rechtläufige, werden die Knoten in jedem Monat in rückläufiger Richtung fortbewegt.

Zusatz 1. Man fälle aus den Endpunkten P und M eines gege-

Fig. 195.

benen unendlich kleinen Bogens PM auf die, durch die Quadraturen Q und q gehende Linie Qq die Perpendikel PK und Mk und verlängere dieselben, bis sie die Knotenlinie Nn in D und d schneiden. Alsdann wird die stündliche Bewegung der Knoten, der Fläche MPDd und dem Quadrat der Linie AZ zusammen genommen, proportional sein.

Es seien PK, PH, AZ die drei Sinusse, von denen die Rede gewesen ist, nämlich PK der Sinus des Winkelabstandes des Mondes von der Quadratur, PH der Sinus seines Abstandes vom Knoten, AZ der Sinus des Abstandes des Knotens von der Sonne; alsdann ist die Geschwindigkeit des Knotens porportional.

1. PK . PH . AZ.

Nun ist aber PT : PK = PM : Kk, also, weil PT und PM gegeben sind,

2. PK proportional Kk

Ferner haben wir AT : PD = AZ : PH, also ist

3. PH proportional PD . AZ.

Mittelst 2. und 3. wird daher PK . PH . AZ proportional Kk . PD . AZ^2, d. h. der Fläche PDdM und AZ^2 zusammengenommen. W. z. b. w.

Zusatz 2. In einer beliebigen gegebenen Lage der Knoten verhält sich ihre mittlere stündliche Bewegung zur Hälfte der stündlichen Bewegung in den Syzygien des Mondes, d. h. zu 16",6, wie das Quadrat vom Sinus des Winkelabstandes der Knoten von den Syzygien zum Quadrat des Radius, oder wie $AZ^2 : AT^2$.

Durchläuft nämlich der Mond mit gleichförmiger Bewegung den Halbkreis QAq, so wird die Summe aller während der Zeit, wo der Mond von Q bis M gelangt, beschriebenen Flächen PDdM gleich sein der Fläche QMdE, welche durch die Tangente QE des Kreises begrenzt ist. Ferner wird die Summe aller PDdM, während der Mond bis n gelangt, der Fläche EQAn gleich sein, welche die Linie PD beschreibt. Geht hierauf der Mond weiter von n bis q, so fällt die Linie PD ausserhalb des Kreises und beschreibt die Fläche nqe, welche durch die Tangente eq des Kreises begrenzt ist. Diese Fläche wird, weil die Knoten anfangs rückwärts und hierauf vorwärts schreiten, von der ersteren Fläche abgezogen, und es wird, weil eqn = EQN, der Rest dem Halbkreise NQAn gleich. Die Summe aller Flächen PDdM, welche während der Zeit, wo der Mond einen Halbkreis durchläuft, beschrieben sind, wird also gleich der Fläche des Halbkreises. Die Summe aller derselben Flächen, welche während der Zeit beschrieben sind, wo der Mond den ganzen Kreis durchläuft, ist der Fläche des ganzen Kreises gleich.

Befindet sich aber der Mond in den Syzygien, so ist die Fläche PDdM gleich dem Rechteck unter dem Bogen PM und dem Radius PT. Die Summe aller ihr gleichen Flächen, welche in der Zeit beschrieben werden, während der Mond den Kreis durchläuft, ist gleich dem Rechteck über der ganzen Peripherie und dem Radius. Dieses Rechteck ist noch einmal so gross, als ein Kreis, also als das vorhergehende Rechteck.

Die Knoten würden also mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit, welche derjenigen gleich ist, die sie in den Syzygien haben, einen doppelt so grossen Raum beschreiben, als derjenige, welchen sie wirklich zurücklegen. Die mittlere gleichförmige Bewegung, womit die Knoten denselben Raum zurücklegen würden, den sie mit ungleichförmiger Bewegung wirklich durchlaufen, ist daher gleich der Hälfte derjenigen Bewegung, welche sie in den Syzygien des Mondes haben. Nun ist die grösste stündliche Bewegung, im Fall die Knoten sich in den Quadraturen befinden = 33″,2, und die mittlere stündliche Bewegung in diesem Falle = 16″,6.

Die stündliche Bewegung der Knoten ist aber stets dem Produkt $AZ^2 . PDdM$ proportional und dies ist auch noch der Fall, wenn sie in den Syzygien sind, oder auch in diesem Falle allein AZ^2, (weil alsdann die Fläche PDdM gegeben ist). Die mittlere stündliche Bewegung wird ebenfalls AZ^2 proportional und, im Fall die Knoten ausserhalb der Quadraturen liegen, sich zu 16″,6 verhalten, wie $AZ^2 : AT^2$. W. z. b. w.

§. 35. **Aufgabe.** Man soll die stündliche Bewegung der Mondknoten in einer elliptischen Bahn finden.

Qpmaq bezeichne eine Ellipse, Qq ihre grosse und ab ihre kleine Axe. QAqB sei ein umschriebener Kreis, T die im gemeinschaftlichen Mittelpunkte der Ellipse und des Kreises befindliche Erde, S die Sonne, p der auf der Ellipse sich bewegende Mond, pm der Bogen, welchen er in einem gegebenen unendlich kleinen Zeittheilchen beschreibt. Ferner sei Nn die Linie, welche die Knoten N und n verbindet, pK und mk Perpendikel, welche auf die Axe Qq gefällt und so weit verlängert sind, bis sie den Kreis in P und M, und die Knotenlinie in D und d schneiden. Wenn nun der Mond um die Erde der Zeit proportionale Flächen beschreibt, so wird die stündliche Bewegung des Knotens in der Ellipse der Fläche pDdm und AZ^2 zusammengenommen proportional sein.

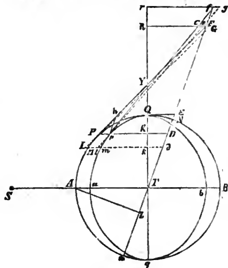


Fig. 196.

Um dies zu beweisen, ziehe man PF und pf, welche den Kreis und die Ellipse respective in P und p berühren und die Knotenlinie Nn in F und f, einander und die Axe TQ aber in Y schneiden. Es werde ML angenommen, um dadurch

den Weg zu bezeichnen, welchen der Mond, wenn er sich auf dem Kreise bewegte, in transversaler Richtung vermöge der Kraft 3JT oder 3 . PK, in der Zeit beschreiben könnte, während er den Bogen PM zurücklegt. Man nehme ferner ml als den Weg an, welchen der Mond bei seiner Bewegung auf der Ellipse, in derselben Zeit und vermöge derselben Kraft zurücklegen würde. Hierauf verlängere man LP und lp, bis sie die Ebene der Ekliptik in G und g schneiden und ziehe FG und fg, von denen die erstere, verlängert, die Linien pf, pg und TQ respective in c, e und R, die zweite die Linie TQ in r schneidet.

Es ist klar, dass die Kraft 3 . JT oder 3 . PK im Kreise sich zur Kraft 3 . JT oder 3 . pK in der Ellipse verhält, wie

$$1.\quad PK : pK \text{ oder wie } AT : aT.$$

Ferner verhält sich der, vermöge der ersteren Kraft beschriebene Weg ML zu dem, vermöge der letzteren Kraft beschriebenen Wege ml, wie PK : pk, d. h. weil PYKp $\sim$ FYRc,

$$2.\quad ML : ml = FR : cR.$$

Da aber $\triangle$ PLM $\sim$ PGF, so wird ML : FG = PL : PG d. h. ML : FG = pl : pe (weil Lk $\#$ PK $\#$ GR) ML : FG = lm : ce (weil $\triangle$ plm $\sim$ pce), und es wird mithin

$$3.\quad ML : ml = FR : cR = FG : ce.$$

Wenn demnach fg : ce = fY : cY = fr : cR, d. h. wenn fg : ce $= \left\{ \begin{matrix} fr : FR \\ FR : cR \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} ft : FT \\ FG : ce \end{matrix} \right\}$ so erhält man, indem man die letzte Proportion mit der identischen ce : FG = ce : FG verbindet,

$$4.\quad fg : FG = fT : FT.$$

Die Winkel an der Erde T, welche durch fg und FG unterspannt würden, wären also einander gleich. Diese Winkel sind aber nach dem, was wir im vorhergehenden Paragraphen gesehen haben, die Bewegungen der Knoten während der Zeit, wo der Mond die Bogen PM und pm respective auf dem Kreise und der Ellipse zurücklegt und daher die Bewegungen der Knoten auf beiden einander gleich.

Dies würde in der That so sein, wenn fg : ce = fY : cY also

$$5.\quad fg = \frac{ce\ .\ fY}{cY} \text{ wäre.}$$

Da aber $\triangle$ fgp $\sim$ cep, so hat man fg : ce = fp : cp also

$$6.\quad fg = \frac{ce\ .\ fp}{cp};$$

folglich wird der von fg unterspannte Winkel sich zu demjenigen verhalten, welchen FG unterspannt, d. h. es verhält sich die Bewegung der Knoten in der Ellipse zu der ihr im Kreise entsprechenden, wie das fg in 6. zu dem früheren in 5., oder wie

$$7.\quad \frac{ce\ .\ fp}{cp} : \frac{ce\ .\ fY}{cY} = fp\ .\ cY : fY\ .\ cp.$$ [251])

d. h. zusammengesetzt wie

$$8.\quad \left\{ \begin{matrix} fp : fY \\ \text{und}\quad cY : cp. \end{matrix} \right.$$

Zieht man nun ph ‡ TN, so geht das letzte zusammengesetzte Verhältniss 8. über in

9. (Fh : FY) (FY : FP) = Fh : FP = Dp : DP = Dpmd : DPMd.

Nach §. 34., Zusatz 1. steht nun die stündliche Bewegung der Knoten im Kreise im zusammengesetzten Verhältniss von AZ^2 und DPMd; mithin ist die stündliche Bewegung der Knoten in der Ellipse AZ^2 und Dpmd zusammengesetzt proportional. W. z. b. w.

Zusatz 1. Für eine gegebene Lage der Knoten wird die Summe aller Flächen pDdm, welche während der Zeit beschrieben sind, wo der Mond von der Quadratur bis zu einem beliebigen Punkte m fortgeht, gleich der Fläche mpQEd, welche durch die Tangente QE an der Ellipse begrenzt wird. Die Summe aller dieser, während eines ganzen Umlaufs des Mondes beschriebenen Flächen, wird der ganzen elliptischen Fläche gleich. Ferner verhält sich die mittlere Bewegung der Knoten auf der Ellipse zur entsprechenden auf dem Kreise, wie die Ellipse zum Kreise, d. h. wie Ta : TA, oder wie 69 : 70.

Da nun (nach §. 34., Zusatz 2.) die mittlere stündliche Bewegung der Knoten beim Kreise sich zu 16",6 verhält wie $AZ^2 : AT^2$, so nehme man 16",4 : 16",6 = 69 : 70, und es wird sich alsdann die mittlere stündliche Bewegung der Knoten auf der Ellipse zu 16",4 verhalten, wie $AZ^2 : AT^2$, d. h. wie das Quadrat vom Sinus des Winkelabstandes des Knotens von der Sonne zum Quadrat des Radius.

Uebrigens werden die vom Monde um die Erde beschriebenen Flächen schneller in den Syzygien, als in den Quadraturen durchlaufen, und die Zeit muss daher in den Sygygien kürzer, in den Quadraturen hingegen länger werden. Die Bewegung der Knoten wird aber dasselbe Gesetz beobachten. Nun verhält sich das Moment der Fläche in den Quadraturen des Mondes zum Moment in den Syzygien, wie 10973 : 11073 (§. 30.); folglich verhält sich das mittlere Moment in den Octanten zum Ueberschuss in den Syzygien und zum Mangel in den Quadraturen, wie die halbe Summe dieser Zahlen zu ihrer halben Differenz, d. h. wie 11023 : 50.

Die Zeit gleicher Theile der Mondbahn verhält sich aber umgekehrt, wie die Geschwindigkeit, und die mittlere Zeit in den Octanten verhält sich daher zum Ueberschuss der Zeiten in den Quadraturen und zum Mangel in den Syzygien, welche beide durch diese Ursache hervorgebracht werden, sehr nahe, wie 11023 : 50.[252])

Geht man von den Quadraturen zu den Syzygien fort, so finde ich, dass der Ueberschuss der Momente der Fläche in den einzelnen Orten über das kleinste Moment in den Quadraturen sehr nahe dem Quadrat vom Sinus des Winkelabstandes des Mondes von den Quadraturen proportional ist (§. 30., Bem.[242]). Folglich wird der Unterschied zwischen dem Moment an einem beliebigen Orte und dem mittleren Momente in den Octanten proportional sein dem Unterschiede zwischen dem Quadrate vom Sinus des Winkelabstandes von den Quadraturen und $\sin 45^{0\,2}$ =

$^1/_2$ Radius. Das Increment der Zeit in jedem, zwischen den Quadraturen und Octanten, und ihr Decrement in jedem, zwischen den Octanten und Syzygien gelegenen Orte, wird in demselben Verhältniss stehen. Die Bewegung der Knoten während der Zeit, wo der Mond einzelne gleiche Theile seiner Bahn zurücklegt, wird im doppelten Verhältniss der Zeit beschleunigt oder verzögert. Diese Bewegung ist nämlich, während der Mond den Bogen PM durchläuft (unter übrigens gleichen Umständen) ML, ML aber dem Quadrat der Zeit proportional.[253]) Daher wird die Bewegung der Knoten in den Syzygien während der Zeit, dass der Mond gegebene Theile seiner Bahn zurücklegt im Verhältniss $11073^2 : 11023^2$ vermindert. Ferner verhält sich das Decrement zur übrig bleibenden Bewegung wie 100 : 10973 und zur ganzen Bewegung wie 100 : 11073 beiläufig.[254])

Es steht nun das Decrement in den, zwischen den Octanten und Syzygien und das Increment in den, zwischen den Octanten und Quadraturen gelegenen Orten sehr nahe zu diesem Decrement in einem Verhältniss, welches aus dem Verhältniss der ganzen Bewegung in diesen Orten zur ganzen Bewegung in den Syzygien und aus dem Verhältniss zusammengesetzt ist, in welchem der Unterschied zwischen dem Quadrat vom Sinus des Winkelabstandes des Mondes von der Quadratur und dem halben Quadrat des Radius zum letzteren halben Quadrat steht.[255]) Befinden sich also die Knoten in den Quadraturen, und nimmt man zwei gleichweit von den Octanten abstehende Orte, und ausserdem zwei andere an, welche eben so weit von der Syzygie und Quadratur entfernt sind; zieht man hierauf von den Decrementen der Bewegungen in den beiden, zwischen der Syzygie und dem Octanten gelegenen Orten, die Incremente der Bewegungen in den beiden anderen, zwischen Octant und Quadratur gelegenen, Orten ab: so wird der Rest dem Decrement in der Syzygie gleich sein. Hiervon ist der Grund leicht einzusehen.[256]) Es ergibt sich demnach hieraus, dass das mittlere Decrement, welches von der mittleren Bewegung der Knoten abgezogen werden muss, dem vierten Theile des Decrementes in der Syzygie gleich ist. Die ganze stündliche Bewegung der Knoten in den Syzygien ist, unter der Voraussetzung, dass der Mond den Zeiten proportionale Flächen um die Erde beschreibe, nach dem früher Gefundenen = 32'',7. Ferner verhält sich das Decrement der Knotenbewegung während der Zeit, wo der Mond denselben Weg geschwinder zurücklegt, zu eben dieser Bewegung, wie 100 : 11073. Das Decrement ist daher $\frac{3270''}{11073} = 0'',3$ und zieht man dessen vierten Theil = 0'',1 von der früher gefundenen mittleren stündlichen Bewegung 16'',4 ab; so erhält man die verbesserte stündliche Bewegung = 16'',3.

Befinden sich die Knoten ausserhalb der Quadraturen und betrachtet man zwei, auf beiden Seiten gleichweit von den Syzygien abstehende Orte; so wird die Summe der Knotenbewegungen, wenn der Mond sich in diesen Orten befindet, zur entsprechenden Summe der Bewegungen

für den Fall, dass die Knoten in den Quadraturen liegen, sich verhalten, wie $AZ^2 : AT^2$. Ferner werden die, aus den eben besprochenen Ursachen hervorgehenden, Decremente der Bewegungen sich wie die letzteren verhalten, d. h. die übrig bleibenden Bewegungen verhalten sich zu einander, wie $AZ^2 : AT^2$ und die mittleren Bewegungen sind den übrig bleibenden proportional. Die verbesserte mittlere stündliche Bewegung, in einer beliebig gegebenen Lage der Knoten, verhält sich daher zu 16″,3, wie $AZ^2 : AT^2$, d. h. wie das Quadrat vom Sinus des Winkelabstandes der Knoten von den Syzygien zum Quadrat des Radius.

§. 36. Aufgabe. Man soll die mittlere jährliche Bewegung der Mondknoten finden.

Die mittlere jährliche Bewegung ist gleich der Summe aller mittleren stündlichen Bewegungen im Jahre. Man denke sich nun, dass der Knoten sich in N befinde und am Ende jeder Stunde an seinen ersten Ort zurückversetzt werde; so dass er, ungeachtet seiner eigenen Bewegung, immer dieselbe Lage in Bezug auf die Fixsterne beibehalte. Ferner setze man voraus, dass während dieser Zeit die Sonne S, vermöge der Bewegung der Erde, sich von diesem Knoten entferne und ihren jährlichen scheinbaren Umlauf gleichförmig vollende. Aa sei ein sehr kleiner gegebener Bogen, welchen die nach der Sonne gezogene Linie TS, in einer gegebenen sehr kleinen Zeit, auf dem Kreise NAn durchläuft. Die mittlere stündliche Bewegung wird alsdann nach dem, was wir oben gezeigt haben, AZ^2, d. h weil AZ und ZY einander proportional sind[257]) dem Rechteck AZ . ZY oder der Fläche AZYa proportional sein. Die Summe aller mittleren stündlichen Bewegungen vom Anfang an wird der Summe aller Flächen AZYa, d. h. der Fläche NAZ proportional sein. Nun ist die grösste Fläche AZYa gleich dem Rechteck unter dem Bogen Aa und dem Radius des Kreises, folglich wird sich die Summe aller Rechtecke im ganzen Kreise zur Summe eben so vieler grösster Rechtecke verhalten, wie die Fläche des ganzen Kreises zum Rechteck unter der ganzen Peripherie und dem Radius, d. h. wie 1 : 2.

Fig. 197.

Die stündliche Bewegung, welche dem grössten Rechtecke entspricht, war aber = 16″,3 gefunden worden, und ihre Summe für ein ganzes siderisches Jahr von $365^d\ 6^h\ 9^m$ wird daher = 39° 38′ 7″,8. Die Hälfte der letzteren, oder 19° 49′ 3″,9 ist die mittlere Bewegung der Knoten, welche dem ganzen Kreise entspricht. Ferner wird die Be-

wegung der Knoten, während die Sonne von N bis A fortschreitet, sich zu 19° 49′ 3″,9 verhalten, wie die Fläche NAZ zum ganzen Kreise.

Dies würde sich so unter der Voraussetzung verhalten, dass der Knoten nach jeder einzelnen Stunde an seinen früheren Ort zurückgebracht würde und dass die Sonne am Ende eines Jahres zu demselben Knoten zurückkehrte, von welchem sie beim Anfange desselben ausgegangen war. Da aber die Bewegung des Knotens bewirkt, dass die Sonne früher zu ihm zurückkehrt; so muss man berechnen, um wieviel die Zeit der Rückkehr hierdurch verkürzt wird.

Die Sonne legt im Jahre 360°, und der Knoten mit seiner grössten Geschwindigkeit in derselben Zeit 39° 38′ 7″,8 = 39°,6355 zurück; ferner verhält sich die mittlere Bewegung dieses Knotens in dem beliebigen Orte N zu seiner mittleren Bewegung in den Quadraturen, wie $AZ^2 : AT^2$. Die Bewegung der Sonne wird sich daher zur Bewegung des Knotens im Orte N verhalten, wie $360 . AT^2 : 39{,}6355 AZ^2 = 9{,}0827667 AT^2 : AZ^2$.[258])

Setzt man also voraus, dass die ganze Peripherie des Kreises NAn in kleine gleiche Theile Aa getheilt sei; so wird die Zeit, während welcher die Sonne den kleinen Theil Aa durchlaufen würde, im Fall der Kreis sich in Ruhe befände, zu der Zeit, in welcher sie denselben kleinen Theil durchlaufen würde, wenn der Kreis zugleich mit den Knoten sich um den Mittelpunkt T bewegte, sich umgekehrt verhalten wie $9{,}0827667 . AT^2 : 9{,}0827667 . AT^2 + AZ^2$.

Die Zeit verhält sich nämlich umgekehrt wie die Geschwindigkeit, mit welcher dieser kleine Theil durchlaufen wird und diese Geschwindigkeit ist der Summe der Geschwindigkeiten von Sonne und Knoten gleich. Es werde daher die Zeit, in welcher die Sonne, ohne die Bewegung des Knotens, den Bogen NA durchlaufen würde, durch den Sector NTA dargestellt. Ferner stelle der kleine Theil ATa dieses Sectors das kleine Zeittheilchen dar, während dessen der sehr kleine Bogen Aa durchlaufen werden würde. Man fälle aY perpendikulär auf Nn und nehme dZ auf Az so gross an, dass $dZ . ZY : ATa = AZ^2 : \alpha AT^2 + AZ^2$ ($\alpha = 9{,}0827667$) d. h. $dZ : \frac{1}{2}AZ = AT^2 : \alpha . AT^2 + AZ^2$; alsdann wird das Rechteck dZ . ZY das Decrement der Zeit darstellen, welches die Bewegung des Knotens während der ganzen Zeit, wo der Bogen Aa durchlaufen wird, hervorbringt. Ist ferner die Curve NdGn der Ort der Punkte d, so stellt die krummlinige Fläche NdZ das ganze Decrement während der Zeit, welche zur Durchlaufung des Bogens NA gebraucht wird, dar. Endlich ist der Ueberschuss des Sectors NAT über die Fläche NdZ diese ganze Zeit.[259]) Da nun die Bewegung des Knotens während einer kürzeren Zeit, im Verhältniss der letzteren kleiner ist; so muss die Fläche AaYZ in demselben Verhältniss verkleinert werden. Dies wird geschehen, indem man auf AZ die Linie eZ so annimmt, dass $eZ : AZ = AZ^2 : \alpha AT^2 + AZ^2$. Hiernach wird das Rechteck eZ . ZY sich zur Fläche AZYa verhalten, wie das Decrement der Zeit, welches zur Durchlaufung des Bogens Aa erforderlich war, zu der ganzen Zeit,

in welcher er bei ruhendem Knoten würde durchlaufen worden sein. Folglich wird dieses Rechteck dem Decrement der Bewegung des Knotens entsprechen. Ist nun die Curve NeFn der Ort der Punkte e, so wird die ganze Fläche NeZ, welche der Summe aller Decremente gleich ist, dem ganzen Decrement während der zur Durchlaufung des Bogens NA erforderlichen Zeit entsprechen. Die übrig bleibende Fläche NAe wird der übrig bleibenden Bewegung entsprechen, welche die wahre Bewegung des Knotens während der Zeit ist, wo der ganze Bogen NA durch die vereinigten Bewegungen der Sonne und der Knoten beschrieben wird.[260])

Wendet man nun die Methode der unendlichen Reihen an, so findet man, dass der Flächeninhalt des Halbkreises sich zu dem Inhalt der gesuchten Figur NeFn sehr nahe verhält, wie 793 : 60.[261])

Da nun die, dem ganzen Kreise entsprechende, Bewegung = 19° 49′ 3″,9 war, so wird die, dem Doppelten der Figur NeFn, entsprechende, Bewegung = 1° 29′ 58″,0.

Subtrahirt man diese von der ersten Bewegung, so erhält man 18° 19′ 5″,9 für die ganze Bewegung des Knotens, in Bezug auf die Fixsterne und zwischen zweien seiner Conjunctionen mit der Sonne. Subtrahirt man hierauf diese Bewegung von der jährlichen Bewegung der Sonne, welche = 360° ist; so ergiebt sich die Bewegung der letzteren zwischen denselben beiden Conjunctionen = 341° 40′ 54″,1. Diese verhält sich zur jährlichen Bewegung von 360°, wie die vorher = 18° 19′ 5″,9 gefundene Bewegung des Knotens zur jährlichen Bewegung des letzteren. Diese wird folglich = 19° 18′ 1″,4, und dies ist die mittlere Bewegung der Knoten in einem siderischen Jahre. Für dieselbe hat man nach den astronomischen Tafeln 19° 21′ 21″,8, und der Unterschied, welcher wahrscheinlich von der Excentricität der Mondbahn und ihrer Neigung gegen die Ebene der Ekliptik herrührt, beträgt weniger als $^1/_{300}$ der ganzen Bewegung.

Durch die Excentricität wird die Bewegung der Knoten etwas beschleunigt, durch die Neigung hingegen etwas verzögert, wodurch sie sehr nahe auf die richtige Grösse zurückkommt.

§. 37. Aufgabe. Man soll die wahre Bewegung der Mondsknoten finden.

Wird die Zeit durch die Fläche NTA — NdZ (Fig. 197.) ausgedrückt, so stellt die Fläche NAe die wahre Bewegung dar, welche man also durch Quadratur findet. Die Rechnung würde aber nach dieser Methode zu mühsam sein, und es ist daher besser, sich der folgenden Construction zu bedienen.

Aus dem Mittelpunkte C werde mit einem beliebigen Radius CD der Kreis BEFD beschrieben und CD so bis A verlängert, dass AB sich zu AC verhalte, wie die mittlere Bewegung zur Hälfte der wahren, wenn die Knoten sich in den Quadraturen befinden; also AB : AC = 19° 18′ 1″,4 : 19° 49′ 3″,9. Es wird daher hieraus BC : AC = 0° 31′ 2″,5 : 19°

Fig. 198.

49′ 3″,9 = 1 : 38,3. Hierauf ziehe man durch den Punkt D die unbestimmte Linie Gg, welche den Kreis in D berührt, und nehme den Winkel BCE oder BCF gleich dem doppelten Winkelabstande der Sonne von dem Knoten, welchen man durch die mittlere Bewegung findet. Endlich ziehe man AE oder AF, welche das Perpendikel DG in G schneiden, und nehme einen Winkel an, welcher sich zur ganzen Bewegung des Knotens zwischen seinen Syzygien (d. h. zu 9° 11′ 3″) verhält, wie die Tangente DG zur ganzen Peripherie des Kreises BED. Diesen Winkel (für welchen man den Winkel DAG annehmen kann) addire man zur mittleren Bewegung der Knoten, wenn sie von den Quadraturen zu den Syzygien, und subtrahire ihn von derselben, wenn sie von den Syzygien zu den Quadraturen übergehen und man wird ihre wahre Bewegung erhalten. Die so gefundene wahre Bewegung stimmt nämlich sehr nahe mit derjenigen überein, welche man erhalten würde, wenn man wie früher die Zeit durch die Fläche NTA — NdZ und die Bewegung des Knotens durch die Fläche NAe ausdrückte. Hiervon kann man sich durch Rechnung überzeugen.

Dies ist die halbjährige Bewegung der Knoten. Es gibt noch eine Gleichung dieser Bewegung für jeden Monat, allein man bedarf dieser **nicht** nothwendig, um die Breite des Mondes zu finden. Die Aenderung der Neigung der Mondsbahn gegen die Ekliptik unterliegt nämlich einer doppelten Ungleichheit, einer sechsmonatlichen und einer monatlichen. Die letztere und die Gleichung der Knoten für jeden Monat gleichen sich einander aus und verbessern sich gegenseitig so, dass man sie bei der Bestimmung der Breite des Mondes vernachlässigen kann.

Zusatz. Durch diesen und den vorhergehenden Paragraphen wird es klar, dass die Knoten in ihren Syzygien ruhen, dass sie in ihren Quadraturen mit einer stündlichen Bewegung von 16″,3 zurückgehen und dass die Gleichung der Bewegung in den Octanten 1° 30′ beträgt. Dies stimmt sehr gut mit den Erscheinungen am Himmel überein.

Anmerkung 1. J. Machin, Professor der Astronomie in Grasham und Heinrich Pemberton M. D, haben, jeder für sich, die Bewegung der Knoten nach einer, von der vorhergehenden verschiedenen,

Methode gefunden und dieselbe bekannt gemacht. Die Schrift von Dr. **Machin**, welche zuerst in meinen Besitz gekommen ist, werde ich hier hinzufügen.

Von der Bewegung der Mondsknoten.

Erster Satz. Die mittlere Bewegung der Sonne vom Knoten ab findet man, indem man die mittlere geometrische Proportionale zwischen der mittleren Bewegung der Sonne selbst und derjenigen mittleren Bewegung bestimmt, mit welcher sich die Sonne am geschwindesten vom Knoten in den Quadraturen entfernt.

Es sei T der Ort der Erde, Nn die Knotenlinie des Mondes zu einer beliebigen gegebenen Zeit, KTM eine hierauf perpendikulär gezogene Linie. Ferner sei TA eine Linie, welche sich um den Mittelpunkt mit derselben Winkelgeschwindigkeit dreht, mit welcher die Sonne und der Knoten sich von einander entfernen. Hiernach wird der, zwischen der ruhenden Linie Nn und der sich drehenden AT gebildete, Winkel immer dem Winkelabstande der Sonne vom Knoten gleich sein. Dies vorausgesetzt, theile man die beliebige Linie TK in solche zwei Theile TS und SK dass sie respective der mittleren stündlichen Bewegung der Sonne und der mittleren stündlichen Bewegung des Knotens in den Quadraturen proportional werden. Man nehme ferner

Fig. 199.

$$1.\quad TH = \sqrt{TS\,.\,TK};$$

alsdann wird TH der mittleren Bewegung der Sonne vom Knoten ab proportional.

Es werde aus dem Mittelpunkte T mit dem Radius TK der Kreis NKnM beschrieben. Zu demselben Mittelpunkt und den halben Axen TH und TN construire man hierauf die Ellipse HNLn. Wenn man sich nun während der Zeit, wo die Sonne sich vom Knoten um den beliebig grossen Bogen Na entfernt, eine Linie Tba denkt, welche stets durch den Endpunkt a dieses Bogens geht; so wird die Fläche des Sectors NTa die Summe der Bewegungen der Sonne und des Knotens während derselben Zeit darstellen. Es sei Aa der sehr kleine Bogen, welchen die Linie Tba auf diese Weise beschreibt, indem sie sich während eines gegebenen Zeittheilchens gleichförmig umdreht; alsdann wird der kleine Sector ATa der Summe der Geschwindigkeiten proportional sein, womit die Sonne und der Knoten sich während dieses Zeittheilchens

forthbewegen. Die Geschwindigkeit der Sonne ist fast gleichförmig, so dass ihre kleine Ungleichheit keine merkliche Aenderung in der mittleren Bewegung der Knoten hervorbringt. Der andere Theil dieser Summe, d. h. die Geschwindigkeit des Knotens in ihrer mittleren Grösse, nimmt mit der Entfernung von den Syzygien im doppelten Verhältniss des Sinus seines Winkelabstandes von der Sonne zu (nach §. 35., Zusatz des dritten Buches der Principien). Da sie nun am grössten in den Quadraturen mit der Sonne in K ist, so hat sie zur Geschwindigkeit der Sonne das Verhältniss wie SK : ST, d. h. wie $TK^2 - HT^2 : HT^2$ oder wie

$$2.\quad KH \,.\, HM : HT^2 \text{262.)}$$

Die Ellipse NBHn theilt aber den Sector ATa, welcher die Summe dieser beiden Geschwindigkeiten ausdrückt, in die zwei Theile ABha und BTb, welche eben diesen Geschwindigkeiten proportional sind. Man verlängere nämlich die Linie BT, bis sie den Kreis in β schneidet, ziehe hierauf durch B das Perpendikel BG auf die grosse Axe, welches beiderseits verlängert den Kreis in F und f schneiden wird und man sieht alsdann, dass

$$3.\quad ABha : BTh = AB \,.\, B\beta : BT^2$$

$$(\text{weil } AB \,.\, B\beta = (TA - TB)\,(TA + TB) = TA^2 - TB^2).$$

Dieses Verhältniss wird aber, wenn der Raum ABha der grösste in K ist, in $4.\quad HK \,.\, HM : TH^2$

übergehen; die grösste mittlere Geschwindigkeit des Knotens steht aber zur Geschwindigkeit der Sonne (nach 2.) in diesem Verhältniss. Der Sector ATa wird daher in den Quadraturen in zwei Theile zerlegt, welche den Geschwindigkeiten proportional sind.

Da nun $5.\quad KH \,.\, HM : HT^2 = FB \,.\, Bf : BG^2$ 263)

und $6.\quad AB \,.\, B\beta = FB \,.\, Bf;$

so wird die kleine Fläche ABha, wenn sie in K am grössten ist, sich zum übrig bleibenden Sector BTh verhalten, wie

$$7.\quad AB \,.\, B\beta : BG^2.$$

Das Verhältniss dieser kleinen Fläche zum übrig bleibenden Sector ist aber (nach 3) im allgemeinen $AB \,.\, B\beta : BT^2$; daher wird die Fläche ABba im Orte A kleiner, als die ihr in den Quadraturen entsprechende, im Verhältniss $8.\quad BG^2 : BT^2,$

d. h. im doppelten Verhältniss vom Sinus des Winkelabstandes zwischen Sonne und Knoten. Ferner wird die Summe aller kleinen Flächen ABha, d. h. die Fläche ABN der Bewegung des Knotens während der Zeit, wo die Sonne sich um den Bogen NA vom Knoten entfernt, proportional sein. Der übrig bleibende Raum, nämlich der elliptische Sector NTB ist der mittleren Bewegung der Sonne, während derselben Zeit, proportional. Da nun die mittlere jährliche Bewegung des Knotens diejenige ist, welche während der Zeit stattfindet, wo die Sonne ihren Umlauf vollendet; so wird die mittlere Bewegung des Knotens von der Sonne sich zur mittleren Bewegung der letzteren verhalten, wie die

Kreisfläche zur elliptischen, d. h. wie TK : TH, oder weil nach 1. $TH^2 = TS . TK$, wie 9. TH : TS.

Zweiter Satz. Die mittlere Bewegung der Mondsknoten ist gegeben; man soll ihre wahre Bewegung finden.

Es sei der Winkel A der Abstand der Sonne vom mittleren Orte des Knotens, oder die mittlere Bewegung der Sonne vom Knoten ab. Man nehme den Winkel B so an, dass man habe

10. tgB : tgA = TH : TK (Fig. 199.)

d. h. im halben Verhältniss der mittleren stündlichen Bewegung der Sonne zu ihrer mittleren stündlichen Bewegung von dem in den Quadraturen befindlichen Knoten ab.[264]) Alsdann wird der Winkel B der Abstand der Sonne vom wahren Orte des Knotens sein. Zieht man nämlich FT, so wird der Winkel FTN, nach dem Beweise des vorhergehenden Satzes, der Abstand der Sonne vom mittleren Orte des Knotens, der Winkel ATN ihr Abstand vom wahren Orte sein und

11. tgFTN : tgATN = TK : TH.

Zusatz. Der Winkel FTA ist also die Gleichnng der Mondknoten, und dor Sinus dieses Winkels, wenn er in den Octanten am grössten ist, verhält sich zum Radius, wie KH : TK + TH. In einem anderen beliebigen Orte A verhält sich der Sinus dieser Gleichung zum grössten Sinus, wie. sin (FTN + ATN) : Radius, d. h. fast wie

12. sin 2 FTN : Radius

oder wie der Sinus des doppelten Winkelabstandes der Sonne vom mittleren Orte des Knotens zum Radius.[265])

Anmerkung. Ist die mittlere stündliche Bewegung dor Knoten in den Quadratnren = 16'',3, d. h. in einem ganzen siderischen Jahre = 39° 38' 7'',8; so hat man TH : TK = $\sqrt{9{,}0827646} : \sqrt{10{,}0827646}$ = 18,6524761 : 19,6524761 ferner

13. TH : HK = 18,6524761 : 1

d. h. wie die Bewegung der Sonne in einem siderischen Jahre zur mittleren Bewegung des Knotens $= \frac{360^0}{18{,}6524761} = 19^0\ 18'\ 1'',4.$

Wenn aber die mittlere Bewegung der Mondsknoten in 20 Julianischen Jahren 386° 50' 15'' beträgt, wie man aus den in der Theorie des Mondes benutzten Beobachtungen findet; so wird die mittlere Bewegung derselben in einem siderischen Jahre = 19° 20' 32'',0 und wir haben 14. TH : HK = 360° : 19° 20' 32'',0 = 18,61214 : 1.

Hieraus erhält man die stündliche Bewegung der Knoten in den Quadraturen = 16'',3 und ihre grösste Gleichung in den Octanten = 1° 29' 57''.[266])

§. 38. Aufgabe. Man soll die stündliche Aenderung der Neigung der Mondbahn gegen die Ebene der Ekliptik bestimmen.

Es seien A und a die Syzygien, Q und q die Quadraturen, N und n die Knoten, P der Ort des Mondes in seiner Bahn, p die Projection dieses Ortes auf die Ebene der Ekliptik und mTl die augenblickliche Bewegung

der Knoten, wie oben. Man fälle auf die Linie Tm die Perpendikel PG, pG und verlängere dieses, bis es Tl in g schneidet und ziehe auch Pg. Der Winkel PGp wird die Neigung der Mondbahn gegen die Ebene der Ekliptik sein, wenn der Mond sich in P befindet, der Winkel Pgp dieselbe Neigung in dem nächstfolgenden Augenblick und daher der Winkel GPg die augenblickliche Aenderung der Neigung. Nun steht dieser Winkel GPg zum Winkel GTg in einem Verhältniss, welches aus den beiden einzelnen Verhältnissen GT : PG und Pp : PG zusammengesetzt ist.[267] Setzt man daher das Moment der Zeit gleich einer Stunde, also (nach §. 34.)

$$1.\quad GTg = 33'',2 \,.\, \frac{JT \,.\, AZ \,.\, PG}{AT^3},$$

so wird GPg, d. h. die stündliche Aenderung der Neigung, sich zu 33'',2 verhalten, wie

$$2.\quad JT \,.\, AZ \,.\, TG \frac{Pp}{PG} : AT^3.$$

Das oben Gesagte findet unter der Voraussetzung statt, dass der Mond sich gleichförmig in einer Kreisbahn bewege. Ist aber diese Bahn elliptisch, so wird die Bewegung der Knoten kleiner, im Verhältniss der kleinen Axe zur grossen, wie wir oben gezeigt haben. In demselben Verhältniss wird dann auch die Veränderung der Neigung kleiner werden.

Zusatz 1. Man errichte TF perpendikulär auf Nn und nehme pM als stündliche Bewegung des Mondes in der Ebene der Ekliptik an,

Fig. 200.

hierauf fälle man auf QT die Perpendikel pK und Mk und verlängere sie, bis sie TF in H und h schneiden.

Alsdann haben wir

$$3.\quad JT : AT = Kk : Mp$$

und

$$4.\quad TG : Hp = TZ : AT,$$

also $JT . TG = \frac{Kk . Hp . TZ}{Mp} = \frac{TZ}{Mp} . HpMh.$

Hiernach nnd nach Gl. 2. wird die stündliche Veränderung der Neigung sich zu 33",2 verhalten, wie

$$5.\quad AZ . \frac{TZ}{Mp} . \frac{Pp}{PG} . HpMh : AT^3.$$

Zusatz 2. Wenn daher die Erde und der Knoten am Ende jeder Stunde aus ihren neuen Orten entfernt und immer augenblicklich an ihre früheren Orte zurüchgebracht werden, dergestalt, dass ihre gegebene Lage während eines ganzen periodischen Monats unverändert bleibt; so wird die ganze Aenderung der Neigung während dieser Zeit sich zu 33",2 verhalten, wie das Produkt aus der Summe aller Flächen HpMh, welche während des Umlaufes des Punktes p beschrieben worden, in die Grösse $AZ . TZ . \frac{Pp}{PG}$ zu $Mp . AT^3$, d. h. wie

$$6.\quad AZ . TZ . \frac{Pp}{PG} \times \text{Kreis } QAqa : Mp . AT^3$$

oder was auf dasselbe hinauskommt, wie

$$7.\quad AZ . TZ . \frac{Pp}{PG} \times \text{Peripherie } QAqa : 2Mp . AT^2.$$

Zusatz 3. Bei einer gegebenen Lage der Knoten wird daher die mittlere stündliche Veränderung, welche, während eines Monats fortgesetzt, jene ganze monatliche Veränderung hervorbringen würde, sich zu 33",2 verhalten, wie $AZ . TZ . \frac{Pp}{PG} : 2 . AT^2$

$$8.\quad = Pp . \frac{AZ . TZ}{\frac{1}{2}\, AT} : PG . 4AT,$$

d. h. (weil $Pp : PG = \sin PGp : \text{Radius}$ und

$$9.\quad \frac{AZ . TZ}{\frac{1}{2} AT} : 4AT = \sin 2 . ATn : 4. \text{ Radius}),$$

wie das Produkt aus dem Sinus der Neigung in den Sinus des doppelten Winkelabstandes der Knoten von der Sonne zum vierfachen Quadrat des Radius.[268])

Zusatz 4. Die stündliche Veränderung der Neigung verhält sich, wenn die Knoten in den Quadraturen liegen, (nach diesem Paragraphen) zu 33",2, wie $JT . AZ . TG . \frac{Pp}{PG} : AT^3$, d. h. wie

$$10.\quad \frac{JT . TG}{\frac{1}{2}\, AT} . \frac{Pp}{PG} : 2AT$$ [269]),

oder wie der Sinus des doppelten Winkelstandes des Mondes von den Quadraturen, multiplicirt im $\frac{Pp}{PG}$, zum doppelten Radius. Die Summe aller stündlichen Bewegungen während der Zeit, wo der Mond bei dieser Lage der Knoten von der Quadratur zur Syzygie fortgeht (d. h. in der

Zeit von $177^1/_6$ Stunden), wird sich also zur Summe eben so vieler Winkel von 33",2, oder zu 5878" verhalten, wie die Summe aller Sinusse des doppelten Winkelabstandes des Mondes von den Quadraturen, multiplicirt in $\frac{Pp}{PG}$, zur Summe eben so vieler Durchmesser, d. h. wie der Durchmesser, multiplicirt in $\frac{Pp}{PG}$ zur Peripherie[270]). Dieses Verhältniss wird nun, wenn man die Neigung = 5^0 1' setzt, gleich dem $7 \cdot \frac{874}{10000} : 22 = 278 : 10000$.

Die ganze, aus der Summe aller stündlichen Bewegungen, welche während der eben besprochenen Zeit stattfinden, zusammengesetzte Veränderung ist also = 163" = 2' 43".

§. 39. Aufgabe. Man soll für eine gegebene Zeit die wahre Neigung der Mondbahn gegen die Ebene der Ekliptik finden.

Ist AD der Sinus der grössten und AB der Sinus der kleinsten

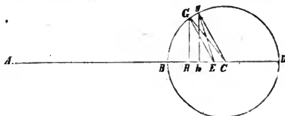


Fig. 201.

Neigung, so halbire man BD in C und schlage aus C mit BC einen Kreis BGD. Hierauf nehme man auf AC die Linie CE so an, dass

$$1. \quad CE : EB = EB : 2 . AB$$

sei, mache den Winkel AEG gleich dem doppelten Winkelabstande der Knoten von den Quadraturen zu der gegebenen Zeit. Fällt man hierauf das Perpendikel GH auf AD, so wird AH der Sinus der gesuchten Neigung sein.

Es ist nämlich $GE^2 = GH^2 + HE^2, = BH . HD + HE^2, = BH . BD + HE^2 - BH^2, = BH . BD + BE^2 - 2BH . BE, = BE^2 + 2EC . BH, = 2CE . AB + 2EC . BH$ (Gl. 1.), endlich

$$2. \quad GE^2 = 2 \, CE . AH.$$

Da nun 2CE gegeben ist, so wird GE^2 proportional AH. Stellt jetzt der Winkel AEg den doppelten Winkelabstand der Knoten von den Quadraturen, am Ende eines beliebigen gegebenen Momentes der Zeit dar; so wird der Bogen Gg, weil der Winkel GEg gegeben ist, dem Abstande GE proportional.

Ferner ist aber 3. Hh : Gg = GH : GC,

folglich wird Hh proportional GH . Gg oder GH . GE, d. h. $\frac{GH}{GE} \cdot GE^2$ oder $\frac{GH}{GE} \cdot AH$.

Hh steht also im zusammengesetzten Verhältniss von AH und dem Sinus des Winkels AEG. Wenn daher die Linie AH in irgend einem Falle dem Sinus der Neigung gleich ist, so wird sie um denselben Zuwachs wie dieser Sinus, nach §. 38., Zusatz 3., grösser und kleiner werden und ihm immer gleich bleiben.[271] Die Linie AH ist aber diesem Sinus gleich, wenn der Punkt G in B und D fällt; folglich wird sie ihm immer gleich bleiben. W. z. b. w.

Ich habe bei diesem Beweise vorausgesetzt, dass der Winkel BEG, welcher dem doppelten Abstande der Knoten von den Quadraturen gleich ist, gleichförmig wachse, weil es bei dieser Gelegenheit überflüssig sein würde, auf alle kleinen Ungleichheiten Rücksicht zu nehmen. Setzen wir nun voraus, dass der Winkel BEG = 90°, und dass in diesem Falle Gg die stündliche Zunahme des doppelten Abstandes der Knoten von der Sonne sei. Alsdann wird (nach §. 38., Zusatz 3.) die stündliche Aenderung der Neigung sich zu 33'',2 verhalten, wie das Produkt aus dem Sinus der Neigung AH und dem Sinus des rechten Winkels BEG, welcher dem doppelten Abstande der Knoten von der Sonne gleich ist, zum vierfachen Quadrat des Radius. Dieses Verhältniss wird nun (weil die mittlere Neigung ungefähr = 5° 8',5 ist)

4. 896 : 40000 = 224 : 10000.

Die ganze, dem Unterschiede BD der Sinusse entsprechende, Veränderung verhält sich aber zu dieser stündlichen Veränderung, wie der Durchmesser BD zum Bogen Gg, d. h. sie steht im zusammengesetzten Verhältniss des Durchmessers BD zur halben Peripherie BGD und der Zeit von 2079,7 Stunden, welche der Knoten braucht, um von den Quadraturen zu den Syzygien fortzugehen, zu 1 Stunde. Verbindet man diese Verhältnisse, so wird die ganze Veränderung BD : 33'',2 = 224 . 7 . 2079,7 : 110000 = 29645 : 1000 und

5. BD = 16' 23'',5.

Dies ist die grösste Veränderung der Neigung, so lange man auf den Ort des Mondes in seiner Bahn keine Rücksicht nimmt. Befinden sich nämlich die Knoten in den Syzygien, so ändert sich diese Neigung nicht durch die verschiedene Lage des Mondes; sind aber die Knoten in den Quadraturen, so ist die Neigung um 2' 43'' kleiner, wenn der Mond sich in den Syzygien, als wenn er sich in den Quadraturen befindet. Dies haben wir im §. 38., Zusatz 4, gezeigt. Nimmt man die Hälfte dieses Unterschiedes von 1' 21'',5 von obiger Grösse fort, so wird die ganze mittlere Veränderung BD in den Quadraturen des Mon-

des = 15′ 2″; addirt man jene Hälfte, so wird die ganze Veränderung in den Syzygien des Mondes = 17′ 45″.

Befindet sich daher der Mond in den Syzygien, so wird die ganze Veränderung beim Uebergange der Knoten von den Quadraturen zu den Syzygien = 17′ 45″.

Ist also die Neigung, im Fall die Knoten sich in den Syzygien befinden, = 5° 17′ 20″, so wird sie, wenn die Knoten sich in den Quadraturen und der Mond sich in den Syzygien befindet, = 4° 59′ 35″.

Dies wird durch die Beobachtungen bestätigt.

Will man hierauf die Neigung der Bahn für den Fall kennen lernen, dass der Mond sich in den Syzygien und die Knoten sich in einem beliebigen Orte befinden, so setze man

6. AB : AD = sin 4° 59′ 35″ : sin 5° 17′ 20″,

mache den Winkel AEG gleich dem doppelten Winkelabstande der Knoten von den Quadraturen, und es wird alsdann AH dem Sinus der gesuchten Neigung gleich sein. Die Neigung dieser Bahn ist für den Fall, dass der Mond um 90° von den Knoten entfernt ist, der eben bestimm ten gleich.

In anderen Orten des Mondes gleicht sich die Ungleichheit jedes Monats, welche in der Veränderung der Neigung stattfindet, bei der Berechnung der Breite des Mondes aus und wird gewissermassen durch die monatliche Ungleichheit der Bewegung der Knoten compensirt. Dies haben wir bereits oben bemerkt, und man kann daher jene bei der Berechnung der Breite vernachlässigen.

§. 40. Anmerkung. Ich habe durch diese Berechnung der Bewegungen des Mondes zeigen wollen, dass man sie mittelst der Theorie der Schwere aus ihren Ursachen ableiten könne. Nach derselben Theorie habe ich noch gefunden, dass die jährliche Gleichung in der mittleren Bewegung des Mondes aus der verschiedenen Ausdehnung seiner Bahn durch die Kraft der Sonne, nach §. 107., Zusatz 6. des ersten Buches, entspringt.

Diese Kraft ist nämlich grösser im Perigeum der Sonne und dehnt daher die Mondbahn aus; im Apogeum ist sie hingegen kleiner und gestattet, dass jene Bahn sich zusammenziehe. Nun bewegt sich der Mond langsamer in der ausgedehnten, und geschwinder in der zusammengezogenen Bahn. Die jährliche Gleichung, durch welche man diese Ungleichheit compensirt, ist Null im Apogeum und im Perigeum der Sonne, sie steigt im mittleren Abstande der Sonne von der Erde bis auf ungefähr 11′ 50″ und ist an anderen Orten der Mittelpunktsgleichung der Sonne proportional. Sie wird zur mittleren Bewegung des Mondes addirt, wenn die Erde von ihrem Aphel zum Perihel übergeht; im entgegengesetzten Theile der Bahn wird sie von ihr subtrahirt.

Setzt man den Radius der grossen Bahn = 1000, und die Excentricität der Erde = $16^7/_8$, so wird diese Gleichung, wenn sie ihren grössten Werth hat, nach der Theorie der Schwere = 11′ 49″.

Die Excentricität der Erde scheint aber etwas grösser zu sein, und vergrössert man sie, so muss diese Gleichung in demselben Verhältniss zunehmen. Setzt man daher die Excentricität $= 16^{11}/_{12}$, so wird die grösste Gleichung $= 11' \; 51''$.

Ich habe auch gefunden, dass im Perihel der Erde das Apogeum und die Knoten des Mondes, wegen der grösseren Kraft der Sonne, geschwinder als im Aphel fortgingen, und zwar im umgekehrten dreifachen Verhältniss des Abstandes der Erde von der Sonne. Hieraus schliesst man, dass die jährlichen Gleichungen dieser Bewegungen der Mittelpunktsgleichung der Sonne proportional sind. Nun steht die Bewegung der Sonne im umgekehrten doppelten Verhältniss des Abstandes der Erde von ihr, und es beträgt die grösste Mittelpunktsgleichung, welche durch diese Ungleichheit hervorgebracht wird, $1^0 \; 56' \; 20''$, was mit der oben erwähnten Excentricität von $0{,}016^{11}/_{12} = 0{,}016917$ übereinstimmt.

Stände die Bewegung der Sonne im umgekehrten dreifachen Verhältniss des Abstandes, so würde diese Ungleichheit $2^0 \; 54' \; 30''$[272]) als grösste Gleichung hervorbringen. Die grössten Gleichungen, welche durch die ungleichen Bewegungen des Apogeums und der Knoten des Mondes hervorgebracht werden, verhalten sich also zu $2^0 \; 54' \; 30''$, wie die mittlere tägliche Bewegung der zwei letzteren, zur mittleren täglichen Bewegung der Sonne.

Hieraus folgt, dass die grösste Gleichung der mittleren Bewegung des Apogeums $19' \; 43''$, die grösste Gleichung der mittleren Bewegung der Knoten $9' \; 24''$ beträgt.[273]) Die erstere ist additiv und die letztere subtractiv, wenn die Erde vom Perihel zum Aphel fortschreitet; das Gegentheil findet statt, wenn sie sich im entgegengesetzten Theile der Bahn befindet.

Durch die Theorie der Schwere ist es gewiss, dass die Wirkung der Sonne auf den Mond ein wenig stärker ist, wenn die grosse Axe der Mondbahn durch die Sonne geht, als wenn dieselbe auf die, die Sonne und Erde verbindende gerade Linie senkrecht ist; folglich wird die Mondbahn im ersten Falle etwas weiter sein, als im letzteren.[274]) Hieraus erhält man eine andere Gleichung der mittleren Bewegung des Mondes, welche von der Lage des Mond-Apogeums in Bezug auf die Sonne abhängt, und dieselbe hat ihren grössten Werth, wenn jenes Apogeum sich mit der Sonne im Octanten befindet; sie verschwindet hingegen, wenn dasselbe zu den Syzygien oder den Quadraturen gelangt. Sie wird zur mittleren Bewegung addirt, wenn das Mond-Apogeum von der Quadratur der Sonne zur Syzygie übergeht, im entgegengesetzten Falle wird sie subtrahirt. Diese Gleichung, welche ich die halbjährige nennen werde, steigt in den Octanten, wo sie am grössten ist, auf ungefähr $3' \; 45''$, so weit ich aus den Beobachtungen habe schliessen können. Dies ist ihr Werth in der mittleren Entfernung der Sonne von der Erde, sie muss aber im umgekehrten dreifachen Verhältniss jener Entfernung vermehrt oder vermindert werden, und beträgt daher in der

grössten Entfernung der Sonne sehr nahe 3′ 34″, hingegen in der kleinsten Entfernung 8′ 56″ [275]). Liegt das Apogeum des Mondes ausserhalb der Octanten, so wird diese Gleichung kleiner und verhält sich zur grössten, wie der Sinus des doppelten Winkel-Abstandes des Mond-Apogeums von der nächsten Syzygie oder Quadratur zum Radius.

Nach derselben Theorie der Schwere ist die Wirkung der Sonne auf den Mond ein wenig grösser, wenn die durch die Mondknoten gezogene Linie durch die Sonne geht, als wenn sie die, Sonne und Erde verbindende, Linie rechtwinkelig durchschneidet. Hieraus ergiebt sich eine andere Gleichung der mittleren Bewegung des Mondes, welche ich die zweite halbjährige nennen werde, und die am grössten ist, wenn die Knoten sich in den Octanten mit der Sonne befinden und verschwindet, wenn sie in den Quadraturen oder den Syzygien liegen. Für andere Lagen der Knoten ist sie dem Sinus des doppelten Winkelabstandes des einen oder anderen Knoten von der nächsten Syzygie oder Quadratur proportional. Sie wird zur mittleren Bewegung des Mondes addirt, wenn die Sonne rückläufig von dem ihr nächsten Knoten, hingegen subtrahirt, wenn diese rechtläufig absteht. In den Octanten, wo sie am grössten ist, steigt sie für die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde bis auf 47″, wie ich durch die Theorie der Schwere gefunden habe. Für andere Entfernungen der Sonne von der Erde ist diese, in den Octanten der Knoten grösste Gleichung dem Cubus der Entfernung umgekehrt proportional und steigt daher im Perigeum der Sonne auf 49″, wogegen sie im Apogeum nahe auf 45″ sinkt [276])

Nach der Theorie der Schwere geht das Apogeum des Mondes am stärksten vorwärts, wenn es mit der Sonne in Opposition oder Conjunction, und am stärksten rückwärts, wenn es mit ihr in Quadratur steht (§. 107., Zusatz 9., des ersten Buches) Im ersten Falle wird die Excentricität am grössten, im letzteren am kleinsten. Nach §. 107, Zusätze 7., 8. und 9. des ersten Buches, sind diese Ungleichheiten sehr gross und bringen die Hauptgleichung des Apogeums hervor, welche ich die halbjährige nennen werde. Die grösste halbjährige Gleichung beträgt ungefähr 12° 18′, so weit ich aus den Beobachtungen habe schliessen können. Horrox, unser Landsmann, war der erste, welcher den Satz aufstellte, dass der Mond sich in einer Ellipse um die Erde bewege, in deren unterem Brennpunkte sich die letztere befinde. Halley setzte den Mittelpunkt dieser Ellipse auf einen Epicykel, dessen Mittelpunkt sich gleichförmig um die Erde drehe. Aus dieser Bewegung auf dem Epicykel entspringen die Ungleichheiten beim Vor- und Rückwärtsschreiten des Apogeums, wovon wir gesprochen haben, so wie die Grösse der Excentricität.

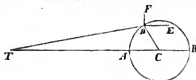


Fig. 202.

Setzen wir voraus, dass die

mittlere Entfernung des Mondes von der Erde = 100000, T die Erde und TC die mittlere Excentricität des Mondes = 5505 sei. Es werde TC so bis B verlängert, dass BC der Sinus der grössten halbjährigen Gleichung von 12° 18′ für den Radius TC sei; alsdann wird der aus C mit dem Radius CB beschriebene Kreis BDA dieser Epicykel sein, auf welchem der Mittelpunkt der Mondbahn sich befindet und seinen Umlauf in der Reihenfolge der Buchstaben B, D, A macht. Man nehme hierauf den Winkel BCD gleich dem doppelten jährlichen Argument, oder gleich dem doppelten Winkelabstande des wahren Sonnenortes vom einmal verbesserten Apogeum des Mondes; alsdann wird CTD die halbjährige Gleichung des Mond-Apogeums, und TD die Excentricität seiner Bahn, welche gegen das zum zweiten Mal verbesserte Apogeum gerichtet ist, darstellen. Hat man aber die Excentricität, die mittlere Bewegung und das Apogeum des Mondes, wie auch die grosse Axe seiner Bahn = 200000, so erhält man daraus, nach den gewöhnlichen Methoden, den wahren Ort des Mondes in seiner Bahn und seinen Abstand von der Erde.

Der Mittelpunkt der Mondbahn bewegt sich schneller um den Mittelpunkt C im Perihel der Erde, als in ihrem Aphel, wegen der grösseren Kraft der Sonne, und zwar im umgekehrten dreifachen Verhältniss des Abstandes der Erde von der Sonne. Wegen der, im jährlichen Argument mit einbegriffenen Mittelpunktsgleichung der Sonne, bewegt sich der Mittelpunkt der Mondbahn schneller auf dem Epicykel und zwar im umgekehrten doppelten Verhältniss des Abstandes der Erde von der Sonne. Damit derselbe sich noch geschwinder, im umgekehrten einfachen Verhältniss des Abstandes bewege, ziehe man aus dem Mittelpunkte D der Bahn die gerade Linie DE nach dem Apogeum des Mondes oder # TC und nehme den Winkel EDF gleich dem Ueberschusse des besprochenen jährlichen Arguments über den Winkelabstand des Mond-Apogeums vom Perigeum der Sonne, rechtläufig gezählt, oder was dasselbe ist, es sei der Winkel CDF gleich der Ergänzung der wahren Anomalie der Sonne zu 360°.[277]) Hierauf nehme man DF : DC im zusammengesetzten Verhältniss der doppelten Excentricität der grossen Bahn zum mittleren Abstande der Sonne von der Erde, und der mittleren täglichen Bewegung von ihrem eigenen Apogeum ab, d. h. DF : DC = $\left\{ \begin{matrix} 33\,{}^7/_8 : 1000 \\ 52'\ 27'',3 : 59'\ 8'',2 \end{matrix} \right.$ [278]), oder einfach DF : DC = 3 : 100.

Gesetzt, der Mittelpunkt der Mondbahn befinde sich im Punkte F und auf einem Epicykel, dessen Mittelpunkt D und dessen Radius DF sei; er vollende ferner seinen Umlauf, während der Punkt D auf der Peripherie DABD vorwärts geht. Auf diese Weise wird die Geschwindigkeit, mit welcher der Mittelpunkt der Mondbahn die um den Mittelpunkt C beschriebene Curve beschreibt, sehr nahe im umgekehrten Verhältniss

des Cubus des Abstandes der Sonne von der Erde stehen, wie dies der Fall sein muss.

Die Berechnung dieser Bewegung ist schwierig, man kann sie aber durch folgende Annäherung erleichtern. Man nehme den mittleren Abstand des Mondes von der Erde = 100000 und die Excentricität TC = 5505, wie oben an; die Linie CB oder DC wird 1172,73 und DF = 35,2 sein[279]). Diese Linie unterspannt im Abstande TC an der Erde denjenigen Winkel, welchen die Verlegung des Mittelpunktes der Bahn von D nach F in der Bewegung dieses Mittelpunktes hervorbringt. Verdoppelt man aber diese Linie in einer, der die Erde und den unteren Brennpunkt der Mondbahn verbindenden Linie, parallelen Richtung, so unterspannt sie denselben Winkel, und daher ist dieser demjenigen gleich, welchen diese Versetzung in der Bewegung des Brennpunktes hervorbringt. Im Abstande des Mondes von der Erde unterspannt sie ferner den Winkel, welchen eben diese Versetzung in der Bewegung des Mondes hervorbringt, so dass dieser Winkel die zweite Gleichung des Mittelpunktes genannt werden kann. Dieselbe ist im mittleren Abstande des Mondes von der Erde sehr nahe dem Sinus des Winkels proportional, welchen jene Linie DF mit der von F nach dem Monde gezogenen Linie bildet, und sie steigt, wenn sie am grössten ist, bis auf 2' 25"[280]) Den Winkel aber, welchen DF mit der, aus F nach dem Monde gezogenen Linie bildet, findet man, indem man den Winkel EDF von der mittleren Anomalie des Mondes subtrahirt, oder indem man den Winkelabstand des Mondes von der Sonne zum gegenseitigen Winkelabstande der Apogeen des Mondes und der Sonne addirt. Setzt man diesen Winkel = a, so ist die vierte Proportionale x in der Proportion Radius : sin a = 2' 25" : x der zweiten Mittelpunktsgleichung gleich, welche man addiren muss, wenn jener Winkel $<$ 180⁰ ist, hingegen subtrahiren, wenn er $>$ 180⁰ ist. Auf diese Weise wird man seine Länge in den Syzygien der Lichtgrenzen (luminarium) erhalten.

Da die Atmosphäre der Erde das Sonnenlicht bis zu einer Höhe von 35 bis 40 Meilen bricht, und es bei dieser Brechung um den Schatten der Erde verbreitet; da also das so an den Grenzen des Schattens verbreitete Licht diese Grenzen ausdehnt und erweitert: so addire ich 1 oder $1\frac{1}{3}$ Secunden zum Durchmesser des Schattens, welchen die Parallaxe des Mondes bei den Verfinsterungen des letzteren hervorbringt.[281])

Uebrigens muss die Theorie des Mondes durch die Erscheinungen geprüft und so bestätigt werden, und zwar zuerst in den Syzygien, hierauf in den Quadraturen und endlich in den Octanten. In dieser Absicht habe ich mit ziemlicher Genauigkeit die mittleren Bewegungen des Mondes und der Sonne im Meridian der Königlichen Sternwarte zu Greenwich beobachtet. Für den 31. Dec. 1700 alt. Styls fand ich den mittleren Ort der Sonne in 290⁰ 43' 20", ihr Apogeum in 97⁰ 44' 30", den mittleren Ort des Mondes in 315⁰ 21' 0", sein Apogeum in 338⁰ 20' 0" und seinen aufsteigenden Knoten in 147⁰ 24' 20" Länge.

Der Meridian-Unterschied zwischen der Greenwicher und Pariser Sternwarte beträgt 9^m 20^s (neu $20^s,9$); die mittlere Bewegung des Mondes von seinem Apogeum kennt man noch nicht hinreichend genau.

ABSCHNITT III.

Von der Grösse der Meeresfluth.

§. 41. Aufgabe. Man soll die Kraft finden, welche die Sonne auf die Bewegung des Meereswassers ausübt.

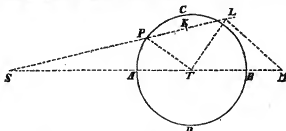


Fig. 203.

Wir haben in §. 29., dritten Buches gesehen, dass die Kraft ML oder PT der Sonne, welche störend auf die Bewegung des Mondes einwirkt, sich in den Quadraturen des letzteren zur Kraft der Schwere auf der Erde verhält, wie

1. 1 : 638092,6,

und dass die Kraft TM — ML oder 2PK in den Syzygien des Mondes doppelt so gross ist. Diese Kräfte würden nun, wenn man zur Oberfläche der Erde herabstiege, im Verhältniss der Abstände vom Mittelpunkte der letzteren, d. h. wie

2. 60,5 : 1

abnehmen. An der Oberfläche der Erde verhält sich daher die erste dieser Kräfte zur Kraft der Schwere, wie

3. 1 : 38604600.

Durch diese Kraft wird das Meer an den Orten herabgedrückt, welche im Winkel um 90° von der Sonne abstehen. Die andere Kraft, welche doppelt so gross ist, erhebt das Meer in den unter der Sonne gelegenen und den ihr entgegengesetzten Gegenden. Die Summe dieser Kräfte, oder 1 + 2 = 3, verhält sich also zur Schwere, wie

4. 3 : 38604600 = 1 : 12868200.

Da nun dieselbe Kraft dieselbe Bewegung bervorbringt, mag sie das Wasser in den um 90° von der Sonne entfernten Gegenden erniedrigen, oder in den unter der Sonne und ihr gegenüberliegenden Gegenden erheben; so wird diese Summe die ganze Kraft sein, womit die Sonne die Gewässer des Meeres in Bewegung setzt und sie wird dieselbe Wirkung hervorbringen, als wenn sie ganz dazu verwendet würde, das Meer in den unter der Sonne und ihr gegenüberliegenden Gegenden zu erhöhen und gar keine Wirknug in den nuter 90° von der Sonne abstehenden Gegenden hervorbrächte.

Dies ist die Kraft, womit die Sonne das Meer an einem gegebenen Orte bewegt, wenn sie sich im Zenith desselben und in ihrem mittleren Abstande von der Erde befindet. Für eine andere Lage der Sonne ist diese Kraft dem Sinus versus ihrer doppelten Höhe über dem Horizont direct und dem Cubus ihres Abstandes von der Erde indirect proportional.[282])

Zusatz. Die Centrifugalkraft der Theile der Erde, welche durch die tägliche Umdrehung der letzteren hervorgebracht wird und sich zur Kraft der Schwere wie 1 : 289 verhält, verursacht aber, dass die Höhe des Wassers unter dem Aequator seine Höhe am Pole um 85472 Par. Fuss übertrifft, wie wir oben im §. 23. dieses Buches gesehen haben. Es ist daher klar, dass die Kraft der Sonne, wovon hier die Rede ist und welche sich zur Kraft der Schwere wie 1 : 12868200 (Gl. 4.) also zur Centrifugalkraft wie

5. 289 : 12868200 = 1 : 44527

verhält, bewirken wird, dass die Höhe des Wassers in den unter der Sonne und ihr gegenüberliegenden Gegenden, die Höhe in den um 90° von der Sonne abstehenden Gegenden um 1 Fuss $11^1/_{30}$ Zoll Par. Maass übertreffen wird, indem

6. 1 Fuss $11^1/_{30}$ Zoll : 85472 Fuss = 1 : 44527.

§. 42. Aufgabe. Man soll die Kraft finden, womit der Mond die Gewässer des Meeres bewegt.

Die Kraft des Mondes zur Bewegung des Meeres ergibt sich aus ihrem Verhältniss zur Kraft der Sonne, und man kann dieses Verhältniss aus dem der Bewegungen des Meeres, welche durch diese beiden Kräfte hervorgebracht werden, ableiten.

Vor der Mündung des Flusses Avon unterhalb Bristol, am dritten Steine beträgt die ganze Erhebung des Wassers im Frühjahr und Herbst, um die Zeit der Conjunction und der Opposition von Sonne und Mond, ungefähr 45 Fuss, wie Samuel Sturm beobachtet hat; zur Zeit der Quadratur nur 25 Fuss. Die erste Höhe entspringt aus der Summe beider Kräfte, die letzte aus ihrem Unterschiede. Nennen wir daher die Kräfte der Sonne und des Mondes, wenn sie sich im Aequator und in ihrem mittleren Abstande von der Erde befinden, respective S und L; so hat man 1. L + S : L — S = 45 : 25 = 9 : 5.

Im Hafen von Plymouth hat Samuel Colepress beobachtet,

dass die Fluth in ihrer mittleren Höhe auf etwa 16 Fuss ansteigt, und dass im Frühjahr und Herbst die Höhe in den Syzygien die in den Quadraturen stattfindende Höhe um mehr als 7 oder 8 Fuss übertreffen kann. Nimmt man also 9 Fuss als grössten Unterschied dieser Höhen an, so wird 2. $L + S : L - S = 20^1/_2 : 11^1/_2 = 41 : 23$,
welches Verhältniss dem obigen ziemlich nahe kommt. Die Grösse der Fluth im Hafen von Bristol scheint Sturm's Beobachtungen grösseres Vertrauen zu verleihen, und bis man etwas Gewisseres gefunden haben wird, wollen wir uns des Verhältnisses 9 : 5 bedienen.

Uebrigens treffen, in Folge der wechselseitigen Bewegungen der Gewässer, die grössten Fluthen nicht genau in den Syzygien der Sonne und des Mondes ein, sondern erst die dritten Fluthen nach den Syzygien sind die grössten, wie bereits gesagt worden ist. Die grössten Fluthen folgen also nahe auf den dritten Durchgang des Mondes durch den Meridian des Ortes nach den Syzygien; oder auch (wie Sturm bemerkt) sie sind die dritten nach dem Tage des Neu- oder Vollmondes, wie auch etwas mehr oder weniger nach der 12. Stunde seit dem Neu- oder Vollmonde. Die grössten Fluthen stellen sich daher nahe in der 43. Stunde nach den Syzygien ein. Sie treten in diesem Hafen etwa um die 7. Stunde nach dem Durchgange des Mondes durch den Meridian ein; sie folgen also am nächsten auf diesen Durchgang, wenn der Mond von der Sonne, oder der Opposition mit der letzteren rechtläufig um beiläufig 18° oder 19° entfernt ist.[283]) Wie der Sommer und Winter ihre grösste Macht nicht in den Solstitien selbst, sondern erst dann haben, wenn die Sonne um $^1/_{10}$ des Kreises oder um etwa 36° bis 37° entfernt ist, eben so tritt die grösste Fluth des Meeres nach dem Durchgange des Mondes durch den Meridian des Ortes ein, wenn der Mond von der Sonne um $^1/_{10}$ des ganzen Zwischenraumes zweier auf einander folgenden Fluthen entfernt ist. Gesetzt, dieser Abstand betrage etwa $18^1/_2{}^0$, alsdann wird die Kraft der Sonne in diesem Abstande des Mondes von den Syzygien und Quadraturen geringere Wirkung in Bezug auf die Vergrösserung oder Verkleinerung der durch den Mond hervorgebrachten Bewegung des Meeres ausüben, als in den Syzygien und Quadraturen, und zwar im Verhältniss des Radius zum Cosinus des doppelten Winkelabstandes, oder zum cos 37°, d. h. wie 10000000 : 7986355. In der Proportion 1. hat man also 0,7986355 S statt S zu setzen.

Man muss aber auch die Kraft des Mondes in den Quadraturen wegen seiner Abweichung vom Aequator, vermindern. Die letztere beträgt nämlich in den Quadraturen oder vielmehr im Winkelabstande 18°,5 von den Quadraturen etwa 22° 13'.[284])

Die Kraft eines Gestirns wird aber geringer, in Bezug auf die Bewegung des Meeres, wenn sich dasselbe vom Aequator entfernt, und zwar nahebei im doppelten Verhältniss des Cosinus seiner Declination. Die Proportion 1. geht demnach über in

3. $L + 0{,}7986355\,S : 0{,}8570327\,L - 0{,}7986355\,S = 9 : 5.$

Ferner verhalten sich die Axen der Bahn, in welcher der Mond seinen Umlauf ohne Excentricität machen müsste, zu einander wie 69 : 70 (§. 32. dieses Buches).

Der Abstand des Mondes von der Erde in den Syzygien verhält sich daher, unter übrigens gleichen Umständen, zu seinem Abstande in den Quadraturen, wie 69 : 70, und sein Abstand in $18^0{,}5$ nach den Syzygien, wo die Fluth am grössten ist, so wie in $18^0{,}5$ nach den Quadraturen, wo sie am kleinsten ist, verhält sich zum mittleren Abstande wie respective 4. 69,098747 : 69,5 und 69,897345 : 69,5.[285]

Die Kräfte des Mondes zur Bewegung des Meeres stehen aber im umgekehrten dreifachen Verhältnisse der Abstände, und es verhalten sich die Kräfte im grössten und kleinsten Abstande, zu der im mittleren Abstande, wie

5. 0,9830427 : 1 und 1,017521 : 1.[286]

Hiernach geht die Proportion 3. in folgende über

6. $1{,}017522\,L + 0{,}7986355\,S : 0{,}9830427 \,.\, 0{,}8570327\,L = 9 : 5$

woraus einfach 7. $S : L = 1 : 4{,}4815$

hervorgeht Da nun die Kraft der Sonne S sich zur Schwerkraft Σ wie

8. $S : \Sigma = 1 : 12868200$ (§. 41. Gl 4.)

verhält, so wird 9. $L : \Sigma = 1 : 2871400.$

Zusatz 1. Da das Wasser, vermöge der Einwirkung der Sonne, zu einer Höhe von 1 Fuss $11^1/_{80}$ Zoll ansteigt (§. 41.), so wird es sich in Folge der Einwirkung des Mondes zu einer Höhe von 8 Fuss $7^5/_{22}$ Zoll, und vermöge der vereinten Wirkungen beider Gestirne bis auf 10,5 Fuss erheben. Befindet sich der Mond zugleich in seinem Perigeum, so steigt das Wasser zu einer Höhe von 12,5 Fuss, oder noch höher, besonders wenn die Fluth durch die gerade herrschenden Winde unterstützt wird. Eine so grosse Kraft reicht aber überflüssig hin, um alle Bewegungen des Meeres hervorzubringen, und sie entspricht hinreichend genau der Beobachtung. In den Meeren nämlich, welche eine grosse Breite von Osten gegen Westen haben, wie im Stillen Meere und den, ausserhalb der Wendekreise gelegenen, Theilen des Atlantischen und Aethiopischen Oceans steigt das Wasser gewöhnlich zu einer Höhe von 6, 9, 12 oder 15 Fuss an. Uebrigens behauptet man, dass im Stillen Meere, welches tiefer und breiter als das Atlantische und Aethiopische ist, die Fluthen noch grösser ausfallen. In der That darf, damit die Fluth vollständig werde, die Breite des Meeres von Osten gegen Westen nicht geringer als 90^0 sein. Im Aethiopischen Meere ist die Erhebung des Wassers innerhalb der Wendekreise geringer, als in den gemässigten Zonen, wegen der geringeren Breite des ersteren zwischen Afrika und Süd-Amerika. Das Wasser kann in der Mitte des Meeres nicht steigen, ohne dass es zugleich an der östlichen und westlichen Küste sinkt; da es doch in unseren engeren Meeren an jenen Küsten wechselseitig sinken müsste. Aus diesem Grunde ist die Ebbe

und Fluth sehr gering an denjenigen Inseln, welche vom Festlande sehr entfernt liegen. In gewissen Häfen, wo das Wasser ungestüm ankommt, nachdem es vielen Sandbänken begegnet ist, und wo es hin- nnd herfliessen muss, nm wechselweise den Meerbusen zu leeren nnd zu füllen, muss Ebbe nnd Fluth grösser als gewöhnlich sein. z. B. in Plymouth und an der Brücke von Chepstowe in England, am Berge St. Michel und zu Avranches in der Normandie, zu Cambaia und Pegu in Ostindien. An diesen Orten kommt und geht das Meer mit einer grossen Geschwindigkeit; es überschwemmt bald das Ufer mehrere Meilen weit, bald lässt es dasselbe wieder eben so weit trocken. Der Stoss des Wassers, wenn es ankommt und sich zurückzieht, hört erst auf, wenn es 30, 40 oder 50 Fuss nnd mehr gestiegen oder gesnnken ist. Dasselbe findet in langen und solchen Meerengen statt, welche voll von Sandbänken sind, wie in der Magellanstrasse und den England umgebenden Meeren. Die Fluth wird in diesen Häfen und Meeren bedentend grösser durch die Gewalt, mit welcher das Wasser ankommt und sich zurückzieht. An solchen Küsten aber, welche plötzlich znm breiten und offenen Meere abstürzen nnd wo das Wasser steigen und sinken kann, ohne mit Heftigkeit vor- und rückwärts zu gehen, entspricht die Grösse der Fluth den Kräften der Sonne nnd des Mondes.

Zusatz 2. Da die Kraft des Mondes zur Bewegung des Meeres sich zur Schwerkraft wie 1 : 2871400 verhält, so ist es klar, dass erstere viel zu klein sein muss, um bei Pendelversuchen und anderen, in der Statik und Hydrostatik anzustellenden Versuchen bemerkt werden zu können. Diese Kraft des Mondes hat nur bei der Fluth eine bemerkbare Wirkung.

Zusatz 3. Die Kraft des Mondes zur Bewegung des Meeres verhält sich zur ähnlichen Kraft der Sonne wie 4,4815 : 1, und diese Kräfte stehen (nach §. 107, Zusatz 14. des ersten Buches) im zusammengesetzten Verhältniss der Dichtigkeiten beider Himmelskörper und der Cuben ihrer scheinbaren Durchmesser. Die Dichtigkeit des Mondes muss sich also zur Dichtigkeit der Sonne verhalten direct wie 4,4815 : 1, und indirect wie der Cubus des Monddurchmessers znm Cubus des Sonnendurchmessers, d. h. (weil der mittlere scheinbare Durchmesser beider resp. 31′16,″5 und 32′ 12″ sind) wie $4{,}4815 . \frac{(32' \ 12'')^3}{(31' \ 16{,}''5)^3} : 1$ oder wie 4891 : 1000.

Nnn verhält sich die Dichtigkeit der Sonne zur Dichtigkeit der Erde wie 1000 : 4000, also die Dichtigkeit des Mondes zur Dichtigkeit der Erde wie 4891 : 4000, oder wie 11 : 9 Die Mondkugel ist also dichter nnd hat mehr festes Land, als unsere Erde.[287])

Zusatz 4. Da nach den astronomischen Beobachtungen der wahre Durchmesser des Mondes sich zu dem der Erde wie 100 : 365 verhält, so verhält sich die Masse des Mondes zur Masse der Erde wie 1 : 39,788.[288])

Zusatz 5. Die beschleunigende Schwerkraft des Mondes ist fast dreimal geringer, als die an der Oberfläche der Erde. 289)

Zusatz 6. Der Abstand des Mittelpunktes des Mondes vom Mittelpunkte der Erde verhält sich zum Abstande des erstern vom gemeinschaftlichen Schwerpunkte beider Körper wie 40,788 : 39,788. 290)

Zusatz 7. Der mittlere Abstand des Mittelpunktes des Mondes vom Mittelpunkt der Erde ist in den Octanten des ersteren sehr nahe = 60,4 Halbmessern der Erde. Man hat nun die halbe grosse Axe der Erde = 19658600 Pariser Fuss gefunden; mithin wird der mittlere gegenseitige Abstand der Mittelpunkte beider Körper = 1187379440 Fuss. Dieser Abstand verhält sich (nach Zusatz 6.) zur Entfernung des Mond-Mittelpunktes vom gemeinschaftlichen Schwerpunkte beider Himmelskörper wie 40,788 : 39,788; mithin wird die letztere Entfernung = 1158268534 Fuss. Da nun der Mond seinen siderischen Umlauf in $27^d\ 7^h\ 43,^m8$ zurücklegt, so ist der Sinus versus des Winkels, welchen er in einer Minute zurücklegt, = 12752341 Fuss für den Radius = 1000 Billionen, und = 14,7706353 Fuss für den Radius = 1158268534 Fuss. Fällt daher der Mond gegen die Erde vermöge derselben Kraft, welche ihn in seiner Bahn erhält, so wird er in 1 Minute 14,7706353 Fuss zurücklegen. Vergrössert man diese Kraft im Verhältniss $178\frac{29}{40} : 177\frac{29}{40}$, so erhält man (nach §. 3, Zusatz) die ganze Kraft der Schwere in der Mondbahn, und der, vermöge dieser Kraft fallende, Mond wird in einer Minute den Weg 14,8538067 Fuss zurücklegen. In $^1/_{60}$ der Entfernung des Mondes von der Erde, d. h. im Abstande von 19789657 Fuss, wird ein fallender Körper auch in 1 Secunde einen Weg von 14,8538067 Fuss durchlaufen. Im Abstande von 19615800 Fuss, d. h. in einer dem mittleren Halbmesser der Erde gleichen Entfernung, wird er beim Falle in 1 Secunde einen Weg von 15,11175 Fuss = 15 Fuss 1 Zoll $4^1/_{11}$ Linie zurücklegen. Dies ist die Grösse des Falles schwerer Körper in einer Breite von 45°. Nach der Tabelle, welche wir in §. 24. gegeben haben, wird die Grösse dieses Falles in der Breite von Paris um etwa $^2/_3$ Linie zu vergrössern sein. Nach dieser Rechnung würden also schwere Körper, welche im leeren Raume und in der Breite von Paris herabfielen, während 1 Secunde einen Weg von ungefähr 15 Fuss 1 Zoll $4^{25}/_{33}$ Linie zurücklegen. Subtrahirt man von der Schwere die Centrifugalkraft, welche durch die tägliche Umdrehung der Erde in dieser Breite hervorgebracht wird, so würden die dort fallenden schweren Körper während 1 Secunde einen Weg von 15 Fuss 1 Zoll 1,5 Linie zurücklegen. Wir haben in §§ 4. und 23. gesehen, dass schwere Körper in der Breite von Paris wirklich diesen Weg während 1 Secunde zurücklegen.

Zusatz 8. Der mittlere gegenseitige Abstand der Mittelpunkte des Mondes und der Erde ist in den Syzygien des ersteren gleich $59^{29}/_{30}$ und in den Quadraturen $60^5/_6$ halben grossen Axen der Erde. Diese

beiden Abstände verhalten sich nämlich (nach §. 32.) zu dem mittleren Abstande des Mondes in den Octanten, wie 69 : 69,5 und wie 70 : 69,5.291)

Zusatz 9. Der mittlere Abstand beider Mittelpunkte von einander ist in den Syzygien des Mondes = 60,1, in seinen Quadraturen = $60^{29}/_{30}$ mittleren Halbmessern der Erde.

Zusatz 10. In den Syzygien des Mondes hat man für seine mittlere Horizontalparallaxe folgende Werthe:

In der Breite	Mittlere Horizontalparallaxe
0°	57′ 20″
30	16
38	14
45	12
52	10
60	8
90	4

Bei diesen Rechnungen habe ich auf die magnetische Anziehungskraft der Erde, deren Grösse sehr klein und unbekannt ist, keine Rücksicht genommen. Wenn man aber einst dahin gelangen sollte, dieselbe zu erforschen, und wenn die Gradmessungen im Meridiane, die Längen isochronischer Pendel in verschiedenen Breiten, die Gesetze der Bewegungen des Meeres, die Parallaxe des Mondes und die scheinbaren Durchmesser der Sonne und des Mondes durch Beobachtungen genauer bestimmt sein werden; kann man diese ganze Rechnung genauer wiederholen.

§. 43. Aufgabe. Man soll die Gestalt des Mondes finden.

Wäre der Mond flüssig, wie unser Meer, so würde die Kraft, mit welcher die Erde die ihr am nächsten und am entferntesten liegenden Theile jener Flüssigkeit anzöge, sich zu derjenigen Kraft, womit der Mond die ihm am nächsten und am fernsten liegenden Theile unseres Meeres anzieht, zusammengesetzt wie die beschleunigende Schwerkraft des Mondes gegen die Erde, zur beschleunigenden Schwerkraft der letzteren gegen den ersteren und wie der Durchmesser des Mondes zu dem der Erde verhalten, d. h. wie 39,788 . 100 : 1 . 365 = 1081 : 100.292) Da nun die Kraft des Mondes unser Meer zu einer Höhe von 8,6 Fuss erhebt (§. 42, Zusatz 1.), so würde die Flüssigkeit des Mondes durch die Kraft der Erde zu einer Höhe von 93 Fuss erhoben werden. Aus diesem Grunde müsste die Gestalt des Mondes die eines Sphäroides sein, dessen verlängerte grosse Axe durch den Mittelpunkt der Erde ginge, und die andere auf sie perpendikuläre Axe um 186 Fuss überträfe. Der Mond hat also diese Gestalt, und muss sie von Anfang an gehabt haben.

Zusatz. Eine Folge hiervon ist, dass der Mond der Erde stets dieselbe Seite zuwendet, indem er in keiner andern Lage sich in Ruhe befinden kann, sondern stets oscillirend zu ihr zurückkehren muss. Indessen erfolgen diese Schwingungen sehr langsam, weil die Kräfte, durch welche sie hervorgebracht werden, sehr klein sind, dergestalt dass dieser

Theil des Mondes, welcher immer gegen die Erde gerichtet sein sollte, auf den andern Brennpunkt der Mondbahn zurückblicken muss (respicere), aus dem in §. 21. angeführten Grunde, und nicht sogleich davon abgezogen und gegen die Erde zurückgeführt werden kann.

ABSCHNITT IV.
Von der Präcession der Aequinoctien.

§. 44. Lehnsatz. Es stelle APEp die gleichförmig dichte Erde, C ihren Mittelpunkt, AE den Aequator, P und p ihre Pole vor. Ferner sei Pape die zum Mittelpunkte C und mit dem Radius CP eingeschriebene Kugel, QR stelle eine Ebene vor, welche durch die, vom Mittelpunkte der Sonne nach dem Mittelpunkte der Erde gezogene, gerade Linie perpendikulär geschnitten wird. Endlich wollen wir voraussetzen, dass alle einzelnen Theilchen, welche den ausserhalb der Kugel befindlichen Theil der Erde bilden, das Bestreben haben, sich beiderseits von der Ebene QR mit einer Kraft zu entfernen, die ihrem Abstande von dieser Ebene proportional ist. Alsdann werden zuerst alle Theilchen, welche sich in der Ebene des Aequators AE befinden, und gleichförmig um die Kugel in Form eines Ringes geordnet sind, zum Behuf der Drehung der Erde um ihren Mittelpunkt eine Kraft besitzen, welche sich zu derjenigen Kraft, die alle diese Theilchen auf die kreisförmige Drehung der Erde ausüben würden, wenn sie am weitesten von der Ebene QR auf dem Aequator befindlich wären, wie 1 : 2 verhält. Es wird ferner diese kreisförmige Bewegung um eine Axe erfolgen, welche im Durchschnitt des Aequators und der Ebene QR liegt.

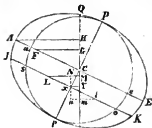


Fig. 204.

Man beschreibe nämlich aus dem Mittelpunkte K mit dem Radius KL den Halbkreis JNL, denke sich den letzteren in unzählige kleine Stücke getheilt und aus jedem der Theile N den Sinus NM auf den Durchmesser JL gefällt. Alsdann wird die Summe der Quadrate aller Sinusse NM gleich der Summe der Quadrate aller Sinusse KM und jede dieser Summen gleich der halben Summe der Quadrate eben so vieler Halbmesser KL sein 293).

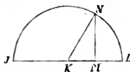


Fig. 205.

Man theile nun die Peripherie des zu denkenden Kreises AE in eben soviel gleiche Theile, und fälle aus jedem dieser Theilchen F ein Perpendikel FG auf die Ebene QR, so wie vom Punkte A das Perpendikel AH. Die Kraft, womit das Theilchen F sich von der Ebene QR entfernt, ist nach der Voraussetzung dem Perpendikel FG proportional, und multiplicirt man diese Kraft durch den Abstand CG, so wird das Produkt die Wirksamkeit des Theilchens F, in Bezug auf die Drehung der Erde um ihren Mittelpunkt, ausdrücken. Es verhält sich daher die Wirksamkeit eines Theilchens im Orte F zu der eines Theilchens in A, wie $FG \cdot GC : AH \cdot HC$, d. h. wie $FC^2 : AC^2$. Folglich verhält sich die Wirksamkeit aller Theilchen in ihren verschiedenen Orten F zur Wirksamkeit eben so vieler Theilchen in den Orten A, nach dem eben bewiesenen Satze, wie $1 : 2$. W. z. b. w.

Weil ferner diese Theilchen wirksam sind, indem sie sich in perpendikulärer Richtung von der Ebene QR entfernen, und weil dies gleichmässig auf beiden Seiten der letzteren geschieht, bewirken sie, dass die Peripherie des Aequators, wie auch die damit verbundene Erde sich um eine Axe dreht, welche in der Ebene QR und in der des Aequators liegt.

§ 45. Lehnsatz. Unter denselben Voraussetzungen behaupte ich zweitens: Es verhält sich die Kraft und die ganze Wirksamkeit, welche alle rings um die Kugel befindlichen Theilchen haben, um die Erde um dieselbe Axe zu drehen, zu derjenigen Kraft, welche eine gleiche Anzahl, ringförmig auf dem Kreise des Aequators anzunehmender, Theilchen in Bezug auf eine ähnliche kreisförmige Drehung der Erde haben würde, wie $2 : 5$.

Es sei JK (Fig. 204.) ein beliebiger, dem Aequator AE paralleler kleinerer Kreis, L und l zwei beliebige in diesem Kreise gleich gelegene Theilchen, ausserhalb der Kugel Pape. Auf die Ebene QR, welche auf dem nach der Sonne gezogenen Radius vector perpendikulär steht, fälle man die Perpendikel LM und lm; alsdann werden alle Kräfte, mit denen diese Theilchen sich von der Ebene QR zu entfernen streben, diesen Perpendikeln proportional sein. Vorausgesetzt nun, dass Ll der Ebene Pape parallel sei und in X in zwei gleiche Theile getheilt werde, ziehe man durch X die Linie Nn parallel der Ebene QR, und es schneide Nn die Perpendikel LM und lm in N und n. Fällt man hierauf das Perpendikel XY auf die Ebene QR, so werden die beiden entgegengesetzten Kräfte der Theilchen L und l, in Bezug auf die Drehung der Erde im entgegengesetzten Sinne, proportional sein den Produkten $LM \cdot MC$ und $lm \cdot mC$, d. h. $LN \cdot MC + MN \cdot MC$ und $ln \cdot mC - mn \cdot mC$, oder $LN \cdot MC + MN \cdot MC$ und $LN \cdot mC - MN \cdot MC$. Ihr Unterschied

$$1. \quad LN \cdot Mm - MN \cdot (MC + mC)$$

wird die Kraft dieser beiden Theilchen, in Bezug auf Drehung der Erde, zusammengenommen ausdrücken. Der positive Theil dieser Differenz

$LN . Mm = 2LN . NX$ verhält sich zur Kraft $2AH . HC$ zweier gleichgrosser, in A befindlicher Theilchen, wie

$$2.\quad LX^2 : AC^2.$$

Der negative Theil MN $(MC + mC) = 2XY . CY$ verhält sich zur Kraft $2AH . AC$, wie $\quad 3.\quad CX^2 : AC^2.$

Der Unterschied dieser Theile, d. h. die Kraft zweier zusammengenommener Theilchen L und l, in Bezug auf Drehung der Erde, verhält sich zur Kraft zweier Theilchen, welche ihnen gleich und in A befindlich wären, und welche eben so auf Drehung der Erde hinwirken würden, wie $\quad 4.\quad LX^2 - CX^2 : AC^2.$

Ist aber die Peripherie JK in unzählige gleiche Theile L getheilt, so verhalten sich alle LX^2 zu eben so vielen JH^2, wie $1 : 2$ (nach §. 44), folglich zu eben so vielen AC^2, wie

$$5.\quad JH^2 : 2AC^2.294)$$

Ferner verhalten sich eben so viele CH^2 zu gleich vielen AC^2, wie

$$6.\quad 2 . CX^2 : 2 . AC^2.$$

Die vereinigten Kräfte aller Theilchen auf der Peripherie des Kreises JK verhalten sich also zu den vereinigten Kräften eben so vieler gleicher, in A befindlicher Theilchen, wie

$$7.\quad JX^2 - 2 . CX^2 : 2 . AC^2;$$

folglich (nach §. 44.) zu den vereinigten Kräften eben so vieler, auf der Peripherie des Kreises AE befindlicher Theilchen, wie

$$8.\quad JX^2 - 2 . CX^2 : AC^2.295)$$

Nun stelle man sich den Durchmesser Pp der Kugel in unzählige gleiche Stücke getheilt vor, in denen eben so viel Kreise JK sind, gezogen vor. Die Materie auf dem Umfange irgend eines beliebigen Kreises derselben wird JX^2, und daher ihre Kraft, in Bezug auf Drehung der Erde $JX^2\ (JX^2 - 2 . CX^2)$ (Verh. 7.) proportional sein. Wäre aber dieselbe Materie auf dem Umfange des Kreises AE angebracht, so würde ihre Kraft $JX^2 . AC^2$ proportional sein. Die Kraft aller Theilchen der Materie, welche ausserhalb der Kugel auf dem Umfange aller dieser Kreise angebracht ist, verhält sich also zur Kraft eben so vieler, auf dem Umfang des grössten Kreises angebrachter Theilchen, wie alle $JX^2\ (JX^2 - 2 . CX^2)$: gleich vielen $JX^2 . AC^2$, d. h. wie

$$\Sigma\,[(AC^2 - CX^2)\,(AC^2 - 3 . CX^2)] \;:\; \Sigma\,[(AC^2 - CX^2)\,AC^2]$$
$$= \Sigma\,[AC^4 - 4 . AC^2 . CX^2 + 3 . CX^4] \;:\; \Sigma\,[AC^4 - AC^2 . CX^2]$$

und wenn man $CX = x$ setzt,

$$= \int_0^{AC} [AC^4 - 4 . AC^2 . x^2 + 3x^4]\,dx : \int_0^{AC} [AC^4 - AC^2 . x^2]\,dx$$

$$= AC^4 . AC - {}^4/_3 . AC^2 . AC^3 + {}^3/_5\, AC^5 : AC^4 . AC - {}^1/_3\, AC^2 . AC^3,$$
$$= 2 : 5.\quad \text{W. z. b. w.}$$

§. 46. **Lehnsatz.** Unter denselben Voraussetzungen behaupte ich drittens, dass die Bewegung der ganzen Erde um die vorher be-

schriebene Axe, welche aus den Bewegungen aller ihrer Theilchen zusammengesezt ist, sich zur Bewegung des vorher bemerkten Ringes verhalten wird, wie die Materie der Erde zur Materie des Ringes, und wie das dreifache Quadrat aus dem Viertelbogen jedes Kreises zum doppelten Quadrate des Durchmessers zusammengenommen. Beide Bewegungen stehen also im zusammengesetzten Verhältniss der Materie zur Materie und der Zahlen 925275 : 1000000.

Die Bewegung eines Cylinders, welcher sich um seine als fest vorausgesetzte Axe dreht, verhält sich nämlich zur Bewegung der eingeschriebenen Kugel, welche sich zugleich um dieselbe Axe dreht, wie 4 gleiche Quadrate zu 3 in diesen eingeschriebenen Kreisen.

Ferner verhält sich die Bewegung des Cylinders zur Bewegung eines sehr dünnen Ringes, der die Kugel und den Cylinder in ihrem gemeinschaftlichen Berührungspunkte umgiebt, wie die zweifache Materie des Cylinders zur dreifachen des Ringes. Endlich verhält sich die gleichförmig fortgesetzte Bewegung dieses Ringes um die Axe des Cylinders zu seiner gleichförmigen und gleichzeitigen Bewegung um seinen eigenen Durchmesser, wie die Peripherie des Kreises zu seinem doppelten Durchmesser. 296)

§. 47. Zweite Hypothese Wenn der besprochene Ring allein seinen Umlauf in der Ebene der Erdbahn und mit der jährlichen Bewegung macht, während der ganze übrige Theil der Erde fortgenommen ist; wenn er sich inzwischen durch die tägliche Bewegung um seine Axe, welche um $23^1/_2{}^0$ gegen die Ebene der Ekliptik geneigt ist, dreht: so wird die Bewegung der Aequinoctialpunkte dieselbe sein, mag dieser Ring fest oder flüssig sein.

§. 48. Aufgabe. Man soll die Präcession der Aequinoctien bestimmen.

Die mittlere stündliche Bewegung der Mondknoten in einer kreisförmigen Bahn war, wenn diese Knoten sich in den Quadraturen befinden, = 16,"6, und die Hälfte hiervon oder 8,"3 ist, aus den früher erklärten Gründen, die mittlere stündliche Bewegung der Knoten in dieser Bahn. Diese Bewegung beträgt daher während eines ganzen siderischen Jahres 1. 20^0 11′ 46″ (20^0 12′ 29″).297)

Es würden sich daher die Mondknoten in einer solchen Bahn jedes Jahr um 20^0 11′ 46″ rückläufig bewegen, und wenn mehrere Monde vorhanden wären; so würde (nach §. 107., Zusatz 16. des ersten Buches) die Bewegung der Knoten eines jeden der Umlaufszeit proportional sein.

Wenn also der Mond sich um die Erde, in der Nähe ihrer Oberfläche und in der Zeit eines Sterntages bewegte, so würde sich die jährliche Bewegung seiner Knoten zu 20^0 11′ 46″ verhalten, wie die Dauer eines Sterntages zur Umlaufszeit des Mondes, d. h. wie

2. $23^h\ 56^m : 27^d\ 7^h\ 43^m = 1436 : 39343$.

Dieselbe Bewandtniss wird es mit einem Ringe von Monden haben, welcher die Erde umgiebt; mögen die letzteren zusammenhängend sein,

oder mögen sie flüssig werden und einen zusammenhängenden Ring bilden, oder mag die Materie dieses Ringes hart und unbiegsam werden.

Setzen wir nun voraus, dieser Ring sei, der Menge seiner Materie nach dem Theile PapAPepE (Figur 204.) der Erde gleich, welcher Theil sich ausserhalb der Kugel Pape befindet.

Diese Kugel verhält sich zu jenem äusseren Theile, wie aC^2: $AC^2 - aC^2$, d. h. (weil PC : AC = aC : AC = 229 : 230) wie

3. 52441 : 459.

Umgäbe der Ring die Erde längs der Ebene des Aequators, und drehten sich beide zugleich um den Durchmesser des Ringes; so würde sich die Bewegung des letzteren zur Bewegung der inneren Kugel (nach §. 46.) verhalten, wie 459 : 52441 und 1000000 : 925275 zusammengenommen, d. h. wie 4. 4590 : 485223.

Es würde demnach die Bewegung des Ringes sich zur vereinigten Bewegung desselben und der Kugel verhalten, wie

5. 4590 : 489813.

Ist daher der Ring mit der Kugel verbunden und theilt er ihr seine Bewegung, vermöge welcher seine Knoten oder die Aequinoctialpunkte zurückweichen, mit; so wird die ihm übrig bleibende Bewegung zur ursprünglichen im Verhältniss 5. stehen.

In demselben Verhältniss muss die Bewegung der Aequinoctialpunkte vermindert werden. Die jährliche Bewegung des, aus dem Ringe und der Kugel zusammengesetzten, Körpers wird sich also zu 20° 11′ 46″ verhalten, wie 1436 : 39343 und 4590 : 489813 zusammengenommen, d. h. wie 6. 100 : 292369.

Die Kräfte, vermöge deren die Knoten des Mondes (wie ich oben erklärt habe) und folglich die Aequinoctialpunkte des Ringes zurückweichen, d. h. die Kräfte 3 . JT (Figur zu §. 34.) sind aber in jedem Theilchen dem Abstande desselben von der Ebene QR (Figur 204.) proportional, und vermöge dieser Kräfte entfernen sich die Theilchen von derselben Ebene. Wenn also (nach §. 45.) die Materie des Ringes über die ganze Oberfläche der Kugel verbreitet ist, so dass sie auf dem oberen Theile der Erde die Gestalt PapAPepE hat; so wird die ganze Kraft und Wirksamkeit aller Theilchen, in Bezug auf die Drehung der Erde um einen beliebigen Durchmesser des Aequators, also auch in Bezug auf die Bewegung der Aequinoctialpunkte, im Verhältniss 2 : 5 kleiner als vorhin werden (§. 45). Folglich verhält sich die jährliche Zurückweichung der Aequinoctien zu 20° 11′ 46″, wie

7. 10 : 73092 298),

d. h. sie ist = $9^{II}\ 56^{III}\ 50^{IV}$ (9,″9).

Uebrigens muss diese Bewegung, wegen der Neigung der Ebene des Aequators gegen die der Ekliptik, im Verhältniss

8. $\cos 23{,}^05 : 1 = 91706 : 100000$

vermindert werden, und sie ergiebt sich daher $9^{II}\ 7^{III}\ 20^{IV}$ = (9,″1).

Dies ist die jährliche Präcession der Aequinoctien, welche durch

die Kraft der Sonne hervorgebracht wird. Die Kraft des Mondes, in Bezug auf die Bewegung des Meeres, haben wir zu der ihr entsprechenden Kraft der Sonne im Verhältniss von beiläufig 4,4815 : 1 gefunden (§. 42., Zusatz 3.), und es steht die Kraft des ersteren, in Bezug auf die Bewegung der Aequinoctialpunkte, zur entsprechenden Kraft der Sonne in demselben Verhältniss. Die durch den ersteren hervorgebrachte Präcession der Aequinoctien muss daher $40^{II}\ 52^{III}\ 52^{IV}$ (40,"9) betragen Die ganze durch beide Kräfte hervorgebrachte jährliche Präcession ist = $50^{II}\ 0^{III}\ 12^{IV}$ (50,"0), welcher Werth mit den Erscheinungen übereinstimmt, indem die astronomischen Beobachtungen ungefähr 50" jährlich ergeben haben.

Ist die Erde am Aequator um mehr als $17^1/_6$ Meilen höher, als an den Polen, so muss ihre Materie am Umfange weniger dicht, als am Mittelpunkte sein. Die Präcession der Aequinoctien wird daher, vermöge dieser grösseren Höhe des Aequators vergrössert und vermöge dieser geringeren Dichtigkeit verkleinert werden müssen.

Wir haben bis jetzt das System der Sonne, der Erde, des Mondes und der Planeten beschrieben; es bleibt uns noch übrig, von den Kometen zu reden.

ABSCHNITT V.

Von den Kometen.

§. 49. Lehnsatz. Die Kometen befinden sich oberhalb des Mondes und kommen in die Gegend der Planeten.

Wie das Fehlen der täglichen Parallaxe zeigt, dass die Kometen sich oberhalb der sublunaren Gegenden befinden, so beweist ihre jährliche Parallaxe, dass sie bis in die Gegend der Planeten herabkommen. Alle Kometen nämlich, welche sich nach der Ordnung der Zeichen bewegen, werden gegen das Ende ihrer Sichtbarkeit langsamer als vorher, oder selbst rückläufig, wenn die Erde sich zwischen ihnen und der Sonne befindet und werden in demselben Maasse beschleunigt, wenn die Erde mit ihnen in Opposition kommt Umgekehrt gehen diejenigen Kometen, welche sich gegen die Ordnung der Zeichen bewegen, gegen das Ende ihrer Sichtbarkeit geschwinder fort, wenn die Erde sich zwischen ihnen und der Sonne befindet, sie bewegen sich hingegen langsamer oder werden selbst rückgängig, wenn die Erde in den entgegengesetzten Theilen gelegen ist. Dies geschieht hauptsächlich in Folge der Bewegung der Erde, in ihrer verschiedenen Lage gegen sie, eben so wie die Planeten uns bisweilen rückläufig, bisweilen langsamer und bisweilen geschwinder

fortgehend erscheinen; je nachdem ihre Bewegung mit derjenigen der Erde übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist. Bewegt sich die Erde nach derselben Seite wie der Komet, und mit einer Winkelgeschwindigkeit um die Sonne, welche diejenige des Kometen hinreichend übertrifft, damit die durch die Erde und den Kometen beständig gezogenen Linien jenseits des letzteren convergiren; so wird der Komet von der Erde aus, in Folge seiner langsameren Bewegung, rückläufig erscheinen. Bewegt sich aber die Erde langsamer, so wird die Bewegung des Kometen (indem man die Bewegung der Erde von ihr abzicht) wenigstens langsamer erscheinen. Bewegt sich die Erde nach der entgegengesetzten Seite, wie der Komet, so scheint dieser schneller fortzugehen. Aus dieser Beschleunigung und dieser rückläufigen Bewegung leitet man den Abstand des Kometen folgendermaassen ab:

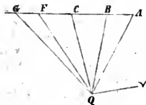


Fig. 206.

Es seien ♈QA, ♈QB, ♈QC drei, im Anfange der Sichtbarkeit beobachtete, Längen des Kometen und ♈QF die letzte beobachtete Länge, bevor er aufhört, sichtbar zu sein. Man ziehe die Linie ABC so, dass die durch QA, QB und QC abgeschnittenen Stücke derselben AB und BC sich so zu einander verhalten, wie die zwischen den drei ersten Beobachtungen verflossenen Zeiten. Man verlängere nun AC bis G, so dass AG : AB, wie die Zwischenzeit der ersten und letzten Beobachtung zur Zwischenzeit der beiden ersten Beobachtungen. Zieht man nun QG, so würde, wenn der Komet sich gleichförmig in einer geraden Linie bewegte, und die Erde sich in Ruhe befände oder ebenfalls sich gleichförmig in einer geraden Linie bewegte, der Winkel ♈QG die Länge des Kometen zur Zeit seiner letzten Beobachtung sein. Der Winkel FQG, um welchen diese Längen verschieden sind, wird also durch die Ungleichheiten der Bewegungen des Kometen und der Erde hervorgebracht. Addirt man diesen Winkel, im Fall beide Körper sich nach entgegengesetzten Seiten bewegen, zum Winkel ♈QG; so wird die scheinbare Bewegung des Kometen beschleunigt. Bewegen sich aber beide Körper nach derselben Seite hin, so muss man FQG von demselben Winkel ♈QG subtrahiren, und erhält so die scheinbare Bewegung des Kometen langsamer oder selbst rückgängig, wie ich oben gezeigt habe.

Dieser Winkel wird daher vorzüglich durch die Bewegung der Erde gebildet, und man kann ihn deshalb mit Recht als die Parallaxe des Kometen ansehen, indem man die kleinen Decremente oder Incremente, welche aus der Ungleichheit der Bewegung des Kometen in seiner Bahn entspringen könnten, vernachlässigt.

Aus dieser Parallaxe leitet man den Abstand des Kometen folgendermaassen ab: S stelle die Sonne, aeT die grosse Bahn, a den Ort

der Erde zur Zeit der ersten Beobachtung, c ihren Ort zur Zeit der dritten und T den Ort dar, an welchem sie sich zur Zeit der letzten Beobachtung befindet. T♈ sei nach dem Widderpunkte gezogen und es werde ♈TV = ♈QF, d. h. der Länge des Kometen, wenn die Erde sich in T befindet, gleich angenommen. Man verlängere ferner ac bis g, so dass ag : ac = AG : AC; alsdann wird g der Ort sein, welchen die Erde, durch eine gleichförmig fortgesetzte Bewegung auf der Linie ac, zur Zeit der letzten Beobachtung erreicht haben würde. Zieht man nun g♈ ∓ T♈, und macht man ∠ ♈gV = ♈QG, so wird ♈gV der vom Orte g aus beobachteten Länge des Kometen gleich und der Winkel TVg die Parallaxe sein, welche aus der Uebertragung vom Orte g nach T entspringt. Folglich wird V der Ort des Kometen in der Ekliptik sein und derselbe wird sich gewöhnlich unterhalb der Jupiterbahn befinden.

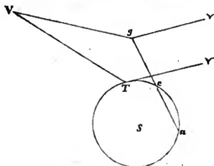


Fig. 207.

Man schliesst dies aus der Krümmung des Weges der Kometen. Dieselben bewegen sich, wenn sie ihre grösste Geschwindigkeit haben, nahebei in grössten Kreisen; aber gegen das Ende ihres Laufes, wo dieser Theil ihrer scheinbaren Bewegung, welcher von der Parallaxe, herrührt, ein grösseres Verhältniss zur ganzen scheinbaren Bewegung hat, pflegen sie sich aus diesen Kreisen zu entfernen, und gehen, wenn die Erde sich nach Einer Richtung des Himmels bewegt, nach der entgegengesetzten Seite hin. Diese Ablenkung entspringt am meisten aus der Parallaxe, weil sie der Bewegung der Erde entspricht. Die Grösse dieser Ablenkung zeigt nach meiner Rechnung, dass die Kometen sich zur Zeit ihres Verschwindens ziemlich weit unterhalb des Jupiters befinden. Folglich werden sie in ihrem Perigeum und Perihel, wo sie uns näher stehen, oft unterhalb der Bahnen des Mars und der unteren Planeten herabsteigen.

Die Nähe der Kometen wird auch durch das Licht ihrer Köpfe bestätigt. Der Glanz eines Himmelskörpers, welcher von der Sonne beleuchtet wird und sich sehr weit von ihr entfernt, nimmt nämlich im vierfachen Verhältniss der Entfernung ab. Im doppelten Verhältniss, weil der Abstand des Körpers von der Sonne zunimmt, und in einem anderen doppelten Verhältniss, wegen der Verkleinerung seines scheinbaren Durchmessers. Ist daher die Lichtmenge und der scheinbare Durchmesser eines Kometen gegeben, so kennt man auch seine Entfer-

nung indem man schliesst, dass diese zum Abstande eines Planeten im directen Verhältniss der Durchmesser und dem halben indirecten Verhältniss der Beleuchtung stehe.[299])

Flamsteed beobachtete den kleinsten Durchmesser der Nebelhülle am Kometen von 1682 und fand ihn, mittelst eines 16füssigen, mit einem Mikrometer versehenen Fernrohr, = 2 Minuten; der Kern oder der Stern in der Mitte des Kopfes fasste kaum $^1/_{10}$ dieser Breite, also war sein Durchmesser nur etwa 11 bis 12 Secunden gross. Die Beleuchtung und der Glanz des Kopfes übertraf aber die des Kometen von 1680 und war fast eben so gross, als diejenigs der Sterne erster oder zweiter Grösse. Setzen wir nun voraus, dass sein Licht etwa $^1/_4$ von dem des Saturns nebst seinem Ringe betrug. Das Licht des letzteren war fast dem der Kugel gleich, und der scheinbare Durchmesser dieser etwa 21 Secunden; daher würde das Licht der Kugel und des Ringes zusammengenommen gleich dem einer Kugel von 30 Secunden im Durchmesser sein. Der Abstand des Kometen von der Erde verhält sich daher zu dem Abstande des Saturns direct wie 12 : 30 und indireot wie 1 : $\sqrt{4}$, d. h. zusammen wie 24 : 30 oder 4 : 5.

Der im April 1665 erschienene Komet übertraf nach Hevel, durch seinen Glanz, fast alle Fixsterne und durch die Lebhaftigkeit seiner Farbe selbst den Saturn. Er war also glänzender, als der am Ende des vorhergehenden Jahres erschienene, welcher für eben so glänzend, als die Sterne erster Grösse gehalten wurde. Der Durchmesser seiner Nebelhülle betrug fast 6 Minuten, und sein, mittelst eines Fernrohres mit den Planeten verglichener, Kern war ohne Zweifel kleiner als der Jupiter, bisweilen erschien er der Saturnskugel gleich, bisweilen kleiner. Da nun ferner der Durchmesser der Nebelhülle selten 8 oder 12 Minuten übersteigt, und da der Durchmesser des Kernes oder Centralsternes ungefähr $^1/_{10}$ oder bisweilen selbst nur $^1/_{15}$ von dem der Nebelhülle beträgt; so ist es klar, dass diese Gestirne meistentheils dieselbe scheinbare Grösse wie die Planeten haben. Da man nun gewöhnlich ihr Licht dem des Saturns gleichsetzen kann, und es dieses bisweilen übertrifft, so müssen alle Kometen sich in ihrem Perihel offenbar unter, oder sehr nahe über dem Saturn befinden. Diejenigen, welche sie in die Gegend der Fixsterne setzen, irren also sehr; denn in dieser Entfernung könnten sie durch unsere Sonne nicht stärker beleuchtet werden, als es bei unseren Planeten durch die Fixsterne geschieht.

Bei der Betrachtung aller dieser Umstände haben wir noch nicht die Verdunkelung berücksichtigt, welche die Kometen durch den, ihre Köpfe umgebenden, dicken und reichlichen Dunst erleiden, in Folge welches Dunstes ihr Licht wie durch ein Gewölk kommend erscheint. Je mehr dieser Dunst die Kometen verdunkelt, desto näher müssen sie der Sonne kommen, damit das von ihnen reflectirte Licht dem der Planeten gleich werden könne. Hiernach ist es sehr wahrscheinlich, dass die Kometen weit unterhalb der Saturnsbahn herabsteigen, wie wir es durch

die Parallaxe gefunden haben. Dasselbe wird auf mehrfache Weise durch ihre Schweife bestätigt, welche entweder durch die Zurückwerfung des im Aether verbreiteten Rauches, oder durch das Licht des Kopfes gebildet werden. Im ersteren Falle muss man den Abstand des Kometen vermindern, weil man sonst voraussetzen müsste dass dieser unaufhörlich aus ihren Köpfen ausströmende Rauch in einen ungeheueren Raum und mit einer unglaublichen Geschwindigkeit und Ausdehnung fortgepflanzt werde. Im letzten Falle schreibt man alles Licht des Schweifes und der Nebelhülle dem Kerne des Kopfes zu. Denken wir uns nun, dass dieses ganze Licht in der Scheibe des Kerns versammelt und zusammengedrängt sei; so müsste dieser Kern allemal, wenn der Komet einen sehr grossen und glänzenden Schweif hat, weit glänzender als der Jupiter sein. Gibt er nämlich mehr Licht von sich, und hat er einen kleineren scheinbaren Durchmesser, so muss er stärker als der Jupiter von der Sonne beleuchtet sein und ihr weit näher stehen. Noch weit mehr muss man, wenn ihre Köpfe in der Nähe der Sonne verborgen sind, und ihre Schweife, wie es bisweilen geschieht, wie grosse brennende Balken erscheinen, sie nach demselben Raisonnement unterhalb der Venusbahn setzen. Denkt man sich nämlich all dieses Licht in einem Gestirne vereinigt, so muss dasselbe bei weitem die Venus, um nicht zu sagen mehrere der Venus gleiche Gestirne, an Glanz übertreffen.[300]) Man muss auf dasselbe aus dem Lichte der Kometenköpfe schliessen, welches zunimmt, wenn sie sich von der Erde entfernen und der Sonne nähern, und umgekehrt abnimmt, wenn die Kometen sich von der Sonne entfernen und gegen die Erde hin gehen. So nahm die scheinbare Bewegung des letzteren Kometen von 1665 (nach Hevel's Beobachtung) stets ab, seitdem man angefangen hatte, ihn wahrzunehmen, er hatte also das Perigeum bereits überschritten; indessen nahm der Glanz seines Kopfes von Tag zu Tag zu, bis er endlich in die Sonnenstrahlen versank und so aufhörte, sichtbar zu sein. Die Bewegung des Kometen von 1683 war (nach Hevel's Beobachtung) Ende Juli, wo er zuerst gesehen wurde, sehr langsam; sie betrug täglich nur uur ungefähr 40 bis 45 Minuten in seiner Bahn. Von da an nahm dieselbe beständig zu, bis zum 4 September, wo sie fast 5 Grad betrug. Während dieser ganzen Zeit näherte sich der Komet der Erde, wovon man sich durch die Messung des Durchmessers seines Kopfes überzeugen konnte. Hevel fand diesen nämlich am 6. August nur = 6' 5", mit Inbegriff der Nebelhülle, am 2. September hingegen betrug derselbe 9' 7". Der Kopf war also beim Anfang seiner Bewegung kleiner, als gegen das Ende. Indessen erschien er anfangs, wo er der Sonne nahe war, weit glänzender als gegen das Ende, wie Hevel berichtete und während dieser ganzen Zeit nahm sein Licht beständig ab, weil er sich nämlich von der Sonne entfernte, obgleich er der Erde immer näher kam. Die Bewegung des Kometen von 1618 war am grössten gegen die Mitte des Decembers, und die des Kometen von 1680 gegen das Ende desselben Monats. Beide

befanden sich also der Erde am nächsten, indessen waren ihre Köpfe am glänzendsten 14 Tage früher, wo sie eben aus den Sonnenstrahlen hervorgetreten waren. Der grösste Glanz ihrer Schweife hatte noch etwas früher stattgefunden, als sie selbst sich in der Nähe der Sonne befanden. Der Kopf des Kometen von 1618 erschien, nach den am 1. December von Cysatus angestellten Beobachtungen, grösser als die Sterne erster Grösse und am 16. December (wo er der Erde am nächsten stand) war seine Grösse unbedeutend, sein Licht und Glanz hingegen bedeutend vermindert, und am 7. Januar konnte Kepler den Kopf nicht mehr wahrnehmen und stellte die Beobachtungen ein. Der Kopf des Kometen von 1680 wurde am 12. December von Flamsteed, in einem Abstande von 9° von der Sonne, beobachtet, und sein Licht schien kaum dem eines Sternes 3. Grösse gleich zu kommen. Am 15. und 17. December schien er einem Sterne 3. Grösse gleich zu kommen, wenn das Licht des letzteren durch dasjenige der Wolken gegen Sonnenuntergang vermindert wird. Am 26. December bewegte er sich sehr schnell, war also seinem Perigeum nahe, war aber kleiner, als der Stern 3. Grösse nahe am Munde des Pegasus. Am 3. Januar glich er einem Stern 4, am 9. einem 5. Grösse und am 13. verschwand er wegen des Glanzes des zunehmenden Mondes. Am 25. Januar war sein Licht kaum dem eines Sternes 7. Grösse gleich. Nimmt man gleiche Zeiten vor und nach dem Perigeum an, so hätte sein Kopf, welcher sich damals in sehr entfernten Gegenden befand, gleich glänzend erscheinen müssen, weil er in beiden Fällen gleich weit von der Erde entfernt war. Er erschien aber viel glänzender, als er sich auf der Seite der Sonne befand, auf der entgegengesetzten Seite hingegen fast erloschen. Man muss daher aus dem grossen Unterschiede, welches zwischen seinem Lichte in der einen und andern Lage stattfand, schliessen, dass er im ersteren Falle der Sonne sehr nahe war. Das Licht des Kometen pflegt nämlich regelmässig zu sein und lebhafter zu erscheinen, wenn ihr Kopf sich schnell bewegt und sie sich also nahe bei der Erde befinden; wofern jenes nicht in der Nähe der Sonne grösser ist.

Zusatz 1. Die Kometen glänzen also dadurch, dass sie das Sonnenlicht reflectiren.

Zusatz 2. Man ersieht aus dem Gesagten, warum die Kometen sich so sehr der Gegend der Sonne nähern. Befänden sie sich in den, weit jenseits des Saturns gelegenen Gegenden, so müssten sie öfters in den der Sonne entgegengesetzten Gegenden erscheinen. Die in diesen Theilen des Himmels befindlichen Kometen würden der Erde näher sein, und die zwischenstehende Sonne die übrigen verdunkeln. Indem ich aber die Geschichte der Kometen durchging, fand ich, dass man vier- oder fünfmal mehr in der, gegen die Sonne gerichteten, Halbkugel gefunden hat, als in der entgegengesetzten Halbkugel; ausser anderen, ohne Zweifel nicht wenigen, welche das Sonnenlicht bedeckte. Bestimmt haben sie, wenn sie in unsere Gegenden herabsteigen, keine Schweife und werden

nicht hinreichend von der Sonne erhellt, um mit unbewaffnetem Auge früher entdeckt zu werden, als bis sie uns näher als der Jupiter stehen. Der grösste Theil des Weges, welchen sie um die Sonne in der Nähe der Erde beschreiben, liegt an der, der Sonne zugewandten, Seite der Erde. Da also die Kometen alsdann der Sonne näher sind, pflegen sie durch dieselbe mehr beleuchtet zu werden.

Zusatz 3. Hieraus folgt, dass die Himmelsräume von jedem Widerstande befreit sind; denn die Kometen verfolgen geneigte Bahnen, welche bisweilen denjenigen der Planeten entgegengesetzt sind, sie bewegen sich sehr frei in jedem Sinne und behalten sehr lange ihre Bewegungen bei, selbst diejenigen, welche gegen die Ordnung der Zeichen erfolgen.[301]) Ich muss mich sehr irren, wenn die Kometen nicht Körper von derselben Art wie die Planeten sind und sie sich nicht beständig in einer und derselben Bahn bewegen. Die Meinung einiger, welche sie für Meteore halten, eine Meinung, welche sich auf die beständig an ihren Köpfen stattfindenden Aenderungen gründet, scheint jedes reellen Grundes zu entbehren. Die Köpfe der Kometen sind von sehr grossen Atmosphären umgeben, und diese müssen unten dichter sein. Die Aenderungen, welche man an den Kometen wahrnimmt, zeigen sich in den Wolken dieser Atmosphären und nicht an den Körpern selbst. Eben so würde ohne Zweifel die, von den Planeten aus gesehene, Erde nur durch das Licht der sie umgebenden und verbergenden Wolken glänzen. Es ist auch sehr wahrscheinlich, dass die auf dem Jupiter unter einander beweglichen Streifen durch die Wolken gebildet werden, welche dieses Gestirn umgeben und bewirken, dass wir ihn selbst schwieriger zu sehen bekommen. Die Körper der Kometen, welche von tiefern und dichtern Atmosphären umgeben sind, müssen nun noch schwieriger wahrzunehmen sein.

§. 50. Lehrsatz. Die Kometen bewegen sich in Kegelschnitten, deren Brennpunkt im Mittelpunkt der Sonne liegt, und beschreiben mit den, nach diesem Gestirn gezogenen Radien vectoren den Zeiten proportionale Flächenräume.

Dieser Satz ist klar durch §. 32., Zusatz 1. des ersten Buches und die §§. 10., 15. und 16. dieses Buches.

Zusatz 1. Hieraus folgt, dass, wenn die Kometen sich in Bahnen bewegen, diese Ellipsen sind und dass ihre Umlaufszeiten zu denjenigen der Planeten im $^3/_2$ten Verhältniss der grossen Axen stehen. Der grösste Theil der Kometen befindet sich oberhalb der Planeten, und beschreibt Bahnen, deren Axen grösser als die jener Himmelskörper sind. Sie müssen sich also langsamer bewegen, dergestalt dass, wenn die Axe einer Kometenbahn etwa viermal so gross, als die der Saturnsbahn ist, die Umlaufszeit des Kometen zu derjenigen des Saturns, d. h. zu 30 Jahren (4. Erscheinung dieses Buches) verhält wie $4\sqrt{4} : 1 = 8 : 1$. Sie würde also 240 Jahre betragen.

Zusatz 2. Die Kometenbahnen nähern sich so sehr den Para-

beln, dass man ohne merklichen Fehler Paraheln an ihrer Stelle anwenden kann.

Zusatz 3. Es wird daher (nach §. 36., Zusatz 7. des ersten Buches) die Geschwindigkeit jedes Kometen sehr nahe zur Geschwindigkeit eines Planeten, welcher sich in einem Kreise um die Sonne bewegt, im halben Verhältniss des doppelten Abstandes des Planeten vom Mittelpunkt der Sonne zum Abstande des Kometen von demselben Punkte stehen. Setzen wir voraus, dass der Radius der grossen Bahn oder die halbe grosse Axe der Ellipse, in welcher die Erde sich bewegt, gleich 100000000 = a sei, und dass die Erde mit ihrer mittlern täglichen Bewegung 1720212 = t. [302]) und mit ihrer mittlern stündlichen Bewegung 71675,5 solcher Theile durchlaufe; so wird ein Komet, welcher sich in derselben mittlern Entfernung wie die Erde von der Sonne befindet, und dessen Geschwindigkeit sich daher zu derjenigen der Erde wie $\sqrt{2}$: 1 verhalten würde, täglich 2432747 und stündlich 101364,5 solcher Theile durchlaufen. In grösseren oder kleineren Entfernungen wird die tägliche und stündliche Bewegung zu der eben gefundenen im umgekehrtem halben Verhältniss der Entfernungen stehen und daher gegehen sein.

Zusatz 4. Ist also der Parameter viermal so gross, als der Radius der grossen Bahn, und setzt man das Quadrat des letzteren = 100000000 = a^2, so wird die Fläche, welche der Komet mit den nach der Sonne gezogenen Radien vectoren beschreibt, weil $\sqrt{4} = 2$ ist, täglich 1216373,5, stündlich 50682,25 solcher Theile betragen. Ist der Parameter in irgend einem Verhältniss grösser oder kleiner, so wird auch die täglich und stündlich beschriebene Fläche in demselben halben Verhältniss grösser oder kleiner sein.

§. 51. Lehnsatz. Man soll die paraholische Linie bestimmen, welche durch eine heliebige Anzahl gegebener Punkte geht. Es seien A,

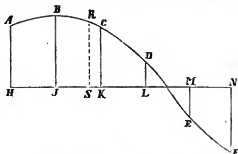


Fig. 207

B, C, D, E, F, etc. diese Punkte, und von ihnen auf eine beliebige, der Lage nach gegehene, gerade Linie HN die Perpendickel AE, BJ, CK, DL, DM, FN gefällt.

1. Fall. Sind die Intervalle HJ, JK, KL, u. s. w. der Punkte H, J, K, L, M, N einander gleich so bilde man die Unterschiede

$$AH - BJ = b$$
$$BJ - CK = 2b$$
$$CK - DL = 3b$$
$$DL + EM = 4b$$
$$- EM + FN = 5b \quad \text{etc.}$$

hierauf
$$b - 2b = c$$
$$2b - 3b = 2c \quad \text{etc.}$$

dann
$$c - 2c = d \quad \text{etc.}$$

u. s. w. f., so dass man das Schema erhält:

b		2b		3b		4b		5b
	c		2c		3c		4c	
		d		2d		3d		
			e		2e			
				f				

wo also f die letzte so gebildete Differenz ist. Hierauf errichte man ein Perpendikel RS, welches eine Ordinate der gesuchten Curve sein soll; alsdann erhält man seine Länge folgendermaassen. Es seien die Intervalle HJ, JK, KL, etc. = 1.

Ferner
$$AH = a$$
$$- HS = p$$
$$\tfrac{1}{2}p \,.\, (-JS) = q$$
$$\tfrac{1}{3}q \,(+SK) = r$$
$$\tfrac{1}{4}r \,.\, SL = s$$
$$\tfrac{1}{5}s \,.\, SM = t.$$

Führt man auf diese Weise, bis zum vorletzten Perpendikel ME fort, und giebt man den Gliedern HS, JS etc., welche auf der Seite A von S liegen, ein negatives, den Gliedern SK, SL, etc., welche auf der entgegengesetzten Seite von S liegen, ein positives Zeichen; so wird man, unter gehöriger Berücksichtigung der letzteren haben: $RS = a + bp + cq + dr + es + ft$ etc.

2. Fall. Sind die Intervalle HJ, JK, etc. der Punkte H, J, K, etc. ungleich, so bilde man

$$b = \frac{AH - BJ}{HJ},\ 2b = \frac{BJ - CK}{JK},\ 3b = \frac{CK - DL}{KL}, \text{ etc.}$$
$$c = \frac{b - 2b}{HK},\ 2c = \frac{2b - 3b}{JL},\ 3c = \frac{3b - 4b}{KM}, \text{ etc.}$$
$$d = \frac{c - 2c}{HL},\ 2d = \frac{2c - 3c}{JM} \text{ etc. etc. etc.}$$

d. h. die ersten Differenzen der Ordinaten, dividirt durch die Differenzen der Abscissen, die zweiten Differenzen der ersten, dividirt durch die zweiten Differenzen der Abscissen u. s. w. f. Sind diese Differenzen gefunden und setzt man $AH = a$, $- HS = p$, $p \,.\, (-JS) = q$, $q \,.\, SK = r$, $r \,.\, SL = s$, $s \,.\, SM = t$, etc. bis zum vorletzten Perpendikel ME;

so wird die gesuchte Ordinate RS = a + bp + cq + dr + es + ft + etc.[303])

Zusatz. Man kann auf diese Weise sehr nahe die Flächenräume aller Curven finden. Hat man nämlich einige Punkte einer beliebigen Curve, welche man quadriren will, so denke man sich durch dieselben eine Parabel gezogen. Die Fläche der letzteren wird sehr nahe der Fläche der zu quadrirenden Curve gleich sein, und die Methoden nach denen man die Parabel stets geometrisch quadriren kann, sind vollkommen bekannt.

§. 52. **Lehnsatz.** Man hat einige Kometenörter beobachtet, und soll für eine beliebige gegebene und zwischenliegende Zeit den entsprechenden Ort des Kometen finden.

Stellen HJ, JK, KL, LM (Figur 207) die Zeiten vor, welche zwischen den einzelnen Beobachtungen verflossen sind; sind ferner AH, BJ, CK, DL, EM fünf beobachtete Längen des Kometen und ist HS die zwischen der ersten beobachteten und der gesuchten Länge verflossene Zeit: so denke man sich durch die Punkte A, B, C, D, E eine reguläre Curve ABCDE gezogen und bestimme ihre Ordinate RS nach dem vorhergehenden §. Alsdann wird diese Linie die gesuchte Länge sein. Nach derselben Methode findet man, aus drei beobachteten Breiten, die einer gegebenen Zeit entsprechende Breite.

Sind die Unterschiede der beobachteten Längen klein, etwa 4 bis 5^0, so werden 3 oder 4 Beobachtungen genügen, um eine neue Länge und Breite zu finden; sind sie grösser, etwa 10 bis 20^0, so muss man 5 Beobachtungen anwenden.

§. 53. **Lehnsatz.** Man soll durch den gegebenen Punkt P eine gerade Linie BC ziehen, deren, durch die beiden ihrer Lage nach gegebenen geraden Linien AB und AC abgeschnittenen, Theile PB und PC ein gegebenes Verhältniss zu einander haben.

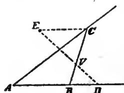


Fig. 208.

Vom Punkt P aus ziehe man eine beliebige gerade Linie PD nach einer dieser beiden Linien, etwa AB, und verlängere dieselbe nach der anderen Linie, AC hin so weit, dass PE zu PD in dem gegebenen Verhältniss stehe. Zieht man nun EC ∥ AD und dann CPB; so wird PC : PB = PE : PD.

§. 54. **Lehnsatz.** Es sei ABC eine Parabel, deren Brennpunkt in S liegt, und die in J halbirte Sehne AC schneide das Segment ABCA ab, dessen Durchmesser $J\mu$ und dessen Scheitel μ sei.

Man nehme auf der Verlängerung von $J\mu$ $\mu O = \frac{1}{2} J\mu$, ziehe OS und mache die Verlängerung des letzteren, oder $S\xi = 2 . SO$. Bewegt sich nun der Komet B auf dem Bogen CBA und zieht man ξB, welche AC in E schneidet; so wird dieser Punkt so liegen, dass AE sehr nahe

der Zeit proportional wird. Zieht man nämlich EO, welche den parabolischen Bogen ABC in Y schneidet und in μ die Tangenten μX an

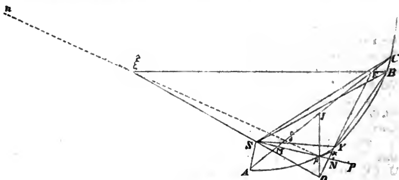


Fig. 209.

der Curve, welche OE in X schneidet; so verhalten sich die krummlinigen Flächenräume

$$1.\quad ASEX\mu A : ASCY\mu A = AE : AC.$$ [304]

Da nun $\xi O : SO = 3 : 1$ und $EO : XO = 3 : 1$ [305], so wird

$$2,\quad SX \mp EB$$

und daher, wenn man BX und BS zieht,

$$3.\quad \triangle\, SBE = XBE.$$

Addirt man also zur Fläche $ASEX\mu A$ das Dreieck XBE, und subtrahirt man von dieser Summe das Dreieck SBE; so wird $ASBX\mu A = ASEX\mu A$ und nach 1.

$$4.\quad ASBX\mu A : ASCY\mu A = AE : AC.$$

Es ist aber sehr nahe

$$5.\quad ASB\mu YA = ASBX\mu A$$

und mit derselben Näherung verhält sich $ASBY\mu A$ zu $ASCY\mu A$, wie die Zeit, welche zur Beschreibung des Bogens AB erforderlich war, zu der, zur Beschreibung des ganzen Bogens AC erforderlichen Zeit. Mithin wird AE zu AC sehr nahe im Verhältniss der Zeiten stehen. W. z. b. w.

Zusatz. Fällt B in den Scheitelpunkt μ der Parabel, so steht AE zu AC genau im Verhältniss der Zeiten.

§. 55. Anmerkung. Zieht man die gerade Linie $\mu\xi$, (Figur 209) welche AC in δ schneidet und bestimmt man auf ihrer Richtung den Punkt n so, dass

$$6.\quad \xi n : \mu B = 27 . MJ : 16 . M\mu;$$

so wird die Linie Bn die Sehne AC genauer als vorher, im Verhältniss der Zeiten schneiden. Man muss aber den Punkt n jenseits ξ annehmen, wenn B weiter als μ vom Hauptscheitelpunkte der Parabel entfernt ist; im entgegengesetzten Falle hat man ihn diesseits ξ anzunehmen.

§. 56. Lehnsatz, Es ist (Figur 209.)

$$7. \quad J\mu = M\mu = \frac{AJ \,.\, JC}{4 \,.\, S\mu},$$

$4\,S\mu$ ist nämlich der Parameter der Parabel für μ als Scheitelpunkt.[305]

§. 57. Lehnsatz. Man verlängere $S\mu$ (Figur 209) bis N und P, so dass

$$8. \quad \begin{cases} \mu N = \tfrac{1}{3} J\mu \text{ und} \\ SP : SN = SN : S\mu \end{cases}$$

sei; alsdann würde der Komet, wenn er immer mit der Geschwindigkeit, welche er in der Höhe SP hat, fortginge, während derselben Zeit, welche er zur Durchlaufung des Bogens $A\mu C$ braucht, einen der Sehne AC gleichen Bogen beschreiben.

Ginge nämlich der Komet in derselben Zeit gleichförmig auf der geraden Linie fort, welche die Parabel in μ berührt, so würde die Fläche, welche durch die nach dem Brennpunkt S gezogenen Radien beschrieben wird, der parabolischen Fläche $ASC\mu$ gleich sein. Es wird daher das Produkt aus dem Theile der Tangente, welchen er beschreiben würde, in die gerade Linie $S\mu$ sich zum Produkt AC . SM verhalten, wie

$$9. \quad ASC\mu : ASC, \text{ d. h. wie } SN : SM.$$[306]

Es verhält sich daher AC zu dem beschriebenen Theile der Tangente, wie

$$10. \quad S\mu : SN.$$

Da nun aber die Geschwindigkeit in der Höhe SP sich (nach §. 36., Zusatz 6. des ersten Buches) zu der Geschwindigkeit in der Höhe $S\mu$ verhält, wie

$$11. \quad \sqrt{S\mu} : \sqrt{SP}, \text{ d. h. wie } S\mu : SN \text{ (Gl. 8.)};$$

so verhält sich die, mit dieser Geschwindigkeit in derselben Zeit beschriebene Linie, zu dem gleichzeitig beschriebenen Theile der Tangente, wie $S\mu : SN$.

Da aber AC und die, mit dieser neuen Geschwindigkeit beschriebene Linie, zum beschriebenen Theile der Tangente in demselben Verhältniss stehen, so sind sie unter sich gleich.

Zusatz. Der Komet würde also mit der Geschwindigkeit, welche er in der Höhe $S\mu + \tfrac{2}{3} J\mu$ hat, sehr nahe die Sehne AC in derselben Zeit zurücklegen.[307]

§. 58. Lehnsatz. Fällt ein aller Bewegung beraubter Komet aus der Höhe $SN = S\mu + \tfrac{1}{3} J\mu$ (Figur 209.) gegen die Sonne, und wird die Kraft, welche ihn beim Beginnen des Fallens antreibt, unverändert während der ganzen Zeit beibehalten; so beschreibt er beim Herabsteigen einen $J\mu$ gleichen Weg in der Hälfte derjenigen Zeit, in welcher er in seiner Bahn den Bogen AC zurückgelegt haben würde.

Der Komet wird nämlich in der Zeit, während welcher er den parabolischen Bogen AC beschreibt, die Sehne AC mit derjenigen Geschwindigkeit zurücklegen, welche er in der Höhe SP hatte (nach §. 57). Er würde daher (nach §. 36., Zusatz 7. des ersten Buches), wenn er in derselben Zeit, vermöge der Schwerkraft, seinen Umlauf in einem zum

Halbmesser SP gehörigen Kreise machte, einen Bogen beschreiben, dessen Länge sich zur Sehne AC des parabolischen Bogens verhielte, wie $1 : \sqrt{2}$. Fiele er also aus der Höhe SP gegen die Sonne mit demselben Gewichte, welches die Schwere ihm in dieser Höhe gegen die Sonne beibringen kann; so würde er (nach §. 18., Zusatz 9. des ersten Buches) in der Hälfte der Zeit einen Weg zurücklegen, welcher dem Quadrat der halben Sehne, dividirt durch die vierfache Höhe SP, d. h. $\frac{AJ^2}{4\,SP}$ gleich wäre.[308]) Da nun das Gewicht des Kometen gegen die Sonne in der Höhe SN sich zu seinem Gewichte in der Höhe SP verhält, wie $PS^2 : SN^2 = SP : S\mu$ §. 57., Gl. 8.); so wird der Komet, vermöge des Gewichtes in der Höhe SN, während derselben Zeit einen Weg $\frac{AJ^2}{4\,S\mu} = J\mu = M\mu$ zurücklegen. W. z. b. w.

§. 59. Aufgabe. Man soll durch drei Beobachtungen die Bahn eines Kometen in einer Parabel bestimmen.

Ich habe auf vielfach verschiedene Weise die Auflösung dieser sehr schwierigen Aufgabe versucht, und um hierzu gelangen zu können, die sich hierauf beziehenden Aufgaben des ersten Buches gelöst. Später aber fand ich die hier folgende Auflösung, welche ein wenig einfacher ist.

Es werden drei Beobachtungen ausgewählt, deren Zwischenzeiten, so weit es angeht, einander gleich seien; jedoch so, dass die Zwischenzeit in dem Falle, wo der Komet sich langsamer bewegt, etwas grösser als die andere sei. Es verhalte sich z. B. der Unterschied dieser Zeiten zu ihrer Summe, wie die letztere zu etwa 600 Tagen, oder es falle der Punkt E (Figur 209.) nahe auf den Punkt M, und neige sich von da mehr nach J, als nach A hin. Hat man keine solche Beobachtungen, so muss man nach §. 52. einen neuen Kometenort bestimmen.

S bezeichne die Sonne, T, t, τ drei Oerter der Erde in ihrer grossen Bahn, TA, tB, τC drei beobachtete Längen des Kometen; V die zwischen der ersten und zweiten, W die zwischen der zweiten und dritten Beobachtung verflossene Zeit, X die gerade Linie, welche der Komet während dieser ganzen Zeit mit derjenigen Geschwindigkeit durchlaufen könnte, die er im mittleren Abstande der Erde von der Sonne hat und welche man nach §. 50., Zusatz 3. findet; endlich sei tV perpendikulär auf die Sehne Tτ.

In der mittleren beobachteten Länge tB nehme man den einen beliebigen Punkt B als den Ort des Kometen in der Ebene der Ekliptik an und ziehe nach der Sonne S die Linie BE, welche sich zum Pfeil tV verhält, wie $SB \,.\, St^2$ zum Cubus der Hypothenuse in einem rechtwinkeligen Dreieck, dessen Katheten BS und die Tangente der Breite des Kometen in der zweiten Beobachtung, für den Radius tB, sind. Durch den Punkt E ziehe man (nach §. 53.) die Linie AE und EC, deren durch die Linie TA und τC begrenzten Theile AE und EC sich zu einander verhalten, wie V : W. Alsdann werden A und C sehr nahe

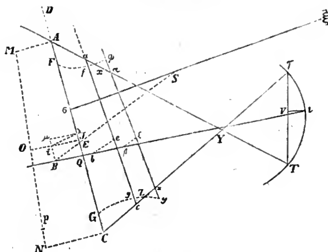


Fig. 210.

die Oerter des Kometen in der Ebene der Ekliptik für die erste und dritte Beobachtung sein; vorausgesetzt, dass B, der der zweiten Beobachtung entsprechende Ort, genau angenommen worden sei.

Man errichte im Punkt J, welcher die Linie AC halbirt, das Perpendikel Ji, denke sich durch B Bi $\mp$ AC gezogen, ferner die Linie Si, welche AC in λ schneidet und vollende das Parallelogramm $iJ\lambda\mu$. Hierauf mache man $J\sigma = 3 . J\lambda$ und denke sich durch die Sonne S die Linie $\sigma\xi = 3\ S\sigma + 3\ i\lambda$ gezogen. Indem man sich nun die Buchstaben A, C, E, J fortgelöscht denkt, stelle man sich die Linie BE von B gegen ξ hingeführt vor, und zwar verhalte sich diese neue Linie zur ersten, BE wie $BS^2 : (S\mu + \frac{1}{3} i\lambda)^2$. Zieht man hierauf durch E aufs neue die Linie AEC, indem man dasselbe Verfahren wie vorhin beobachtet, d. h. dass AE und EC sich zu einander verhalten, wie die zwischen den Beobachtungen verflossenen Zeiten V : W; so werden A und C mit grösserer Genauigkeit die Oerter des Kometen sein.

Man errichte auf AC die Perpendikel AM, CN, JO, und zwar mögen die beiden ersteren den Tangenten der Breite in der ersten und dritten Beobachtung, respective für den Radius TA und τC, gleich sein. Hierauf ziehe man MN, welche JN in O schneidet, und construire das Parallelogramm $iJ\lambda\mu$ wie vorhin. Auf der verlängerten Linie JA sei $JD = S\mu + \frac{2}{3} i\lambda$ angenommen. Nun nehme man auf MN nach N zu die Linie MP an, welche sich zu der vorher gefundenen Länge X verhalte, wie die Quadratwurzel aus dem mittleren Abstande der Erde von der Sonne (oder der halben Axe der grossen Bahn) zur Quadratwurzel aus OD. Fällt der Punkt P auf N, so sind A, B, C die drei Kometenörter, durch welche seine Bahn in der Ebene der Ekliptik gezogen

werden muss. Fällt P nicht auf N, so muss man auf der Linie AC CG = NP annehmen, dergestalt, dass die Punkte G und P nach derselben Seite der Linie NC hin fallen.

Nach derselben Methode, nach welcher man die Punkte A, E, C, G mittelst des angenommenen Punktes B gefunden hat, wird man neue Punkte a, e, c, g und α, ε, $\varkappa$, γ finden, indem man sich anderer beliebiger Punkte b und β statt B bedient. Zieht man hierauf durch G, g und γ die Peripherie Ggγ eines Kreises, welche τC in Z schneidet; so wird dieser Punkt ein Ort des Kometen in der Ebene der Ekliptik sein. Nimmt man ferner auf AC, ac, $\alpha\varkappa$ die Linien AF, af, $\alpha\varphi$ respective gleich CG, cg, $\varkappa\gamma$ an und zieht man durch die Punkte F, f, φ die Peripherie Ffφ eines Kreises, welcher die Linie AT in X schneidet; so wird X ein anderer Ort des Kometen in der Ebene der Ekliptik sein. Hierauf errichte man in X und Z die Tangenten der Breite des Kometen, bezüglich für die Radien TX und τZ, und erhält so zwei Oerter des Kometen in seiner eigenen Bahn. Endlich ziehe man (nach §. 40. des ersten Buches, durch diese beiden Oerter eine Parabel, deren Brennpunkt S sei; alsdann wird diese die Bahn des Kometen sein.

Der Beweis dieser Construction ergiebt sich aus den vorhergehenden Lehrsätzen. Nach §. 53. ist nämlich die gerade Linie AC im Punkt E im Verhältniss der Zeiten geschnitten, wie es im §. 54. verlangt wird und (nach §. 58.) ist BE der Theil der Linie BS oder Bξ in der Ebene der Ekliptik, welcher zwischen dem Bogen ABC und der Sehne AEC liegt; endlich ist MP (nach §. 57., Zusatz) die Länge der Sehne desjenigen Bogens, welchen der Komet in der eigenen Bahn zwischen der ersten und dritten Beobachtung durchlaufen muss. Diese letztere Linie wird daher gleich MN, vorausgesetzt dass B der wahre Ort des Kometen in der Ebene der Ekliptik sei.

Uebrigens muss man die Punkte B, b und β nicht beliebig, sondern nahe bei einander annehmen. Kennt man nahezu den Winkel AQt, unter welchem die in der Ebene der Ekliptik beschriebene Bahn die Linie Bt schneidet; so muss man unter diesem Winkel die unbekannte Linie AC so ziehen, dass $AC : \frac{4}{3} T\tau = \sqrt{SQ} : \sqrt{St}$ werde. Zieht man nun SEB, deren Theil EB = Vt wird, so kann man den Punkt B bestimmen, welchen man zuerst annehmen muss. Wischt man nun die Linie AC fort, und zieht sie nach der vorgehenden Construction aufs neue und findet man ferner die Linie MP; so nimmt man den Punkt b so auf tB an, dass, wenn Y der Durchnittspunkt von TA und τC ist, $Yb : YB = \left\{ \begin{matrix} \sqrt{SB} : \sqrt{Sb} \\ MP : MN \end{matrix} \right.$ werde. Auf dieselbe Weise wird man den dritten Punkt β finden, wenn man die Operation zum dritten Mal wiederholen will; allein nach dieser Methode werden zwei Operationen meistentheils ausreichend sein. Ist nämlich der Abstand Bb sehr klein, so werden, nachdem man die Punkte F, f und G, g gefunden hat, die geraden

Linien Ff und Gg die Linien TA und rC sehr nahe in den gesuchten Punkten X und Z schneiden.

Beispiel. Es sei der Komet von 1680 gegeben. Seine nach **Flamsteed's** Beobachtungen berechnete und von **Halley** nach denselben Beobachtungen verbesserte Bewegung ist in der folgenden Tafel aufgestellt.

	Scheinbare Zeit.	Wahre Zeit.	Länge des Sonne,	Des Kometen Länge.	Des Kometen Nördl. Breite.
1680 Dec. 12.	4h 46m	4h 46m 0s	♑ 1° 51′ 23″	♑ 6° 32′ 30″	8° 28′ 0″
21.	6 32,5	6 36 59	11 6 44	♒ 5 8 12	21 42 13
24.	6 12	6 17 52	14 9 26	18 49 23	25 23 5
26.	5 14	5 20 44	16 9 22	28 24 13	27 0 52
29.	7 55	8 3 2	19 19 43	♓ 13 10 41	28 9 58
30.	8 2	8 10 26	20 21 9	17 38 20	28 11 53
1681 Jan. 5.	5 51	6 1 38	26 22 18	♈ 8 48 53	26 15 7
9.	6 49	7 0 53	♒ 0 29 2	18 44 4	24 11 56
10.	5 54	6 6 10	1 27 43	20 40 50	23 43 52
13.	6 56	7 8 55	4 33 20	25 59 48	22 17 28
25.	7 44	7 58 42	16 45 36	♉ 9 35 0	17 56 30
30.	8 7	8 21 53	21 49 58	13 19 51	16 42 18
Febr. 2.	6 20	6 34 51	24 46 59	15 13 53	16 4 1
5.	6 50	7 4 41	27 49 51	16 59 6	15 27 3

Diesen Beobachtungen füge man folgende von mir angestellte hinzu:

	Scheinbare Zeit.	Des Kometen Länge.	Des Kometen Nördl. Breite.
1681 Februar 25.	8h 30m	♉ 26° 18′ 35″	12° 46′ 46″
27.	8 15	27 4 30	12 36 12
März 1.	11 0	27 52 42	12 23 40
2.	8 0	28 12 48	12 19 38
5.	11 30	29 18 0	12 3 16
7.	9 30	♊ 0 4 0	11 57 0
9.	8 30	0 43 4	11 45 52

Diese Beobachtungen wurden mit einem siebenfüssigen Teleskop und einem Mikrometer, dessen Fäden im Brennpunkte des Teleskopes aufgestellt waren, gemacht. Mittelst dieser Instrumente wurde die Lage der Fixsterne unter sich, und die des Kometen gegen jene Sterne bestimmt. A bezeichne den Stern 4. Grösse an der linken Ferse des Perseus (o nach **Bayer**), B den folgenden Stern 3. Grösse am linken Fusse (ζ nach **Bayer**) und C den Stern 6. Grösse an der Ferse desselben Fusses (n nach **Bayer**) und D, E, F, G, H, J, K, L, M, N, O, Z, α, β, γ, δ andere kleinere Sterne desselben Fusses. Ferner seien p, P, Q, R, S, T, V, X die Oerter des Kometen bei den oben beschriebenen Beobachtungen.

Setzt man den Abstand AB = $80^7/_{12}$ Theilen, so war AC = $52^1/_4$, BC = $58^5/_6$, AD = $57^5/_{12}$, BD = $82^6/_{11}$, CD = $23^2/_3$, AE = $29^4/_7$, CE = $57^1/_2$, DE = $49^{11}/_{12}$, AJ = $27^7/_{12}$, BJ = $52^1/_6$, CJ = $36^7/_{12}$,

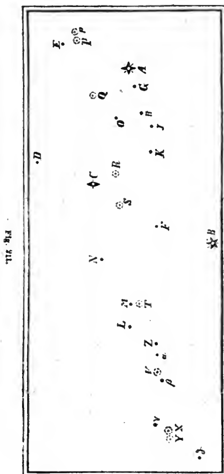


Fig. 311.

$DJ = 53^5/_{12}$, $AK = 38^2/_3$, $BK = 43$, $CK = 31^5/_9$, $FK = 29$, $FB = 23$, $FC = 36^1/_4$, $AH = 18^6/_7$, $DH = 50^7/_8$, $BN = 46^5/_{12}$, $CN = 31^1/_3$, $BL = 45^5/_{12}$, $NL = 31^5/_7$ Theilen.

Ferner verhält sich HO : HJ = 7 : 6, und verlängerte man die erste Linie, so ging sie zwischen den Sternen D und E durch, so dass der Abstand des Sternes D von dieser Linie = $^1/_6$CD war. Ferner verhielt sich LM : LN = 2 : 9, und verlängert ging LM durch den Stern H. Hierdurch wurden die gegenseitigen Oerter der Fixsterne bestimmt.

Endlich hat unser **Pound** die Oerter dieser Fixsterne auf's neue

durch Beobachtungen bestimmt nnd die Länge und Breite der Sterne in der folgenden Tafel angegeben.

Fixsterne.	Länge.	Nördliche Breite.	Fixsterne.	Länge.	Nördliche Breite.
A	♉ 26° 41′ 50″	12° 8′ 36″	L	♉ 29° 33′ 34″	12° 7′ 48″
B	28 40 23	11 17 54	M	29 18 54	12 7 20
C	27 58 30	12 40 25	N	28 48 29	12 31 9
E	26 27 17	12 52 7	Z	29 44 48	11 57 13
F	28 28 37	11 52 22	α	29 52 3	11 55 48
G	26 56 8	12 4 58	β	♊ 0 8 23	11 48 56
H	27 11 45	12 2 1	γ	0 40 10	11 55 18
J	27 25 2	11 53 11	δ	1 3 20	11 30 42
K	27 42 7	11 53 26			

Ich beobachtete aber die Oerter des Kometen gegen diese Sterne auf folgende Weise.

Am Freitag, den 25. Februar a. Styls um $8^1/_2{}^h$ Abends, befand sich der Komet in p, und sein Abstand vom Sterne E war kleiner als $^3/_{13}$AE nnd grösser als $^1/_5$AE; also nahe $= {}^{14}/_{65}$ oder $^3/_{14}$AE. Der Winkel ApE war nur ein wenig stumpf nnd nahe $= 90^0$, so dass, wenn man aus A ein Perpendikel auf pE fällte, der Abstand des Kometen von demselben $= {}^1/_5$pE war.

In derselben Nacht, um $9^1/_2{}^h$ befand sich der Komet in P nnd sein Abstand vom Stern E lag zwischen $\frac{1}{5^1/_4}$AE nnd $\frac{1}{4^1/_2}$AE, war also nahe $= \frac{1}{4^7/_8}$ AE $= \frac{8}{39}$ AE.

Ferner war der Komet von dem Perpendikel, welches vom Stern A auf die Linie PE gefällt war, nm $^4/_5$PE entfernt.

Am Sonntag, den 27. Februar um $8^1/_4{}^h$ Abends, befand sich der Komet in Q nnd sein Abstand vom Stern O war der gegenseitigen Entfernung der Sterne O nnd H gleich. Die Linie QO ging verlängert zwischen den Sternen K und B hindurch. Genauer kann ich die Lage dieser Linie nicht bestimmen, weil Wolken dazwischen traten.

Am Dienstag den 1. März um 11^h Abends, befand sich der Komet in R, genau zwischen den Sternen K nnd C. Der Theil CR der Linie CRK war ein wenig $> {}^1/_3$CK nnd etwas $< {}^1/_3$CK $+ {}^1/_8$CR; sie war also etwa $= {}^1/_3$CK $+ {}^1/_{16}$CR und daher CR $= {}^{16}/_{45}$CK.

Am Mittwoch, den 2. März um 8^h Abends, stand der Komet in S, und sein Abstand vom Stern C war sehr nahe $= {}^4/_9$CF. Der Abstand des Sterns F von der verlängerten Linie CS betrug $^1/_{24}$CF nnd der Abstand des Sterns B von derselben Linie war 5mal so gross als der Abstand des Sterns F. Ferner ging die verlängerte Linie NS zwischen den Sternen H und J hindurch, fünf- oder sechsmal näher an H als an J.

Am Sonnabend, den 5. März um $11^1/_2$ Uhr Abends, befand sich der Komet in T und die Linie MT war $= {}^1/_2$ML. Ferner ging die verlängerte Linie LT zwischen B und F, und zwar 4- bis 5mal näher an F als an B hindurch, so dass sie von BF $^1/_5$ oder $^1/_6$ nach F hin abschnitt. MT ging verlängert ausserhalb BF fort, 4mal näher an B als an F. M war ein sehr kleiner Stern, welchen man kaum im Fernrohre wahrnehmen konnte, L etwas über 8. Grösse.

Am Montag, den 7. März um $9^1/_2{}^h$ Abends, stand der Komet in V. Die verlängerte Linie $V\alpha$ ging zwischen B und F hindurch und schnitt von BF, nach F zu, $^1/_{10}$BF ab. Es verhielt sich $V\alpha : V\beta = 5 : 4$ und der Abstand des Kometen von der Linie $\alpha\beta$ war $= {}^1/_2 V\beta$.

Am Mittwoch, den 9. März um $8^1/_2$ Uhr Abends, befand sich der Komet in X. Die Linie γX war $= {}^1/_4\gamma\delta$, und das vom Stern δ auf die Linie γX gefällte Perpendikel $= {}^2/_5\gamma\delta$.

In derselben Nacht um 12 Uhr stand der Komet in Y, und es war die Linie $\gamma Y = {}^1/_3\gamma\delta$, oder etwas kleiner, etwa $= {}^5/_{16}\gamma\delta$. Das vom Stern δ auf die Linie γY gefällte Perpendikel war ungefähr $^1/_6$ oder $^1/_7$. Der Komet konnte aber kaum gesehen werden, weil er dem Horizont sehr nahe war, und man konnte seinen Ort nicht mit derselben Genauigkeit bestimmen, wie bei den vorhergehenden Beobachtungen.

Aus diesen Beobachtungen bestimmte ich, durch Construction und Rechnung, die Längen und Breiten des Kometen; Pound verbesserte diese Oerter nach seinen verbesserten Sternörtern, und so sind die oben angegebenen Kometenörter entstanden. Ich bediente mich eines nicht sehr künstlich gearbeiteten Mikrometers; indessen überschreiten die Fehler der Längen und Breiten, so weit sie von meinen Beobachtungen herrühren, kaum 1 Minute Uebrigens fing, nach meinen Beobachtungen, der Komet am Ende seiner Bewegung an, sich beträchtlich gegen Norden von dem Parallel zu entfernen, auf welchem er sich Ende Februar befunden hatte.

Um hierauf die Bahn des Kometen zu bestimmen, wählte ich drei der oben beschriebenen Beobachtungen Flamsteeds aus, nämlich die vom 21. December, 5. und 25. Januar und fand mittelst derselben St = 9842,1, Vt = 455 (Figur 210), wenn die halbe grosse Axe der Erdbahn = 10000 angenommen war. Indem ich nun bei der ersten Operation Bt = 5657 annahm, ergab sich: SB = 9747, BE = 412 (beim ersten Male), $S\mu$ = 9503, $i\lambda$ = 413. Beim zweiten Male BE = 421, OD = 10186, X = 8528,4[309]), MN = 8450, MN = 8475, NP = 25. Hieraus erhielt ich für die zweite Operation tb = 5640, und mittelst dieses Werthes TX = 4775, ,Z = 11322.

Bei der Bestimmung der Bahn fand ich, unter Anwendung der aufgestellten Werthe:

die Länge des aufsteigenden Knotens in .	♑	1°	53′
die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik .	=	61	20⅓′
den Abstand des Perihels vom Knoten . .	=	8	38
die Länge des Perihels	= ♐	27	43[310]
dessen südliche Breite	=	7	34
den Parameter	=	236,8	
und die Fläche, welche der Komet in den einzelnen Tagen mit dem nach der Sonne gezogenen Radius vector beschrieb	=	93585,	

vorausgesetzt, dass die halbe grosse Axe der Erdbahn = 10000 sei. Der Komet ging aber in dieser Bahn nach der Ordnung der Zeichen fort, und befand sich im Perihel am 8. December $0^h\ 4^m$ Nachmittags. Alle diese Bestimmungen wurden graphisch ausgeführt, mittelst eines in gleiche Theile getheilten Maassstabes, die Sehnen der Winkel wurden aus der Tafel der natürlichen Sinusse genommen. Ich entwarf eine grosse Figur, in welcher die halbe grosse Axe der Erdbahn (welche wie oben = 10000 Theilen angenommen war) 16½ englische Zoll betrug.

Um endlich zu erfahren, ob der Komet wirklich die so gefundene Bahn durchliefe, bestimmte ich durch theils arithmetische, theils graphische Operationen die Oerter des Kometen in derselben für die Zeiten einiger der angestellten Beobachtungen. Dies sieht man in der folgenden Tabelle.

	Abstände des Kometen von der Sonne.	Berechnete		Beobachtete		Unterschied R — B.	
		Länge.	Breite.	Länge.	Breite.	in Länge.	in Breite.
Dec. 12.	2792	♑ 6°32′	8° 18½′	♑ 6°31⅓′	8° 26′	+ ⅔′	— 7½′
29.	8403	♓ 13 13⅔	28 0	♓ 13 11¾	28 10 1/12	+ 2	— 10 1/12
Febr. 5.	16669	♉ 17 0	15 29⅔	♉ 16 59⅞	15 27⅖	0	+ 2 4/15
März 5.	21737	29 19¾	12 4	29 20 6/7	12 3½	— 1	+ ½

Halley hat seitdem diese Bahn durch arithmetischen Calcul genauer bestimmt, als dies auf graphische Weise geschehen konnte. Er fand, wie wir die Länge des aufsteigenden Knotens . = ♑ 1° 53′
die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik . . . . = 61 20⅓
den Winkelstand des Perihels vom Knoten aber durch Messung . . . . = 9 20
die Zeit der Sonnennähe am 8. December $0^h\ 4^m$, den Parameter = 2430, für die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde = 100000. Mittelst dieser Elemente bestimmte er, ebenfalls durch eine genaue arithmetische Rechnung die Oerter des Kometen für die Zeiten der Beobachtungen, wie aus der folgenden Tafel zu ersehen ist.

Wahre Zeit.	Abstand d. Komet von der Sonne.	Berechnete. Länge.	Berechnete. N. Breite.	Beobachtete. Länge.	Beobachtete. N. Breite.	Unterschied R. — B. Länge.	Unterschied R. — B. Breite.
Dec. 12. 4ᵘ 46ᵐ	28028	♑ 6°29′25″	8°26′ 0″	♑ 6°32′30″	8°28′ 0″	—3′ 5″	—2′ 0″
21. 6 37	61076	♒ 5 6 30	21 43 20	♒ 5 8 12	21 42 13	—1 42	+1 7
24. 6 18	70008	18 48 20	25 22 40	18 49 23	25 23 5	—1 3	—0 25
26. 5 21	75576	28 22 45	27 1 36	28 24 13	27 0 52	—1 28	+0 44
29. 8 3	84021	♓ 13 12 40	28 10 10	♓ 13 10 41	28 9 58	+1 59	+0 12
30. 8 10	86661	17 40 5	28 11 20	17 38 20	28 11 53	+1 45	—0 33
Jan. 5. 6 1,5	101440	♈ 8 49 49	26 15 15	♈ 8 48 53	26 15 7	+0 56	+0 8
9. 7 0	110959	18 44 36	24 12 54	18 44 4	24 11 56	+0 32	+0 58
10. 6 6	113162	20 41 0	23 44 10	20 40 50	23 43 52	+0 10	+0 18
13. 7 9	120000	26 0 21	22 17 30	25 59 48	22 17 28	+0 33	+0 2
25. 7 59	145370	♉ 9 33 40	17 57 55	♉ 9 35 0	17 56 30	—1 20	+1 25
30. 8 22	155303	13 17 41	16 42 7	13 19 51	16 42 18	—2 10	—0 11
Febr. 2. 6 35	160951	15 11 11	16 4 15	15 13 53	16 4 1	—2 42	+0 14
5. 7 4,5	166686	16 58 25	15 29 13	16 59 6	15 27 3	—0 41	+2 10
25. 8 41	202570	26 15 46	12 48 0	16 18 35	12 46 46	—2 49	+1 14
März 5. 11 39	216205	29 18 35	12 5 40	29 18 0	12 3 16	+0 35	+2 24

Dieser Komet war schon vom Monat November an gesehen und in Coburg von Gottfried Kirch am 4., 6. und 11. desselben Monats alten Styls beobachtet worden. Aus seiner Lage in Bezug auf die nächsten Fixsterne, deren Oerter mit den von Pound bestimmten identisch waren, welche relative Lage er theils mit einem zwei-, theils mit einem zehnfüssigen Fernrohre bestimmt hatte, hat Halley, bei einem Längenunterschiede von 11° zwischen Coburg und London, die Oerter des Kometen folgendermaassen hergeleitet:

A. 3. Nov. 17^h 2^m scheinb. Lond. Zeit w. s. Länge ♌ 29° 51′, n. Br. 1° 17′ 45″
„ 5. „ 15 58 „ „ „ „ „ ♍ 3 23 „ 1 6
„ 10. „ 16 31 war der Komet gleich weit von den beiden Sternen entfernt, welche Bayer mit σ und τ bezeichnet. Er berührte aber noch nicht die sie verbindende Linie, sondern war etwas davon entfernt. Im Sternkatalog von Flamsteed hatte σ damals nahebei

die Länge = ♍ 14° 15′ und die nördl. Breite = 1° 41′
τ hatte die „ = ♍ 17 3,5 „ „ südl. „ = 0 34.

Der in der Mitte zwischen beiden liegende Punkt hatte daher

die Länge = ♍ 15° 39″,25 und die nördl. Breite = 0° 33′,5.

Es betrage der Abstand des Kometen von dieser Linie ungefähr 10 oder 12 Minuten, alsdann ist der Längenunterschied desselben und dieses Punktes 7′ und der Breitenunterschied beider 7,5. Der Komet hatte demnach die Länge = ♍ 15° 32′ und die nördliche Breite 0° 26′.[311]

Die erste dieser Beobachtungen, mittelst der Stellung des Kometen gegen einige kleine Fixsterne, war hinreichend genau, eben so die zweite; bei der dritten, weniger genauen, kann der Fehler 6′ bis 7′ oder etwas mehr betragen. Die Länge des Kometen in der ersten Beobachtung welche genauer als die übrigen war, wurde in der bereits besprochenen parabolischen Bahn berechnet, und es ergab sich

seine Länge . . . . = ♌ 29° 30′ 22″
nördl. Breite . . . . = 1 25 7
der Abstand von der Sonne . = 115546.

Halley hatte ferner bemerkt, dass ein ausgezeichneter Komet viermal nach einer Zwischenzeit von 575 Jahren erschienen war, nämlich im September nach dem Tode des Julius Cäsar, im Jahre 531 n. Chr. Geburt, unter dem Consulat von Lampadius und Orestes, im Februar 1106 und endlich gegen Ende des Jahres 1680. Jedes Mal sah man einen sehr grossen und glänzenden Schweif (mit Ausnahme des ersten Males, wo der Schweif wegen der Lage der Erde weniger gross erschien). Halley suchte daher eine elliptische Bahn, deren grosse Axe = 1382957 Theilen war, den mittleren Abstand der Erde von der Sonne = 10000 Theilen gesetzt, in welcher Bahn der Komet seinen Umlauf während 575 Jahre vollenden könnte. Er setzte ihren . . . ☋ in ♋ 2° 2'
also ihren . . . . ☊ in ♑ 2 2
die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik . = 61 6 48"
das Perihel des Kometen fand er in . . . ♐ 22 44 25
und die entsprechende Zeit der Sonnennähe am 7. December 23h 9m. Ferner ergab sich der Abstand des Perihels vom ☊ auf der Ebene der Ekliptik = 9° 17' 35", die kleine Axe = 18481,2.

Er berechnete hierauf die Bewegung des Kometen in dieser elliptischen Bahn und seine Oerter. Sowohl die aus den Beobachtungen hergeleiteten, als auch die in dieser Bahn berechneten finden sich in der folgenden Tafel, wo in der Rubrik der berechneten Breite durch + nördliche und durch — südliche bezeichnet wird.

Wahre Zeit.			Beobachtete.		Berechnete.		R.—B.	
			Länge.	N. Breite.	Länge.	Breite.	Länge.	Breite.
Nov.	3.	16h 47m	♌ 29°51' 0"	1°17'45"	♌ 29°51'22"	+ 1°17'32"	+0'22"	—0'13"
	5.	15 37	♍ 3 23 0	1 6 0	♍ 3 24 32	+ 1 6 9	+1 32	+0 9
	10.	16 18	15 32 0	0 27 0	15 33 2	+ 0 25 7	+1 2	—1 53
	16.	17 0			♎ 8 16 45	— 0 53 7		
	18.	21 34			18 52 15	— 1 26 54		
	20.	17 0			28 10 36	— 1 53 35		
	23.	17 5			♏ 13 22 42	— 2 29 0		
Dec.	12.	4 46	♑ 6 32 30	8 28 0	♑ 6 31 20	+ 8 29 6	—1 10	+1 6
	21.	6 37	♒ 5 8 12	21 42 13	♒ 5 6 14	+21 44 42	—1 58	+2 29
	24.	6 18	18 49 23	25 23 5	18 47 30	+25 23 35	—1 53	+0 30
	26.	5 21	28 24 13	27 0 52	28 21 42	+27 2 1	—2 31	+1 9
	29.	8 3	♓ 13 10 41	28 9 58	♓ 13 11 14	+28 10 38	+0 33	+0 40
	30.	8 10	17 38 20	28 11 53	17 38 27	+28 11 37	+0 7	—0 16
Jan.	5.	6 1,5	♈ 8 48 53	26 15 7	♈ 8 48 51	+26 14 57	—0 2	—0 10
	9.	7 1	18 44 4	24 11 56	18 43 51	+24 12 17	—0 13	+0 21
	10.	6 6	20 40 50	23 43 32	20 40 23	+23 43 25	—0 27	—0 7
	13	7 9	25 59 48	22 17 28	26 0 8	+22 16 32	+0 20	—0 56
	25.	7 59	♉ 9 35 0	17 56 30	♉ 9 34 11	+17 56 6	—0 49	—0 24
	30.	8 22	13 19 51	16 42 18	13 18 28	+16 40 5	—1 23	—2 13
Febr.	2.	6 35	15 13 53	16 4 1	15 11 59	+16 2 7	—1 54	—1 54
	5.	7 4,5	16 59 6	15 27 3	16 59 17	+15 27 0	+0 11	—0 3
	25.	8 41	26 18 35	12 46 46	26 16 59	+12 45 22	—1 36	—1 24
März.	1.	11 10	27 52 42	12 23 40	27 51 47	+12 22 28	—0 55	—1 12
	5.	11 39	29 18 0	12 3 16	29 20 11	+12 2 50	+2 11	—0 26
	9.	8 38	♊ 0 43 4	11 45 52	♊ 0 42 43	+11 45 35	—0 21	—0 17

Die Beobachtungen dieses Kometen, vom Anfang bis zum Ende seiner Sichtbarkeit, stimmen eben so nahe mit der Bewegung in der eben beschriebenen Bahn überein, als die Bewegungen der Planeten mit ihren Theorien übereinzustimmen pflegen. Diese Uebereinstimmung beweist, dass es stets ein und derselbe Komet war, welcher sich während dieser ganzen Zeit zeigte und dass seine Bahn bestimmt worden ist.

Wir haben in der vorhergehenden Tafel die am 16., 18., 20. und 23. November angestellten Beobachtungen fortgelassen, weil sie weniger genau waren. Ponthaeus und seine Gefährten beobachteten am 17. November alten Styls um 6^h Morgens in Rom, d. h. um $6^h\ 10^m$ Londoner Zeit, den Kometen mittelst Fäden, welche nach Fixsternen orientirt waren, und fanden ihn in ♎ $8^0\ 30'$ Länge bei einer südlichen Breite von $0^0\ 20'$. Ihre Beobachtungen befinden sich in einer Abhandlung, welche Ponthaeus über diesen Kometen herausgegeben hat. Cellius, welcher dabei zugegen war und seine Beobachtungen Cassini zuschickte, sah den Kometen um dieselbe Zeit in ♎ $8^0\ 30'$, bei einer südlichen Breite von $0^0\ 30^0$. Gallatius beobachtete den Kometen in Avignon zu einer Zeit, welche $5^h\ 42^m$ Morgens Londoner Zeit entspricht, und fand ihn in ♎ 8^0, ohne Breite. Nach der Theorie hätte er in ♎ $8^0\ 16'\ 45''$ stehen und die südliche Breite $0^0\ 53'\ 7''$ haben sollen.

Am 18. November um $6^h\ 30^m$ Morgens in Rom, welche $5^h\ 40^m$ Londoner Zeit entspricht, sah Ponthaeus den Kometen in ♎ $13^0\ 30'$ Länge und südlicher Breite $1^0\ 20'$, Cellius fand ♎ $13^0\ 30'$ Länge und südlicher Breite $1^0\ 0'$. Gallatius beobachtete den Kometen um $5^h\ 30^m$ Morgens zu Avignon in ♎ $13^0\ 0'\ 13^0\ 0'$ Länge und $1^0\ 0'$ südlicher Breite. Ferner beobachtete ihn Ango auf der Akademie von Fleche in Frankreich um 5^h Morgens (welche Zeit $5^h\ 9^m$ Londoner Zeit entspricht,[313]) in der Mitte zweier kleiner Sterne, von denen der eine der mittelste von drei in gerader Linie und in der linken Hand der Jungfrau befindlichen Sternen ist und welchen Bayer mit ψ bezeichnet und der andere der letzte Stern ihres Flügels ist, den Bayer mit θ bezeichnet hat. Hiernach befand sich der Komet damals in ♎ $12^0\ 46'$ Länge und $0^0\ 50'$ südlicher Breite. An demselben Tage wurde der Komet zu Boston in Neu-England, dessen Breite $42^0,5$ ist, um 5^h Morgens ($9^h\ 44^m$ Londoner Zeit entsprechend) in ♎ 14^0 Länge und $1^0\ 30'$ nördlicher Breite gesehen, wie ich von Halley erfahren habe.

Am 19. November um $4^1/_2$ Uhr Morgens zu Cambridge beobachtete ein junger Mann den Kometen, welcher ungefähr um 2^0 von der Aehre in der Jungfrau gegen Nordwesten abstand. Diese Aehre hatte aber die Länge ♎ $19^0\ 23'\ 47''$ und die nördliche Breite $2^0\ 1'\ 59''$. An demselben Tage, um 5^h Morgens zu Boston, war der Komet von der Aehre um ungefähr 1^0 entfernt, und der Unterschied der Breiten betrug $40'$. Auf Jamaika war an eben diesem Tage der Komet von der Aehre um etwa 1^0 entfernt. Dr. Arthur Storer sah ebenfalls an demselben Tage am Flusse Patnkent, nahe bei Hunting Creek in Mary-

land, in der Nähe der Grenze von Virginien und in einer Breite von $38^0,5$, um 5^h Morgens (10^h Londoner Zeit entsprechend) den Kometen oberhalb der Aehre in der Jungfrau und fast mit diesem Sterne in Berührung; da der Abstand zwischen beiden nur etwa $^3/_4{}^0$ betrug. Indem ich alle diese Beobachtungen benutze, finde ich, dass der Komet sich um 9^h 44^m Londoner Zeit in ♎ 18^0 50' Länge befand und eine südliche Breite von ungefähr 1^0 25' hatte. Nach der Theorie betragen diese Zahlen ♎ 18^0 52' 15'' und 1^0 26' 54''.

Am 20. November sah Dr. Montenarus, Professor der Astronomie in Padua, um 6^h Morgens zu Venedig (5^h 10^m Londoner Zeit entsprechend) den Kometen in ♎ 23^0 Länge und einer südlichen Breite von 1^0 30'. An demselben Tage stand zu Boston der Komet von der Aehre der Jungfrau um 4^0 gegen Osten in Länge entfernt; er befand sich daher ungefähr in ♎ 23^0 24' Länge.

Am 21. November beobachteten Ponthaens und seine Gefährten um $7^1/_2{}^h$ Morgens den Kometen in ♎ 27^0 50' Länge und 1^0 16' südlicher Breite, Cellius in ♎ 28^0, Ango um 5^h Morgens in ♎ 27^0 45', Montenasus in ♎ 27^0 51'. An demselben Tage sah man ihn auf Jamaika im Anfange des Scorpions, und seine Breite war ungefähr derjenigen der Aehre in der Jungfrau, d. h. 2^0 2' gleich. Ebenfalls an demselben Tage bestimmte man zu Balsora in Ostindien um 5^h Morgens (11^h 20^m der vorhergehenden Nacht in London) die Entfernung des Kometen von der Spica und fand sie = 7^0 35' gegen Osten. Er befand sich auf der geraden Linie, welche die Aehre mit der Wage verbindet, und hatte das ♎ 26^0 58' Länge und 1^0 11' südlicher Breite. 5 Stunden 40 Minuten später (d. h. um 5^h Morgens Londoner Zeit) befand er sich in ♎ 28^0 12' Länge und 1^0 16' südlicher Breite. Nach der Theorie hätte er ♎ 28^0 10' 36'' Länge und 1^0 53' 35'' südlicher Breite haben sollen.

Am 22. November sah Montenarus den Kometen in ♏ 2^0 33' Länge und in Boston wurde er in ♏ 3^0 Länge gesehen, wobei seine Breite fast dieselbe wie früher, nämlich 1^0 30' betrug. An demselben Tage, um 5^h Morgens zu Balsora, wurde der Komet in ♏ 1^0 50' Länge beobachtet; er hatte also um 5^h Morgens Londoner Zeit ungefähr die Länge ♏ 3^0 5'. Ebenfalls an demselben Tage, um $6^1/_2{}^h$ Morgens zu London sah Hook den Kometen in ungefähr ♏ 3^0 30', d. h. auf der geraden Linie, welche durch die Spica und das Herz des Löwen geht, und zwar nicht genau auf derselben, sondern ein wenig von ihr gegen Norden abstehend. Montenarus bemerkte gleichfalls, dass die vom Kometen nach der Aehre gezogene Linie, an diesem und den folgenden Tage, südlich vom Herzen des Löwen vorüberging, dass aber nur ein kleiner Raum zwischen diesem und jener Linie übrig blieb. Die gerade Linie, welche durch die Aehre der Jungfrau und das Herz des Löwen geht, schneidet die Ekliptik in ♏ 3^0 46' unter einem Winkel von 2^0 51', und wenn der Komet sich auf dieser Linie in ♏ 3^0

Länge befunden hätte; so würde seine südliche Breite 2° 26' betragen haben.[314]) Da aber nach den übereinstimmenden Beobachtungen von Hook und Montenarus der Komet ein wenig von dieser Linie gegen Norden abstand; so war seine südliche Breite etwas kleiner. Am 20. November war, nach Montenarus Beobachtung seine Breite ungefähr derjenigen der Spica in der Jungfrau gleich und betrug daher etwa 1° 30'. Nach Hook, Montenarus und Augo, welche mit einander übereinstimmen, nahm dieselbe beständig zu und musste daher merklich grösser als 1° 30' sein. Zwischen den beiden gefundenen Grenzen 2° 26' und 1° 30' ist der mittlere Werth seiner südlichen Breite ungefähr 1° 58'[315])

Der Schweif des Kometen war, nach Hook und Montenarus, gegen die Aehre in der Jungfrau gerichtet, indem er zu Folge des Ersteren ein wenig gegen Süden, nach dem Anderen ein wenig gegen Norden abweicht. Diese Abweichung war aber kaum bemerkbar und der Schweif sehr nahe dem Aequator parallel, wobei er von dem der Sonne gegenüberstehenden Punkte ein wenig nach Norden abwich.

Am 23 November alten Styls, um 5^h Morgens zu Nürnberg (d. h. um $4^1/_2$ Uhr Londoner Zeit) sah Dr. Zimmermann den Kometen in ♏ 8° 8' Länge bei einer südlichen Breite von 2° 31'. Seine Entfernungen wurden in Bezug auf Fixsterne bestimmt.

Am 24. November vor Sonnenaufgang sah Montenarus den Kometen in ♏ 12° 52' Länge, nördlich von der durch die Spica und das Herz des Löwen gezogenen Linie; er hatte also etwas weniger als 2° 38' nördliche Breite.[316]) Diese nahm, wie wir gesagt haben, nach den Beobachtungen von Hook, Montenarus und Ango beständig zu, und war daher etwas grösser als 1° 58' (2° 14' Bem. [315]) = 2° 18' (= $^1/_2$(2° 47' + 2° 16') = 2° 27') gesetzt worden. Nach Ponthaeus und Gallatins soll sie etwas kleiner sein, Cellius und der Beobachter in Neu-England haben sie = 1° oder 1° 30' gefunden. Die Beobachtungen von Ponthaeus und Celliuns, besonders die mittelst Azimuth und Höhe bestimmten, sind ziemlich roh, eben so die von Galletins. Besser sind diejenigen, welche mittelst der Stellung des Kometen gegen Fixsterne von Montenarus, Hook und Augo und dem Beobachter in Neu-England, wie auch bisweilen von Ponthaeus und Cellins angestellt worden sind. An demselben Tage wurde der Komet zu Balsora, um 5^h Morgens in ♏ 11° 45' Länge beobachtet. Er befand sich daher um 5^h Morgens Londoner Zeit ungefähr in ♏ 13° und nach der Theorie befand sich der Komet damals in ♏ 13° 22' 42" Länge.

Am 25. November vor Sonnenaufgang beobachtete Montenarus den Kometen ungefähr in ♏ $17^3/_4$° Länge, und Cellins bemerkte zu derselben Zeit, dass er sich auf der geraden Linie befand, welche den glänzenden Stern im linken Schenkel der Jungfrau mit der südlichen Schale der Wage verbindet. Diese Linie schnitt die Bahn des Kometen

in ♏ 18^0 36′ Länge. Nach der Theorie sollte der Komet sich in ungefähr ♏ $18^1/_3{}^0$ Länge befinden.

Diese Beobachtungen stimmen also eben so nahe mit der Theorie, als unter einander überein, und diese Uebereinstimmung beweist, dass es ein und derselbe Komet war, welchen man vom 4. November bis zum 9. März gesehen hat. Seine Bahn durchschnitt zweimal die Ekliptik, sie war also nicht geradlinig. Sio durchschnitt ferner die Ekliptik nicht in entgegengesetzten Theilen des Himmels, sondern am Ende der Jungfrau und im Anfange des Steinbockes, in einem Zwischenraume von ungefähr 98^0. Seine Bahn war also weit von einer Kreisform abweichend, denn im November war sein Abstand von der Ekliptik 3^0 gegen Süden, während er im December um 29^0 gegen Norden von ihr entfernt war; und diese beiden Theile seiner Bahn, in deren einem er sich der Sonne näherte, im anderen von ihr entfernte, schienen nach Montenarus' Beobachtungen um mehr als 30^0 von einander entfernt zu sein. Dieser Komet durchwandert 9 Zeichen vom letzten Grade des Löwen bis zum ersten Grade der Zwillinge; das Zeichen des Löwen nicht mitgerechnet, welche er durchlaufen hatte, ehe er anfing, sichtbar zu werden. Es giebt keine andere Theorie, welche dem Kometen eine regelmässige Bewegung in einem so grossen Theile des Himmels gestattet. Seine Bewegung war höchst ungleichförmig.

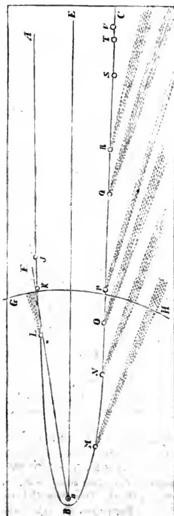


Fig. 212.

Gegen den 20. November durchlief er nämlich jeden Tag ungefähr 5^0, hierauf wurde seine Bewegung zwischen dem 26. Nov. und dem 12. Decemb. langsamer, indem er in einer Zwischenzeit von $15^1/_2$ Tagen

nur ungefähr 40° zurücklegte. Nun aber wurde seine Bewegung wieder beschleunigt, und zwar durchlief er täglich etwa 5°, bevor jene von neuem anfing, verzögert zu werden. Die Theorie nun, welche genau einer so ungleichförmigen Bewegung in einem sehr grossen Theile des Himmels entspricht, und welche von denselben Gesetzen abhängt, wodurch der Lauf des Planeten geordnet wird; eine Theorie, welche ferner so gut mit den genauesten astronomischen Beobachtungen übereinstimmt, kann nicht anders als wahr sein.

Uebrigens sieht man in der vorstehenden Zeichnung die Bahn, welche der Komet beschrieben, und den wahren Schweif, welchen er an den einzelnen Orten von sich geworfen hat. Hier ist ABC die Bahn des Kometen, D die Sonne, DE die Axe der Bahn, DF die Knotenlinie, GH der Durchschnitt der Kugel der grossen Bahn mit der Ebene der Kometenbahn. Ferner ist J sein Ort am 4., K. der am 11., L sein Ort am 19. November, M. der am 12., N am 21. und O am 22. December 1680, P sein Ort am 5., Q der am 25. Januar 1681, R der Ort am 5., S der am 25. Februar, T der Ort am 5., V der am 2. März. Folgende Beobachtungen habe ich benutzt, um seinen Schweif darzustellen.

Am 4. und 6. November war sein Schweif noch gar nicht sichtbar, am 11. November fing er an zu erscheinen, er zeigte sich aber in einem zehnfüssigen Fernrohre nicht grösser als $^1/_2$°. Am 17. November erschien er Ponthaens grösser als 15°, am 18. November war er 30° lang und in Neu-England sah man ihn der Sonne direct entgegengesetzt; er erstreckte sich bis zum Mars, welcher sich damals in ♏ 9° 54' Länge befand. Am 19. November erschien er in Maryland 15—20° lang; am 10. December ging er (nach Flamsteed's Beobachtung) durch die Mitte des Abstandes zwischen dem Schwanz der Schlange im Ophiuchus und dem Stern ζ im südlichen Flügel des Adlers und endete gegen die Sterne A, a, b in Bayer's Tafeln. Sein Endpunkt befand sich daher in etwa ♑ 19$^1/_2$° Länge bei 34$^1/_4$° nördlicher Breite.

Am 11. December erstreckte sich der Schweif bis zum Kopfe des Pfeils (α, β nach Bayer) und endete in ♑ 26° 43' Länge bei 38° 34' nördlicher Breite.

Am 12. December ging er durch die Mitte des Pfeils, und dehnte sich nicht weit darüber aus, indem er in ungefähr ♒ 4° Länge bei 42$^1/_2$° nördlicher Breite endete. Das Gesagte muss von den glänzendsten Theilen des Schweifes verstanden werden.

Ponthaeus, welcher am 12. December um 5^h 40^m in Rom, unter einem vielleicht heiteren Himmel beobachtete und die schwächern Theile des Lichtes unterscheiden konnte, fand, dass der Schweif um 10° über den hinteren Theil des Schwanes hinausging. Sein Seitenrand war um 45' gegen Nordwesten von diesem Sterne entfernt. Der Schweif hatte in diesen Tagen an seinem oberen Ende eine Breite von 3°, daher war seine Mitte von diesem Sterne um 2° 15' gegen Süden entfernt. Sein

oberes Ende befand sich in ♌ 22° Länge bei 61° nördlicher Breite; folglich hatte der Schweif eine Länge von ungefähr 70°.[317])

Am 21. December stieg er beinahe bis zum Sitze der Cassiopeia empor, indem er gleich weit von β und Schedir entfernt war, und zwar war sein Abstand von jedem dieser Sterne ihrer gegenseitigen Entfernung gleich. Er endete also in ♈ 24° Länge bei 47½° Breite.

Am 29. December berührte der Schweif den Stern Scheat, welcher links von ihm stand, und füllte genau den Zwischenraum der beiden Sterne im nördlichen Fusse der Andromeda aus. Seine Länge betrug 54° und er endete also in ♉ 19° Länge bei 35° Breite. Am 5. Januar berührte der Schweif den Stern π an der rechten Seite der Brust der Andromeda und den Stern μ an der linken Seite ihres Gürtels; er war (nach unseren Beobachtungen) 40° lang, krumm und seine convexe Seite gegen Süden gerichtet. Er bildete, nahe am Kopfe des Kometen einen Winkel von 4° mit dem Kreise, welcher durch die Sonne und den Kopf des Kometen ging. Am anderen Ende aber war er gegen diesen Kreis unter einem Winkel von 10 oder 11° geneigt und die Sehne des Schweifes bildete mit demselben Kreise einen Winkel von 8°.

Am 13. Januar war das Licht des Schweifes noch ziemlich bemerkbar zwischen Alamech und Algol und es endete sehr schwach in der Gegend des Sternes n an der Seite des Perseus. Der Abstand seines Endes von dem, den Komet und die Sonne verbindenden, Kreise betrug 3° 50′, und die Neigung der Sehne des Schweifes gegen diesen Kreis 8½°.

Am 25. und 26. Januar hatte der Schweif ein ziemlich schwaches Licht, welches sich auf 6 bis 7° in der Länge erstreckte. Sowohl in der einen, als der anderen folgenden Nacht war das Wetter sehr heiter und es dehnte sich der Schweif auf 12° und etwas mehr, mit einem sehr schwachen und kaum bemerkbaren Lichte aus. Seine Axe war genau gegen den leuchtenden Stern in der östlichen Schulter des Fuhrmannes gerichtet, und wich so von dem, der Sonne entgegengesetzten Punkte unter einen Winkel von 10° gegen Norden ab.

Endlich sah ich am 10. Februar mittelst eines Fernrohres den Schweif 10° lang; denn das besagte schwächere Licht konnte durch die Gläser nicht wahrgenommen werden. Ponthaens bemerkt indessen, er habe am 7. Februar den Schweif 12° lang gesehen.

Am 25. Februar und den folgenden Tagen hatte der Komet keinen Schweif mehr.

Wenn man die oben beschriebene Bahn betrachtet und auf die anderen Erscheinungen dieses Kometen achtet, so leuchtet ohne Schwierigkeit ein, dass die Kometen feste, dichte und dauerhafte Körper, wie die Planeten sein müssen.[318]) Wären sie nämlich nichts anderes, als Dämpfe und Ausdünstungen der Erde, Sonne und Planeten; so hätte dieser Komet sich im Augenblick seines Durchganges durch die Sonnennähe sogleich verflüchtigen müssen. Die Sonnenwärme ist nämlich

der Dichtigkeit ihrer Strahlen proportional, d. h. sie ist umgekehrt dem Quadrat des Abstandes des erwärmten Körpers von der Sonne proportional. Da nun am 8. December, wo er sich in seinem Perihel befand, der Abstand des Kometen vom Mittelpunkt der Sonne sich zur Entfernung der Erde von demselben Punkte, wie ungefähr 6 : 1000 verhielt; so stand die damalige Sonnenwärme im Kometen zu der im Sommer auf der Erde stattfindenden Wärme, wie 1000000 : 36 = 28000 : 1. Die Wärme des kochenden Wassers ist aber fast dreimal so gross, als diejenige, welche das feste Land der Erde im Sommer von den Sonnenstrahlen empfängt, wie ich durch Versuche gefunden habe. Ferner ist die Wärme des glühenden Eisens (wenn ich richtig muthmasse) drei- oder viermal so gross, als die des kochenden Wassers. Die Wärme, welche festes Land der Erde an dem Orte, wo der Komet sich in seiner Sonnennähe befand, von den Sonnenstrahlen aushalten müsste, würde also gleichsam 2000 Mal so gross, als die des glühenden Eisens sein, und in Folge einer solchen Erwärmung müssten Dämpfe, Ausdünstungen und jede flüchtige Materie augenblicklich verzehrt und zerstreut werden.[319])

Der Komet erhielt also in seinem Perihel eine ungeheure Erhitzung durch die Sonne, und kann diese Wärme sehr lange beibehalten. Eine Kugel von rothglühendem Eisen, deren Durchmesser 1 Zoll betrüge und während 1 Stunde der Luft ausgesetzt wäre, würde kaum ihre Wärme verlieren. Eine Kugel von grösserem Durchmesser würde ihre Wärme längere Zeit beibehalten, und zwar im Verhältniss ihres Durchmessers, weil ihre Oberfläche (welche das Maas für die Erkältung durch die umgebende Luft ist) in jenem Verhältniss mit der Menge der eingeschlossenen warmen Materie steht.[320]) Eine Kugel von rothglühendem Eisen, der Erde gleich, d. h. deren Durchmesser nahe 40000000 Fuss wäre, würde sich nur erst nach 40000000 Tagen abkühlen und daher kaum in 50000 Jahren kalt werden. Ich vermuthe indessen, dass aus verborgenen Ursachen die Dauer der Wärme in einem kleineren Verhältniss als dem der Durchmesser zunehmen muss, und wünschte wohl, den wahren Grund hiervon durch die Versuche zu erforschen.

Ferner muss man bemerken, dass der Komet im December, wo er sich eben an der Sonne erwärmt hatte, einen weit grösseren und glänzenderen Schweif besass, als vorher im November, wo er sein Perihel noch nicht erreicht hatte. Im allgemeinen gehen alle grössten und glänzendsten Schweife sogleich aus dem Kometen hervor, nachdem diese durch die Gegend der Sonne gegangen sind. Die Erwärmung des Kometen trägt also zur Grösse seines Schweifes bei, und hieraus muss man nach meiner Ansicht schliessen, dass der Schweif nichts anders als ein sehr leichter Dampf sei, welchen der Kopf oder Kern des Kometen ausschickt.

Uebrigens existiren drei verschiedene Meinungen über die Kometenschweife. Nach der ersten sind sie das, durch den leuchtenden Kopf

des Kometen sich fortpflanzende, Sonnenlicht. Nach der zweiten werden die Schweife durch die Brechung des Lichtes hervorgebracht, welches vom Kopf des Kometen zur Erde fortschreitet. Nach der dritten Meinung endlich sind sie eine Art von Dampf oder Wolke, welche beständig vom Kopfe des Kometen aufsteigt und sich in die, der Sonne entgegengesetzten, Gegenden verbreitet. Der ersten Meinung können nur diejenigen beipflichten, welche noch nicht die oberflächlichste Kenntniss vom Lichte haben, indem das Sonnenlicht in einem dunkeln Zimmer nur in so weit wahrgenommen wird, als kleine Staubtheilchen und die beständig in der Luft sich bewegenden Dämpfe es reflectiren. In einer mit dichteren Dämpfen angefüllten Luft wird es daher glänzender sein und stärker auf die Augen wirken, in reinerer Luft ist es schwächer und wird kaum empfunden und in der Himmelsgegend, wo gar keine reflectirende Materie vorhanden ist, kann man durchaus kein Licht wahrnehmen. Das Licht wird nämlich nicht wahrgenommen, in so fern es im glänzenden Köper existirt, sondern in so fern es von dort nach unseren Augen zurückgeworfen wird. Das Sehen erfolgt nur durch die Strahlen, welche in unsere Augen eindringen. In den Gegenden, wo man die Kometenschweife sieht, muss also irgend eine Materie existiren, welche das Licht zurückwerfen kann; ohne sie würde der ganze, mit Sonnenstrahlen erfüllte, Himmelsraum überall gleich glänzend erscheinen. Die zweite Meinung leidet an vielen Schwierigkeiten, indem sich niemals Farben in den Schweifen zeigen, da dieselben doch unzertrennliche Begleiter der Brechung zu sein pflegen. Das Licht der Fixsterne und Planeten, welches rein und ohne Färbung zu uns gelangt, beweist, dass die von denselben durchwanderten Himmelsräume kein brechendes Mittel enthalten. Was man nämlich von den Egyptern erzählt, dass sie bisweilen Fixsterne behaart gesehen haben, muss, weil es so sehr selten vorkommt, ohne Zweifel seinen Ursprung in einer zufälligen Brechung durch Wolken haben. Die Strahlung und das Funkeln der Fixsterne muss aber der Brechung in unseren Augen und in der zitternden Luft zugeschrieben werden, was man daraus erkennt, dass dieses Funkeln aufhört, sobald man die Sterne durch ein Fernrohr betrachtet. Das Zittern der Luft und der in ihr enthaltenen Dämpfe bewirkt nämlich, dass die Strahlen sehr leicht und stossweise von der sehr engen Pupille abgelenkt werden, was aber nicht bei der weit grösseren Oeffnung des Objectivglases geschieht. Daher hört das Funkeln, welches wir bemerken, wenn wir die Sterne mit blossem Auge betrachten, auf, sobald wir sie durch ein Fernrohr sehen, und dieses Aufhören beweist, dass das Licht sich in den Himmelsräumen ohne merkliche Brechung fortpflanzt. Man sage nicht, dass man die Kometenschweife nicht sehe, wenn ihr Licht nicht stark genug ist, weil alsdann die secundären Strahlen nicht Kraft genug haben, auf unsere Augen zu wirken und dass wir aus diesem Grunde bei den Fixsternen keine Schweife sehen. Das Licht derselben kann nämlich mittelst der Fernröhre mehr als 100mal verstärkt werden, ohne dass

Schweife wahrgenommen würden. Die Planeten geben uns weit mehr Licht als die Sterne, und doch sieht man an ihnen keine Schweife, wogegen Kometen oft sehr grosse Schweife haben, obgleich das Licht ihres Kopfes sehr schwach und matt ist.

Der Kopf des Kometen von 1680 z. B. hatte im Monat December ein Licht, welches kaum dem der Sterne 2. Grösse gleich kam, und schickte seinen Schweif mit einem merklichen Glanze bis auf 40, 50, 60, 70° und weiter aus. Hierauf erschien am 27. und 28. Januar sein Kopf nur wie ein Stern 7. Grösse, und sein Schweif war mit einem zwar schwachen indessen doch ziemlich bemerkbaren Lichte 6—7° lang und dehnte sich mit einem sehr matten Lichte, welches kaum gesehen werden konnte, bis auf 12° oder etwas mehr aus; wie wir oben gesagt haben. Am 9. und 10. Februar, wo die Sichtbarkeit des Kopfes mit blossem Auge aufgehört hatte, sah ich durch das Fernrohr den Schweif 2° lang. Entspränge ferner der Schweif aus der Brechung in der, im Himmelsraume befindlichen, Materie und wiche er, nach der Gestalt dieses Raumes, von dem der Sonne gegenüberstehenden Punkte ab; so müsste diese Abweichung in denselben Gegenden des Himmels immer nach derselben Seite hin erfolgen. Indessen befand sich der Komet von 1680 am 28. December, um $8^1/_2{}^h$ Nachmittags Londoner Zeit, in ♓ 8° 41′ Länge bei 28° 6′ nördlicher Breite, während die Sonne in ♑ 18° 26′ Länge stand. Ferner stand der Komet von 1577 am 29. December in ♓ 8° 41′ Länge bei 28° 40′ nördlicher Breite, die Sonne aber ungefähr in ♑ 18° 26′ Länge.

In beiden Fällen stand die Erde an demselben Orte, die Kometen erschienen in demselben Theile des Himmels; indessen wich im ersteren Falle (nach meinen und anderen Beobachtungen) der Schweif des Kometen um einen Winkel von $4^1/_2{}^0$ von dem der Sonne entgegengesetzten Punkte gegen Norden, im anderen Falle (nach Tycho's Beobachtungen) um 21° gegen Süden ab. Da man also die Schweife nicht der Brechung in den Himmelsräumen zuschreiben kann, so bleibt uns noch übrig zu prüfen, ob sie nicht durch eine, das Licht reflectirende, Materie hervorgebracht werden.

Dass die Schweife aber aus den Köpfen entspringen und nach den der Sonne abgewandten Gegenden aufsteigen, wird durch die Gesetze, welche sie beobachten, bestätigt. Wenn sie nämlich in den, durch die Sonne gehenden Bahnen des Kometen liegen, so weichen sie immer von dem in der Opposition mit der Sonne befindlichen Punkte nach den Theilen hin ab, welche die in jenen Bahnen fortschreitenden Köpfe verlassen. Ferner erscheinen sie einem, in dieser Ebene befindlichen, Beobachter direct der Sonne entgegengesetzt, und je nachdem der Beobachter sich aus dieser Ebene entfernt, kann man ihre Abweichung mehr und mehr, und von Tage zu Tage grösser wahrnehmen. Eben so ist diese Abweichung, unter übrigens gleichen Umständen, kleiner, wenn der Schweif gegen die Kometenbahn geneigt ist, wie auch, wenn der Kopf

des Kometen sich der Sonne nähert; besonders wenn man den Abweichungswinkel nahe am Kopfe des Kometen betrachtet. Ferner erscheinen diejenigen Schweife, welche keine Abweichung haben, gerade und die mit einer Abweichung behafteten krumm, und die Krümmung um so grösser, je stärker ihre Abweichung ist, so wie erstere sich auch merklicher zeigt, wenn unter übrigens gleichen Umständen der Schweif länger ist. Bei sehr kurzen Schweifen ist nämlich die Krümmung kaum bemerkbar. Ferner ist der Abweichungswinkel kleiner am Kopfe des Kometen, und grösser am entgesetzten Ende des Schweifes und die convexe Seite des letzteren nach den Theilen gerichtet, von denen er sich durch seine Abweichung entfernt, welche Theile auf der unbestimmten geraden Linie liegen, die von der Sonne durch den Kometenkopf gezogen ist. Endlich sind die längeren und breiteren Schweife, welche lebhafteres Licht haben, glänzender und schärfer begrenzt an ihrer convexen, als an ihrer concaven Seite. Die Erscheinungen des Kometenschweifes hängen daher von der Bewegung ihres Kopfes und nicht von der Himmelsgegend ab, in welcher man diesen wahrnimmt. Sie werden also nicht durch die Brechung im Himmelsraume hervorgebracht, sondern durch die aus dem Kopfe des Kometen ausdünstende Materie gebildet. So wie in unserer Luft der Rauch eines beliebigen brennenden Körpers sich erhebt und perpendikulär emporsteigt, wenn dieser Körper ruht, aber in schiefer Richtung, wenn der letzterr sich seitwärts bewegt; eben so müssen in den Himmelsräumen, wo alle Körper gegen die Sonne gravitiren, die Dämpfe und der Rauch von der Sonne ab aufsteigen (wie schon gesagt worden ist), und sich aufwärts in gerader Linie erheben, wenn der rauchende Körper in Ruhe ist, in schräger Richtung aber, wenn dieser sich bewegt und unaufhörlich die Orte verlässt, von denen die oberen Theile des Dampfes aufzusteigen begonnen haben. Diese Richtung ist weniger schief, wenn die Dämpfe mit grösserer Geschwindigkeit aufsteigen, wie nahe bei der Sonne und den Körpern, von denen der Rauch ausströmt. Diese verschiedene Schiefe bewirkt, dass die aus diesem Dampf zusammengesetzte Säule gekrümmt erscheint, und da der Dampf an der vorangehenden Seite etwas später ausgeströmt ist; so muss die Säule an dieser Seite auch etwas dichter erscheinen und daher das Licht reichlicher reflectiren, wie auch der Schweif dort genauer begrenzt sein. Ich füge hier nichts hinzu über die plötzlichen und unbestimmten Bewegungen dieser Schweife, noch über die Unregelmässigkeit ihrer Gestalt, welche manche bisweilen beschreiben; weil diese scheinbaren Veränderungen entweder durch die in unserer Atmosphäre eintretenden Wechsel und durch die Bewegungen der Wolken hervorgebracht werden können, indem die letzteren einzelne Theile der Schweife verdunkeln, oder weil jene Veränderungen durch Theile der Milchstrasse, welche man mit den vor ihnen vorübergehenden Schweifes verwechselt und für Theile der letzteren nimmt, hervorgebracht werden können.

Dass aber Dämpfe, welche zur Ausfüllung so ungeheuerer Räume

ausreichen, ans der Atmosphäre der Kometen entspringen können, ersieht man ans der geringen Dichtigkeit unserer Luft. Diese nimmt nämlich in der Nähe der Erdoberfläche einen 850mal grösseren Raum ein, als Wasser von gleichem Gewicht; daher ist eine 850 Fnss hohe cylindrische Lnftsäule eben so schwer, als eine 1 Fnss hohe Wassersäule von demselben Durchmesser. Eine Luftsäule aber, welche bis zur äusseren Grenze der Athmosphäre ansteigt, ist an Gewicht ungefähr einer 33 Fnss hohen Wassersäule gleich. Würde daher von dieser ganzen Lnftsänle der untere, 850 Fnss hohe Theil fortgenommen, so käme der übrige obere Theil derselben einer 32 Fuss hohen Wassersäule an Gewicht gleich. Nach der, durch viele Versuche bestätigten Regel, dass die Zusammendrücknng der Lnft dem Gewicht der aufliegenden Atmosphäre proportional ist, nnd die Schwere sich umgekehrt wie das Quadrat des Abstandes vom Mittelpnnkte der Erde verhält, habe ich nnn nach §. 30., Zusatz des zweiten Buches eine Rechnnng angestellt nnd gefunden, dass, wenn man von der Oberfläche der Erde zur Höhe Eines Erdhalbmessers ansteigt, die Lnft in einem weit grösseren Verhältniss lockerer wird, als bei uns, als das Verhältniss beträgt, wenn man den ganzen innerhalb der Saturnsbahn enthaltenen Raum mit einer Kugel von einem Zoll Durchmesser vergleicht.[321]) Hiernach würde eine Kugel von einem Zoll im Dnrchmesser, welche mit unserer Luft angefüllt wäre, bei der Verdünnung, welche sie in der Höhe Eines Erdhalbmessers haben müsste, alle Gegenden der Planeten bis zum Saturn und weit darüber ausfüllen. Da ferner die noch höher liegende Lnft in's Ungeheure aufgelockert wird und der Schweif oder die Atmosphäre des Kometen sich, beim Anfsteigen von seinem Centrum, etwa 10mal höher als der Kern befindet, hierauf aber noch höher steigt; so muss der Schweif im höchsten Grade verdünnt sein. Obgleich nun wegen der weit dichteren Atmosphäre der Kometen, der grossen Schwere der letzteren gegen die Sonne, der Schwere ihrer Lufttheilchen und ihrer Dämpfe gegen einander, die in den Himmelsräumen sie umgebende Luft und folglich auch ihre Schweife nicht so aufgelockert als unsere Luft sein mögen; so folgt doch aus allem diesem, dass eine sehr geringe Menge Lnft und Dämpfe für alle Erscheinungen der Kometenschweife überflüssig ausreichend sein kann. Uebrigens ist die äusserste Verdünnung der Materie dieser Schweife dadurch erwiesen, dass man Sterne durch sie hindnrchglänzen sieht. Die Atmosphäre der Erde verdunkelt und verlöscht, wenn sie vom Sonnenlicht beschienen wird, bei ihrer Dicke von wenigen Meilen, fast alle Sterne und selbst den Mond. Durch die ungeheuer dicken Schweife der Kometen aber, welche eben so durch die Sonne erhellt werden, sieht man die kleinsten Sterne, ohne dass ihr Licht geschwächt wird. Der Glanz der Schweife pflegt nicht grösser zu sein, als wenn Luft in einem dnnkelen Zimmer, die dnrch ein Loch von 1 oder 2 Zoll im Durchmesser erhaltenen Sonnenstrahlen reflectirt.

Man kann nabebei die Zeit kennen lernen, welche der Dampf

braucht, um sich vom Kopf des Kometen bis zum Ende seines Schweifes zu erheben, indem man von diesem Endpunkte eine gerade Linie nach der Sonne zieht und den Ort bemerkt, wo dieselbe die Bahn schneidet. Der Dampf am Ende des Schweifes fängt nämlich, wenn er sich in gerader Linie von der Sonne ab entfernt, zu der Zeit vom Kopfe aufzusteigen an, wenn dieser sich in jenem Punkte befindet. Der Dampf entfernt sich aber nicht in gerader Linie von der Sonne, sondern er behält die Bewegung bei, welche der Komet hatte, ehe dieser Dampf aufzusteigen anfing, und da diese Bewegung sich mit derjenigen zusammensetzt, mit welcher der Dampf aufsteigt, so entsteht die schiefe Richtung seiner Bewegung. Die Lösung dieser Aufgabe wird daher genauer, wenn jene die Linie, welche die Bahn durchschneidet, der Längenlinie des Schweifes parallel ist, oder vielmehr (wegen der krummlinigen Bewegung des Kometen) wenn diese Linie von der des Schweifes divergirt[32]) Auf diese Weise fand ich, dass der Dampf, welcher sich den 25. Januar am Ende des Kometenschweifes von 1680 befand, vor dem 11. December angefangen hat aufzusteigen, und dass er folglich mehr als 45 Tage hierzu gebraucht hatte. Der ganze Schweif, welcher am 10 December sichtbar war, war ferner innerhalb jener 2 Tage aufgestiegen, welche seit der Zeit des Perihels verflossen waren. Dieser Dampf stieg also anfangs, als der Komet der Sonne näher stand, sehr schnell empor; hierauf fuhr er fort anzusteigen mit einer Bewegung, welche durch die Schwere beständig verzögert wurde und vergrösserte durch sein Emporsteigen die Länge des Schweifes. Der letztere wurde, so lange er sichtbar war, fast aus all dem Dampfe gebildet, welcher von der Zeit des Perihels aufgestiegen war; und der zuerst aufgestiegene Dampf, welcher das Ende des Schweifes bildete, verschwand nur dann erst, als seine Entfernung so wohl von der Sonne, wie auch von unseren Augen so gross geworden war, dass man ihn nicht mehr wahrnehmen konnte. Die Schweife anderer Kometen also, welche kurz sind, werden nicht aus Dämpfen gebildet, die mit einer raschen und continuirlichen Bewegung von ihren Köpfen aufsteigen und sich hierauf zerstreuen; sondern sie sind permanente Säulen von Dämpfen und Ausdünstungen, welche während vieler Tage mit einer sehr langsamen Bewegung aus den Köpfen der Kometen hervorgehen, an der Bewegung Theil nehmen, die der Kopf bei ihrem Heraustreten hatte und hierauf fortfahren, sich mit dem Kopfe im Himmelsraume zu bewegen. Dies liefert einen neuen Beweis, dass die Himmelsräume von jeder widerstehenden Kraft frei sind; weil nicht nur die festen Körper, wie die Planeten und Kometen, sondern selbst sehr verdünnte Dämpfe wie diejenigen, woraus die Kometenschweife gebildet sind, sich ganz frei und mit einer sehr grossen Geschwindigkeit in denselben bewegen und weil sie darin ihre Bewegung sehr lange Zeit hindurch beibehalten.

Kepler schreibt das Aufsteigen der Schweife, welche sich aus der Atmosphäre ihrer Köpfe erheben, und ihre fortschreitende Bewegung

nach der, der Sonne entgegengesetzten Seite, der Wirkung der Lichtstrahlen zu, welche die Materie der Kometen mit sich fortführen. Es ist nicht absurd, zu denken, dass sehr lockere Dämpfe in Räumen, welche von jedem Widerstande frei sind, der Wirkung der Strahlen nachgeben können; obgleich dichtere Dämpfe in unserer Atmosphäre nicht merklich durch die Sonnenstrahlen bewegt werden. Ein anderer Astronom war der Meinung, es könne Theilchen von schwerer, und andere von leichter Materie geben, die Kometenschweife seien aus den letzteren zusammengesetzt und erhöben sich, vermöge ihrer Leichtigkeit über die Sonne. Da aber das Gewicht der irdischen Körper, der Menge der in ihnen enthaltenen Materie proportional ist; so kann, wenn diese Menge dieselbe bleibt, das Gewicht weder grösser noch kleiner werden. Ich vermuthe vielmehr, dass das Aufsteigen der Dämpfe, aus denen die Schweife gebildet sind, von der Verdünnung dieser Materie herrühre. Der Rauch steigt nämlich in einem Schornsteine durch den Stoss der Luft, in welcher er schwimmt, diese durch die Wärme verdünnte Luft steigt in Folge ihres verminderten specifischen Gewichtes empor und führte beim Emporsteigen den Rauch mit sich fort. Warum sollten die Kometenschweife sich nicht auf dieselbe Weise, nach der der Sonne entgegengesetzten Seite erheben? Die Sonnenstrahlen bewegen die Mittel, durch welche sie gehen, nur vermöge der Zurückwerfung und Brechung. Die zurückwerfenden Theilchen werden durch diese Wirkung der Strahlen erhitzt, und erhitzen wieder die ätherische Materie, mit welcher sie vermischt sind. Diese ihr mitgetheilte Wärme verdünnt sie und vermindert so das specifische Gewicht, womit diese Materie sich vorher gegen die Sonne hinneigte, sie steigt daher empor und führt die zurückwerfenden Theilchen, woraus der Schweif gebildet wird, mit sich fort. Die Dämpfe, aus denen die Kometenschweife bestehen, drehen sich um die Sonne und haben daher das Bestreben, sich von diesem Gestirn zu entfernen. Dies trägt noch zu ihrem Aufsteigen bei, denn die Atmosphäre der Sonne und die Materie der Himmelsräume befindet sich in einer absoluten Ruhe, oder sie dreht sich vielmehr langsamer, als die Materie der Schweife, weil sie sich überhaupt nur vermöge der einzigen Bewegung dreht, welche sie durch die Rotation der Sonne empfängt. Dies sind die Ursachen, aus denen das Aufsteigen der, die Schweife bildenden, Dämpfe entspringt, wenn die Kometen sich nahe bei der Sonne befinden, wo ihre Bahnen am stärksten gekrümmt sind und jene die längsten Schweife bilden, weil sie sich in der dichteren und schwereren Atmosphäre der Sonne befinden. Die Schweife, welche alsdann anfangen sichtbar zu werden, behalten ihre Bewegung bei und gravitiren zugleich gegen die Sonne, sie bewegen sich um diese in Ellipsen, wie die Köpfe der Kometen; mittelst dieser Bewegung begleiten sie stets diese Köpfe und hängen ganz frei an ihnen. Die Schwere gegen die Sonne lässt nämlich die Dämpfe sich nicht mehr von ihren Köpfen entfernen, um zur Sonne hinzugehen, als die Schwere der Köpfe dieses von ihren Schweifen sich entfernen und

der Sonne nähern lässt. Vermöge der gemeinschaftlichen Schwere müssen sie also gleichzeitig gegen die Sonne fallen, oder beim Anfsteigen auf dieselbe Weise verzögert werden. Die Schwere kann also Kopf und Schweif nicht verhindern, mit Leichtigkeit die ans den oben besprochenen oder ans anderweitigen Ursachen entspringende gegenseitige Lage anzunehmen, und nachher ohne Hinderniss beiznbehalten.

Die in den Perihelen der Kometen sich bildenden Schweife müssen sich also mit ihren Köpfen in sehr entlegene Gegenden entfernen und hierauf nach einer langen Reihe von Jahren zu uns zurückkehren, oder vielmehr nach und nach durch Verdünnung verschwinden. Wenn hierauf in der Folge ihr Kopf zur Sonne zurückkehrt, müssen neue, sehr kurze Schweife mit einer langsamen Bewegung aus demselben emporsteigen, und dieselben werden im Perihel derjenigen Kometen, welche bis zur Atmosphäre der Sonne herabsteigen, in's ungeheure auwachsen. Dieser Dampf muss sich nämlich in den freien Räumen, in denen er sich befindet, beständig verdünnen und ausdehnen; desshalb sind alle Schweife an ihrem oberen Ende breiter, als nahe beim Kopfe. Diese durch die Verdünnung beständig ausgedehnten Dämpfe müssen sich über den ganzen Himmel verbreiten und ergiessen, hierauf durch ihre Schwere gegen die Planeten hingezogen werden, mit deren Atmosphäre sie sich wahrscheinlich vermischen. Eben so wie nämlich unsere Meere zur Einrichtung der Erde erforderlich sind, damit die Wärme der Sonne hinreichende Dünste aus ihnen emporheben könne, welche sich hierauf in Wolken sammeln und als Regen zurückkehrend, die Erde befruchten, ernähren und so fähig machen alle Pflanzen hervorzubringen; oder auch auf den kalten Gipfeln der Gebirge sich verdichten, von wo sie (nach der begründeten Muthmassung Einiger) herabfliessen und die Quellen und Flüsse bilden: auf gleiche Weise scheinen die Kometen zur Erhaltung der Meere und Flüssigkeiten auf den Planeten erforderlich zu sein, und durch ihre Ausdünstungen und verdichteten Dämpfe die Feuchtigkeit zu ersetzen und wieder herzustellen, welche beim Wachsen und Faulwerden verzehrt und in festes Land verwandelt wird. Alle Pflanzen wachsen nämlich nur vermittelst der Feuchtigkeiten, und der grösste Theil derselben verwandelt sich hierauf durch Fäulniss in trockenes Land, so wie auf den Boden der faulgewordenen Gewässer stets Schlamm niederfällt. Auf diese Weise muss die Menge des trockenen Landes beständig zunehmen, und wenn die flüssigen Theile nicht durch irgend welche Ursachen Zuwachs erhielten, müssten sie beständig abnehmen und zuletzt gänzlich fallen. Ich vermuthe, dass dieser geistige Bestandtheil, welcher der kleinste in unserer Luft, aber zugleich der feinste und vorzüglichste ist, um allen Dingen Leben zu geben, hauptsächlich von den Kometen herrührt.[323])

Die Atmosphären der Kometen werden, da sie beim Herabsteigen zur Sonne in die Schweife auslaufen, abnehmen und (sicher an der der Sonne zugewandten Seite) zusammengedrängt werden; umgekehrt, wenn sie sich von der Sonne entfernen und ihre Atmosphäre weniger in einen Schweif aus-

läuft, wird die letztere an Umfang zunehmen, wenn nur Hevel die Erscheinungen richtig beobachtet hat. Diese Atmosphären erscheinen am kleinsten, wenn die Köpfe bereits sehr durch die Sonne erhitzt, die Schweife sehr lang und glänzend, und die Kerne, nach dem inneren Theile der Atmosphäre zu, in einem dichten und schwarzen Rauch eingehüllt sind. Jeder durch eine grosse Hitze hervorgebrachte Rauch pflegt nämlich recht dicht und schwarz zu sein. Auch erschien der Kopf des besprochenen Kometen von 1680, in gleichem Abstande von der Sonne und Erde, dunkeler nach seinem Perihel, als vor demselben. Im December konnte man nämlich sein Licht dem eines Sternes 3. Grösse gleichsetzen, im November kam es aber dem eines Sternes 1. oder 2. Grösse gleich. Diejenigen, welche ihn in beiden Fällen gesehen haben, halten ihn im ersteren für grösser. Ein junger Mann in Cambridge sah diesen Kometen am 19. November und fand, dass sein Licht, obgleich bleifarbig und nicht lebhaft, dem der Spica gleich kam und heller glänzte, als zu irgend einer späteren Zeit. Montenarus erschien er am 20. November alten Styls grösser, als ein Stern 1. Grösse, während sein Schweif 2^0 lang war. Dr. Storer bemerkt in seinen an mich gelangten Briefen, dass sein Kopf im December, wo der Schweif sich am grössten und glänzendsten zeigte, sehr klein und nicht so gross war, wie der Komet ihn im November vor Sonnenaufgang gezeigt hatte. Nach seiner Vermuthung kann man dies dem Umstande zuschreiben, dass im Anfange die Materie des Kopfes in grösserer Menge vorhanden und nach und nach verzehrt worden war.

Aus demselben Grunde haben wahrscheinlich die Kometen mit den längsten und glänzendsten Schweifen, sehr dunkele und kleine Köpfe. Am 5. März 1668 neuen Styls, um 7 Uhr Abends, sah nämlich Valentin Estancius in Brasilien einen Kometen nahe am Horizont gegen Westen, dessen Kopf sehr klein und kaum sichtbar war, und welcher einen so übermässig glänzenden Schweif hatte, dass die am Ufer stehenden Menschen ihn mit Leichtigkeit im Meere sich abbilden sahen. Er glich einem glänzenden 23^0 langen Balken, dehnte sich von Westen gegen Süden aus und war dem Horizont fast parallel. Dieser so grosse Glanz währte nur 3 Tage, worauf er plötzlich abnahm, während zugleich die Grösse des Schweifes zunahm. Man berichtet daher auch, dass er in Portugal fast den vierten Theil des Himmels, d. h. 45^0 von Westen gegen Osten, mit einem sehr beträchtlichen Glanze eingenommen habe. Indessen war dieser Komet nie ganz sichtbar, indem sein Kopf sich in diesen Gegenden stets unter dem Horizont befand. Das Zunehmen dieses Schweifes, während sein Glanz abnahm, beweist deutlich, dass der Kopf des Kometen sich von der Sonne entfernte und dass er im Anfange seiner Erscheinung, eben so wie der Komet von 1680, der Sonne am nächsten war. Man liest in der sächsischen Chronik, dass im Jahr 1106 sich ein ähnlicher Komet gezeigt hat, dessen Kopf klein und dunkel (wie der vom Jahre 1680), dessen Schweif aber sehr glänzend war und

sich wie ein grosser Balken gegen Osten und nach dem Adler hin ausdehnte. Dies erzählt auch Hevel nach dem Mönche Simon Dunkelmensis. Er zeigte sich im Anfange des Februar und an den folgenden Tagen im Westen. Man konnte aus der Lage seines Schweifes schliessen, dass sein Kopf der Sonne sehr nahe war. Er war von der Sonne, sagt Matthäus von Paris, ungefähr eine Elle weit entfernt. Von der dritten (oder genauer der sechsten) bis zur neunten Stunde ging ein grosser Lichtstrahl von ihm aus. Eben so war der sehr feurige Komet beschaffen, welchen Aristoteles im 1. Buche seines Meteor 6 beschreibt. Sein Kopf zeigte sich, wie er sagt, nicht am ersten Tage, weil er vor der Sonne, oder wenigstens in ihren Strahlen unterging. Am folgenden Tage konnte man ihn eben bemerken, weil er sich um einen sehr kleinen Abstand von der Sonne entfernt hatte, und gleich nach ihr unterging. Wegen seiner ausserordentlichen Helligkeit (d. h. des Schweifes) zeigte sich sein Kopf noch nicht, da er ganz von Feuer bedeckt war, aber hierauf (fährt Aristoteles fort), als er (d. h. der Schweif) anfing, weniger glühend zu sein, bekam man das Gesicht, (d. h. den Kopf) des Kometen zu sehen und sein Glanz erstreckte sich bis zum dritten Theile des Himmels (d. h. bis 60°). Er erschien im Winter (im vierten Jahre der 101. Olympiade) und nachdem er bis zum Gürtel des Orion gestiegen war, verschwand er daselbst. Der Komet von 1618, welcher mit einem sehr grossen Schweife aus den Sonnenstrahlen hervortrat, schien den Sternen 1. Grösse gleich zu kommen, oder sie selbst zu übertreffen; man hat aber viel andere grössere Kometen gesehen, welche sehr kleine Schweife hatten. Es hat deren gegeben, welche nach der Erzählung Einiger dem Jupiter, andere, welche der Venus, und noch andere, welche selbst dem Monde an Grösse gleich kamen.

Wir schliessen aus dem Bisherigen, dass die Kometen Körper von derselben Art, wie die Planeten sind, und dass sie sich in sehr excentrischen Bahnen um die Sonne bewegen. Wie unter den Planeten, welche keine Schweife haben, diejenigen die kleinsten sind, welche sich in den kleinsten Bahnen bewegen und der Sonne am nächsten kommen; so ist es wahrscheinlich, dass diejenigen Kometen, welche in ihrem Perihel der Sonne am nächsten kommen, viel kleiner als die übrigen sind, damit sie durch ihre Anziehung die Sonne nicht stören.[324]) Uebrigens überlasse ich die Bestimmung der grossen Axe der Kometenbahnen und ihrer Umlaufszeiten der Zeit, wo man die Umläufe der nach einer langen Zwischenzeit zurückkehrenden Kometen, welche dieselben Bahnen beschreiben, mit einander vergleichen kann. Inzwischen wird der folgende Satz einiges Licht über diese Untersuchung verbreiten können.

§. 60. Anfgabe. Die gefundene Bahn eines Kometen zu verbessern.

Erste Operation. Man nehme die, durch den vorhergehenden Paragraphen gefundene, Lage der Bahn, und wähle drei Kometenörter aus, welche durch sehr genaue Beobachtungen bestimmt und ziemlich entfernt von einander sind. Es sei A die zwischen der ersten und zweiten, B die zwischen der zweiten und dritten Beobachtung verflossene Zeit. Der Komet befinde sich in einem dieser Oerter in seinem Perigeum, oder sei wenigstens nicht sehr weit von demselben entfernt gewesen. Mittelst dieser scheinbaren Oerter bestimme man durch trigonometrische Operationen drei wahre Oerter des Kometen, in der zur Bahn gewählten Ebene. Hierauf beschreibe man mittelst dieser gefundenen Oerter, nach den im §. 43. des ersten Buches angegebenen arithmetischen Operationen, einen Kugelschnitt, in dessen Brennpunkt sich die Sonne befindet, und es seien die Flächenräume dieser Curve, welche durch die von der Sonne nach den obigen Oertern gezogenen Radien begrenzt werden, D und E. Es sei nämlich D der in der Zeit zwischen der ersten und zweiten, E der zwischen der zweiten und dritten Beobachtung beschriebene Flächenraum und es sei T die Zeit, während welcher der ganze Raum D + E vom Kometen, mit der nach §. 36. des ersten Buches gefundenen Geschwindigkeit, beschrieben werden muss.

Zweite Operation. Man vergrössere die Länge des Knotens um 20 oder 30 Minuten, ich nenne diese Vergrösserung P; die Neigung der Ebene der Bahn gegen die Ekliptik lasse man unverändert. Mittelst der drei beobachteten Kometenörter, von denen ich gesprochen habe, suche man in dieser neuen Bahn drei wahre Oerter, wie oben. Die Bahn gehe durch diese drei Punkte, und die beiden Flächenräume derselben, welche zwischen den Beobachtungen beschrieben sind, nenne ich d und e, wie auch t die Zeit, während welcher die ganze Fläche d + e beschrieben werden soll.

Dritte Operation. Man behalte die Länge des Knotens aus der ersten Operation bei, vergrössere die Neigung um 20 oder 30 Minuten, welche Vergrösserung ich durch Q bezeichne. Hierauf bestimme man, mittelst der drei beobachteten und bereits besprochenen Kometenörter, drei wahre Oerter in dieser neuen Ebene, wie auch die durch diese Oerter gehende Bahn. Die beiden zwischen den Beobachtungen in dieser Bahn beschriebenen Flächenräume nenne ich δ und ε, und die ganze Zeit, während welcher die ganze Fläche $\delta + \varepsilon$ beschrieben werden soll, τ.

Nun sei

1. $A : B = C : 1$
2. $D : E = G : 1$
3. $d : e = g : 1$
4. $\delta : \varepsilon = \gamma : 1.$

Indem S die wahre, zwischen der ersten und dritten Beobachtung verflossene, Zeit bezeichnet und die Zeichen + und — so gesetzt werden, wie es erforderlich ist, besimme man die Zahlen m und n mittelst der Gleichungen:

$$5.\quad 2G - 2C = mG - mg + nG - n\gamma$$
$$6.\quad 2T - 2S = mT - mt + nT - n\tau.$$

Bezeichnet nun bei der ersten Operation J die Neigung und K die Länge des Knotens; so wird die wahre Neigung = $J + nQ$ und die wahre Länge des Knotens = $K + mP$.[325] Wenn endlich bei der ersten, zweiten und dritten Operation resp. R, r, ϱ den Parameter der Bahn und $\frac{1}{L}$, $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{\lambda}$ die grosse Axe bezeichnen; so wird der wahre Parameter = $R + mr - mR + n\varrho - nR$ und die wahre grosse Axe

$$= \frac{1}{L + ml - mL + n\lambda - nL.}$$

Ist aber die wahre grosse Axe gegeben, so kennt man auch die Umlaufszeit Uebrigens können die Umlaufszeiten der Kometen und die grossen Axen ihrer Bahnen nur dann mit einer hinreichenden Genauigkeit gefunden werden, wenn man die Kometen, welche sich zu verschiedenen Zeiten gezeigt haben, mit einander vergleicht. Wenn mehrere Kometen in gleichen Zwischenzeiten dieselbe Bahn beschreiben, so muss man daraus schliessen, dass diese Kometen nur einen und denselben ausmachen, welcher in derselben Bahn seinen Umlauf macht. Endlich findet man durch die Umlaufszeiten die grossen Axen und mittelst dieser die elliptische Bahn.

Um dahin zu gelangen, muss man also die Bahnen mehrerer Kometen berechnen, indem man sie als parabolische voraussetzt; denn derartige Bahnen werden immer sehr nahe mit den Erscheinungen übereinstimmen. Dies ist nicht nur durch die parabolische Bahn des Kometen von 1680 erwiesen, welche ich oben mit den Beobachtungen verglichen habe, sondern auch durch die Bahn des berühmten Kometen, welcher in den Jahren 1664 und 1665 sichtbar war und von Hevel beobachtet worden ist Dieser Astronom hat auch nach seinen Beobachtungen die Längen und Breiten dieses Kometen, jedoch weniger genau berechnet. Halley hat aufs neue nach denselben Beobachtungen die Oerter des Kometen berechnet und hierauf mittelst der so gefundenen Oerter seine Bahn bestimmt. Er setzt

die Länge des Knotens	=	♊	21°	13′	55″
die Neigung gegen die Ekliptik	=		21	18	40
den Abstand d. Perihels vom Knoten in der Bahn	=		49	27	30
das Perihel in		♌	8	40	30
mit einer südlichen Breite von			16	1	45.

Ferner fand er, dass der Komet sich am 24. November um $11^h\ 52^m$ Abends mittlerer Londoner Zeit, oder um $13^h\ 8^m$ Danziger Zeit im Perihel befunden hat. Den Parameter der Parabel setzt er = 410286, wenn der mittlere Abstand der Erde von der Sonne = 100000 angenommen wird.

Man ersieht aus der folgenden von Halley berechneten Tabelle, wieweit die in dieser Bahn berechneten Oerter mit den beobachteten übereinstimmen

Scheinbare Danziger Zeit Alt. Styls.		Beobachtete Abstände des Kometen.		Beobachtete Oerter.	Berechnete Oerter.
	h m				
1664 Dec. 3.	18 29,5	Vom Herz des Löwen	46° 24′ 20″	Länge ♎ 7° 1′ 0″	♎ 7° 1′ 29″
		Von der Spica	22 52 10	Breite — 21 39 0	— 21 38 50
4.	18 1,5	Vom Herz des Löwen	46 2 45	nge ♎ 16 15 0	♎ 16 16 5
		Von der Spica	23 52 40	ite — 22 24 0	— 22 24 0
7.	17 48	Vom Herz des Löwen	44 48 0	ge ♎ 3 6 0	♎ 3 7 33
		Von der Spica	27 56 40	te — 25 22 0	— 25 21 40
17.	14 43	Vom Herz des Löwen	53 15 15	ge ♌ 2 56 0	♌ 2 56 0
		Von der recht. Schulter d. Orion.	45 43 30	Lreite — 49 25 0	— 49 25 0
19.	9 25	Vom Prokyon	35 13 50	änge ♊ 28 40 30	♊ 28 43 0
		Vom h. Stern im Kinnb. d. Wallf. ..	52 56 0	Breite — 45 48 0	— 45 46 0
20.	9 53,5	Vom Prokyon	40 49 0	Länge ♊ 13 3 0	♊ 13 5 0
		Vom h. Stern im K. d. Wallf. ..	40 4 0	Breite — 39 54 0	— 39 53 0
21.	9 9,5	Von d. recht. Schulter d. Orion.	26 21 25	Länge ♊ 2 16 0	♊ 2 18 30
		Vom h. Stern im K. d. Wallf. ..	29 28 0	Breite — 33 41 0	— 33 39 40
22.	9 0	Von der recht. Schulter d. Orion.	29 47 0	Länge ♉ 24 24 0	♉ 24 27 0
		Vom h. Stern im K. d. Wallf. ..	20 29 30	Breite — 27 45 0	— 27 46 0
26.	7 58	Vom hellen Stern im Widder ...	23 20 0	Länge ♉ 9 0 0	♉ 9 2 28
		Vom Aldebaran	26 44 0	Breite — 12 36 0	— 12 34 13
27.	6 45	Vom h. Stern im Widder	20 45 0	Länge ♉ 7 5 40	♉ 7 8 45
		Vom Aldebaran	28 10 0	Breite — 10 23 0	— 10 23 13
28.	7 39	Vom h. Stern im Widder	18 29 0	Länge ♉ 5 24 45	♉ 5 27 52
		Vom Siebengestirn	29 37 0	Breite — 8 22 50	— 8 23 37
31.	6 45	Vom Gürtel der Adromeda	30 48 10	Länge ♉ 2 7 40	♉ 2 8 20
		Vom Siebengestirn..........	32 53 30	Breite — 4 13 0	— 4 16 25
1665 Jan. 7.	7 37,5	Vom Gürtel der Adromeda	25 11 0	Länge ♈ 28 24 47	♈ 28 24 0
		Vom Siebengestirn	37 12 25	Breite + 0 54 0	+ 0 53 0
13.	7 0	Vom Kopfe der Adromeda	28 7 10	Länge ♈ 27 6 54	♈ 27 6 39
		Vom Siebengestirn	38 55 20	Breite + 3 6 50	+ 3 7 40
24.	7 29	Vom Gürtel der Adromeda	20 32 15	Länge ♈ 26 29 15	♈ 26 28 50
		Vom Siebengestirn	40 5 0	Breite + 5 25 50	+ 5 26 0
Febr. 7.	8 37			Länge ♈ 27 24 46	♈ 27 24 55
				Breite + 7 3 26	+ 7 3 15
22.	8 46			Länge ♈ 28 29 46	♈ 28 29 58
				Breite + 8 12 36	+ 8 10 25
März 1.	8 16			Länge ♈ 29 18 15	♈ 29 18 20
				Breite + 8 36 26	+ 8 36 12
7.	8 37			Länge ♉ 0 2 48	♉ 0 2 42
				Breite + 8 56 30	+ 8 56 56

Im Februar 1665 befand sich der erste Stern im Widder, welchen ich für die Folge γ nennen werde, im ♈ 28° 30′ 15″ bei einer nördlichen Breite von 7° 8′ 58″. Der zweite Stern des Widders in ♈ 29° 17′ 18″ bei einer nördlichen Breite von 8° 28′ 16″. Ein anderer Stern 7. Grösse, welchen ich A nennen werde, befand sich in ♈ 28° 24′ 45″ bei einer nördlichen Breite von 8° 28′ 33″. Nun bildete der Komet am 7. Februar um 7^h 30^m Pariser Zeit (d. h. am 7. Februar um 8^h 37^m alten Styls Danziger Zeit) mit den Sternen γ und A ein bei γ rechtwinkliges Dreieck. Der Abstand des Kometen von γ war dem Abstande der Sterne γ und A, d. h. 1° 19′ 46″ im grössten Kreise und daher auf dem Breitenparallele des Sternes γ 1° 20′ 26″ gleich. Subtrahirt man diese Grösse von der Länge des Sternes γ, so bleibt die Länge des Kometen = ♈ 27° 9′ 49″. Auzout, welcher diese Beobachtung angestellt hat, schliesst daraus, dass der Komet sich nahe bei in ♈ 27° 0′ befand, und nach der Zeichnung, in welche Hook den Lauf des Kometen eingetragen hat, befand sich dieser in ♈ 26° 59′ 24″. Indem ich das Mittel aus diesen Angaben nahm, setzte ich ihn in ♈ 27° 4′ 46″. Durch dieselbe Beobachtung setzte Auzout die Breite des Kometen zu 7° 4′ gegen Norden. Sie würde genauer 7° 3′ 29″ gewesen sein, indem man immer den Unterschied der Breiten des Kometen und des Sternes γ dem Unterschiede der Längen beider Sterne γ und A gleich gesetzt hätte.[326])

Am 22. Februar um 7^h 30^m Londoner, d. h. 8^h 46^m Danziger Zeit, war der Abstand des Kometen vom Stern A, nach Hook's Beobachtung, welche er in eine Zeichnung eingetragen hatte und nach der von Petit zufolge Auzout's Beobachtungen entworfenen Zeichnung gleich $^1/_5$ vom gegenseitigen Abstande der Sterne A und γ oder = 15′ 57″. Der Abstand des Kometen von der Linie, welche die Sterne A und γ verbindet, war gleich $^1/_4$ des vorhergehenden Abstandes, d. h. = 4′. Der Komet befand sich also in ♈ 28° 29′ 46″ Länge und 8° 12′ 36″ nördlicher Breite.

Am 1. März um 7^h 0^m Londoner, d. h. 8^h 16^m Danziger Zeit wurde der Komet in der Nähe vom zweiten Sterne des Widders beobachtet, und der gegenseitige Abstand beider verhielt sich zum gegenseitigen Abstande des ersten und zweiten Sternes im Widder, d. h. zu

1° 33′ wie 4 : 45 nach Hook,
oder „ 2 : 23 „ Gottignies;

der wahre Abstand des Kometen vom 2. Stern betrug daher

8′ 16″ nach Hook,
8 5 „ Gottignies,
also im Mittel 8′ 10″

Der Komet war aber damals nach Gottignies dem zweiten Sterne des Widder fast um $^1/_4$ oder $^1/_5$ seines täglichen Weges, d. h. um ungefähr 1′ 35″ (übereinstimmend mit Auzout) oder nach Hook um etwas weniger, etwas voraus. Addirt man daher zur Länge jenes zweiten Sternes

1' und zu seiner Breite 8' 10'', so erhält man für die Kometen ♈ 29° 18' Länge und 8° 36' 26'' nördlicher Breite.

Am 7. März um 7^h 30^m Pariser, d. h. 8^h 37^m Danziger Zeit war der Abstand des Kometen vom zweiten Sterne im Widder, nach Auzout's Beobachtungen, gleich dem Abstande dieses Sternes von dem Stern A, d. h. 52' 29''. Der Längenunterschied der beiden erst genannten Himmelskörper war 45' oder 46' oder im Mittel = 45' 30'' und es befand sich daher der Komet in ♈ 29° 17' 18'' + 45' 30'' = ♉ 0° 2' 48'' Länge.

Aus der Figur, welche Petit nach Auzout's Beobachtungen construirt hat, schloss Hevel auf die Breite des Kometen = 8° 54'; allein der Kupferstecher hatte den Weg des Kometen, gegen das Ende seines Laufes, etwas unregelmässig gekrümmt. Hevel hat diese unregelmässige Krümmung in der, von ihm nach Auzout's Beobachtungen entworfenen, Figur verbessert und so die Breite des Kometen auf 8° 55' 30'' festgesetzt, und durch weitere Verbesserung der Unregelmässigkeit kann sie auf 8° 56' oder 8° 57' gehen.

Dieser Komet wurde auch am 9. März gesehen, und er musste sich etwa in ♉ 0° 18' Länge und 9° 3,5' nördliche Breite befinden.

Derselbe war drei Monate hindurch sichtbar, durchlief beinahe 6 Zeichen und legte jeden Tag fast 20' zurück. Seine Bahn wich sehr von einem grössten Kreise ab, sie war gegen Norden gekrümmt und gegen das Ende wurde sein Lauf rechtgängig, nachdem er rückgängig gewesen war. Dieser so ungewöhnliche Lauf stimmte vom Anfang bis zum Ende eben so genau mit der Theorie überein, wie der Lauf der Planeten gewöhnlich mit ihrer Theorie übereinzustimmen pflegt; man ersieht dies aus der Tabelle. Man muss indessen 2' für die Zeit, wo der Komet die grösste Geschwindigkeit hatte, abziehen; diess geschieht, indem man den Winkel zwischen dem aufsteigenden Knoten und dem Perihel um 12'' vermindert und ihn = 49° 27' 18'' annimmt. Die jährliche Parallaxe beider Kometen (so wohl dieses als des vorhergehenden) war sehr beträchtlich, woraus die Bewegung der Erde und der grossen Bahn hervorgeht.

Diese Theorie wird auch durch die Bewegung des Kometen, welcher sich im Jahre 1683 gezeigt hat, bestätigt. Dieser war rückläufig in seiner Bahn, und die Ebene der letzteren bildete mit der Ekliptik fast einen rechten Winkel. Sein aufsteigender Knoten ☊ war (nach Halley's Rechnung) in ♍ 23° 23'

die Neigung gegen die Ekliptik war . . . $J =$ 83° 11'
die Länge des Perihels . . . . $\tilde{\omega} =$ ♊ 25 29 30''
der Abstand des letztern von der Sonne . . $q =$ 56020
wenn der Radius der grossen Bahn . . . $a =$ 100000

angenommen wird. Die Zeit der Sonnennähe war $T =$ Juli 2. 3^h 50^m. Die Oerter des Kometen in dieser Bahn sind von Halley berechnet

worden, und man findet sie in der folgenden Tabelle mit **Flamsteed's** Beobachtungen verglichen.

1683 Wahre Zeit.			Ort der Sonne.	Berechnete Länge.	Berechnete Breite.	Beobachtete Länge.	Beobachtete Breite.	Unterschied der B — R. Länge.	Unterschied der B — R. Breite.
		h m							
Juli	13.	12 55	♌ 1° 2′ 30″	♋ 13° 5′ 42″	+29° 28′ 13″	♋ 13° 6′ 42″	+29° 28′ 20″	+ 1′ 0″	+ 0′ 7″
	15	11 15	2 53 12	11 37 48	29 34 0	11 39 43	29 34 50	+ 1 55	+ 0 50
	17.	10 20	4 45 45	10 7 6	29 33 30	10 8 40	29 34 0	+ 1 34	+ 0 30
	23.	13 40	10 38 21	5 10 27	28 51 42	5 11 30	28 50 28	+ 1 3	— 1 14
	25.	14 5	12 35 28	3 27 53	28 24 47	3 27 0	28 23 40	— 0 53	— 1 7
	31	9 42	18 9 22	♊ 27 55 3	26 22 52	♊ 27 54 24	26 22 25	— 0 39	— 0 27
	31.	14 55	18 21 53	27 41 7	26 16 57	27 41 8	26 14 50	+ 0 1	— 2 7
Aug.	2.	14 56	20 17 16	25 29 32	25 16 41	25 28 46	25 17 28	— 0 46	+ 1 9
	4.	10 49	22 2 50	23 18 20	24 10 49	23 16 55	24 12 19	— 1 25	+ 1 30
	6.	10 9	23 56 45	20 42 23	22 47 5	20 40 32	22 49 5	— 1 51	+ 2 0
	9	10 26	26 50 52	16 7 57	20 6 37	16 5 55	20 6 10	— 2 2	— 0 27
	15.	14 1	♍ 2 47 13	3 30 48	11 37 33	3 26 18	11 32 1	— 4 30	— 5 32
	16.	15 10	3 48 2	0 43 7	9 34 16	0 41 55	9 34 13	— 1 12	— 0 3
	18.	15 44	5 45 33	♉ 24 52 53	+ 5 11 15	♉ 24 49 5	+ 5 9 11	— 3 48	— 2 4
	22.	14 44	9 35 49	11 7 14	— 5 16 53	11 7 12	— 5 16 50	— 0 2	+ 0 3
	23.	15 52	10 36 48	7 2 18	8 17 9	7 1 17	8 16 41	— 1 1	+ 0 28
	26.	16 2	13 31 10	♈ 24 45 31	16 38 0	♈ 24 44 0	16 38 20	— 1 31	— 0 20

Die Theorie wird ferner durch die Bewegung des rückgängigen Kometen bestätigt, welcher im Jahre 1682 erschienen ist. Sein aufsteigender Knoten lag nach **Halley** in ♉ 21° 16′ 30″

die Neigung seiner Bahn gegen die Ekliptik war = 17° 56′ 0″
die Länge des Perihels . . . . = ♒ 2 52 50
sein Abstand im Perihel von der Sonne . . . = 58828
wenn der Radius der grossen Bahn . . . . . = 100000

gesetzt ist. Die verbesserte Zeit seiner Sonnennähe war September 4. 7^h 39^m. In der folgenden Tabelle findet man die Vergleichung der, nach **Flamsteed's** Beobachtungen berechneten Oerter mit denjenigen, welche die Theorie ergibt.

Scheinbare Zeit 1682.		Ort der Sonne.	Berechnete Länge.	Berechnete Breite.	Beobachtete Länge.	Beobachtete Breite.	R — B Unterschied der Länge.	R — B Unterschied der Breite.
	h m							
Aug.	19. 16 38	♍ 7° 0′ 7″	♌ 18° 14′ 28″	+25° 50′ 7″	♌ 18° 14′ 40″	+25° 49′ 55″	—9′ 12″	+0′ 12″
	20. 15 38	7 55 52	24 46 23	26 14 42	24 46 22	26 12 52	+0 1	+1 50
	21. 8 21	8 36 14	29 37 15	26 20 3	29 38 2	26 17 37	—0 47	+2 26
	22. 8 8	9 33 55	♍ 6 29 53	26 8 42	♍ 6 30 3	26 7 12	—0 10	+1 30
	29. 8 20	16 22 40	♎ 12 37 54	18 37 47	♎ 12 37 49	18 34 5	+0 5	+3 42
	30. 7 45	16 19 41	15 36 1	17 26 43	15 35 18	17 27 17	+0 43	—0 34
Sept.	1. 7 33	19 16 9	20 30 53	15 13 0	20 27 4	15 9 49	+3 49	+3 11
	4. 7 22	22 11 28	25 42 0	12 23 48	25 40 58	12 22 0	+1 2	+1 48
	5. 7 32	23 10 29	27 0 46	11 33 8	27 59 24	11 33 51	+1 22	—0 43
	8. 7 16	26 5 58	29 58 44	9 26 46	29 58 45	9 26 43	—0 1	+0 3
	9. 7 26	27 5 9	♏ 0 44 10	8 49 10	♏ 0 44 4	8 48 25	+0 6	+0 45

Endlich wird die Theorie auch noch durch die rückschreitende Bewegung des, im Jahre 1723 erschienenen, Kometen bestätigt. Nach Bradley's Rechnung lag sein aufsteigender Knoten in ♈ 14° 46′

die Neigung seiner Bahn gegen die Ekliptik betrug . 49 59

die Länge seines Perihels . . . . ♉ 12 15 20″

sein Abstand von der Sonne im Perihel war . . . = 998651

für den Radius der grossen Bahn . . . . = 1000000

endlich die verbesserte Zeit der Sonnennähe September 16. 16ʰ 10ᵐ.

Die Oerter des Kometen in der Bahn, berechnet von Bradley, und verglichen mit den von ihm selbst, seinem Grossoheim Pound und von Halley beobachteten Oertern, befinden sich in der folgenden Tabelle.

1723. Wahre Zeit.	Beobachtete.		Berechnete.		R. — B. Unterschied der	
	Länge.	Breite.	Länge.	Breite.	Länge.	Breite
Oct. 9 8ʰ 5ᵐ	♒ 7° 22′ 15″	+ 5° 2′ 0″	♒ 7° 21′ 26″	+ 5° 2′ 47″	+ 49″	— 47″
10. 6 21	6 41 12	7 44 13	6 41 42	7 43 18	— 30	+ 55
12. 7 22	5 39 58	11 55 0	5 40 19	11 54 55	— 21	+ 5
14. 8 57	4 59 49	14 43 50	5 0 37	14 44 1	— 48	— 11
15. 6 35	4 47 41	15 40 51	4 47 45	15 40 55	— 4	— 4
21. 6 22	4 2 32	19 41 49	4 2 21	19 42 3	+ 11	— 14
22. 6 24	3 59 2	20 8 12	3 59 10	20 8 17	— 8	— 5
24. 8 2	3 55 29	20 55 18	3 55 11	20 55 9	+ 18	+ 9
29. 8 56	3 56 17	22 20 27	3 56 42	22 20 10	— 25	+ 17
30. 6 20	3 58 9	22 32 28	3 58 17	22 32 12	— 8	+ 16
Nov. 5. 5 53	4 16 30	23 38 33	4 16 23	23 38 7	+ 7	+ 26
8. 7 6	4 29 36	24 4 30	4 29 54	24 4 40	— 18	— 10
14. 6 20	5 2 16	24 48 46	5 2 51	24 48 16	— 35	+ 30
20. 7 45	5 42 20	25 24 45	5 43 13	25 25 17	— 53	— 32
Dec. 7. 6 45	8 4 13	26 54 18	8 3 55	26 53 42	+ 18	+ 36

Durch diese Beispiele wird überflüssig klar, dass die Bewegungen der Kometen sich eben so genau aus der dargestellten Theorie ableiten lassen, als die Bewegungen der Planeten sich aus der ihrigen ergeben. Man kann also aus dieser Theorie die Bahnen der Kometen berechnen und wird in der Folge die Umlaufszeit eines, in einer beliebigen Bahn sich bewegenden, Kometen kennen lernen. Durch dieses Mittel wird man ferner dahin gelangen, so wohl die Axen ihrer als elliptisch vorausgesetzten Bahnen, als auch ihre Abstände in den Sonnenfernen kennen zu lernen.

Der rückläufige Komet, welcher im Jahre 1607 erschienen ist, beschrieb eine Bahn, deren aufsteigender Knoten sich (nach Halley's Rechnung) in ♉ 20° 21′ befand und deren Neigung gegen die Ekliptik = 17° 2′ war. Das Perihel lag in ♒ 2° 16′, der Abstand von der Sonne im Perihel war = 58680, für den Radius der grossen Bahn = 100000. Die Zeit des Perihels war October 16. 3ʰ 50ᵐ.

Diese Bahn stimmt sehr nahe mit derjenigen des Kometen von 1682 überein. Nimmt man an, dass beide Kometen ein und derselbe gewesen seien; so findet man, dass seine Umlaufszeit 75 Jahre betrage, dass seine grosse Axe sich zur grossen Axe der Erdbahn verhalte, wie $\sqrt[3]{75^2} : 1$, oder wie ungefähr 1778 : 100, und dass der Abstand dieses Kometen im Aphel sich zum mittleren Abstande der Erde von der Sonne verhalte, wie ungefähr 35 : 1. Ist dies bekannt, so wird es nicht schwer sein, die elliptische Bahn dieses Kometen zu bestimmen. Für alles dies wird sich der Beweis finden, wenn der Komet nach 75 Jahren in derselben Bahn wiederkehrt.[327]) Es scheint, dass die anderen Kometen einer längeren Zeit bedürfen, um ihre Umläufe zu vollenden und dass sie zu grösseren Entfernungen ansteigen.[328])

Uebrigens müssen die Kometen ihren Lauf merklich durch ihre gegenseitige Anziehung stören, so wohl wegen ihrer grossen Anzahl und ihrer grossen Entfernung von der Sonne im Aphel, als auch der langen Zeit, während welcher sie im letzteren verweilen.[329])

Hierdurch müssen ihre Excentricitäten und Umlaufszeiten bald ein wenig vergrössert bald verkleinert werden. Man darf daher nicht hoffen, dass ein Komet immer dieselbe Bahn beschreiben und dass seine Umlaufszeit immer dieselbe sein werde. Es genügt, wenn diese Aenderungen nicht grösser werden, als die, welche aus obigen Ursachen entspringen.

So findet man einen Grund, wesshalb die Kometen nicht, wie die Planeten, im Zodiacus eingeschlossen sind,[330]) und warum sie mit verschiedenen Bewegungen sich in alle Gegenden des Himmels begeben; dies geschieht nämlich, damit sie in ihren Aphelien, wo ihre Bewegung sehr langsam ist, hinreichend von einander entfernt bleiben, um ihre wechselseitige Anziehung nicht merklich werden zu lassen.[331]) Aus diesem Grunde müssen die Kometen, welche von den höchsten Punkten herabsteigen und sich daher in ihren Aphelien langsamer bewegen, wieder sehr hoch hinaufsteigen.

Der im Jahre 1680 erschienene Komet war in seinem Perihel kaum um $^1/_6$ des Durchmessers der Sonne von dieser entfernt, und wegen der ausserordentlich grossen Geschwindigkeit, welche er damals hatte und der Dichtigkeit, welche die Atmosphäre der Sonne haben kann, musste er einigen Widerstand erleiden, seine Bewegung also ein wenig verzögert werden und er selbst näher zur Sonne kommen. Wenn er fortfährt, sich bei jedem Umlauf der Sonne mehr zu nähern, so wird er zuletzt auf die Sonnenkugel fallen. Im Aphel, wo seine Bewegung am langsamsten ist, kann er durch die Anziehung der anderen Kometen verzögert werden und plötzlich auf die Sonne fallen. So können die Fixsterne, welche sich nach und nach durch Strahlung und Ausdünstung erschöpfen, mittelst der auf sie fallenden Kometen erneuert werden und auch, indem sie sich mittelst dieser neuen Nahrung entzünden, als neue Sterne sichtbar werden. Von dieser Art sind diejenigen Fixsterne, welche plötzlich erscheinen, im Anfange sehr glänzend sind und hierauf nach und nach verschwinden. Ein solcher Stern war derjenige, welchen Cornelius Gemma am 8. November 1572 im Sitze der Cassiopeia wahrnahm, während er diesen Theil des Himmels in einer nicht ganz heitern Nacht durchmusterte. In der folgenden Nacht, d. h. am 9. November fand er denselben glänzender als irgend einen andern Fixstern und kaum der Venus an Licht nachstehend. Tycho de Brahe sah denselben Stern am 11. November, wo sein Glanz am lebhaftesten war. Von diesem Tage an nahm er allmählig ab, und nach 16 Monaten sah er ihn verschwinden. Im November, wo er anfing, sichtbar zu werden, glich sein Licht dem der Venus. Im folgenden Monat December war er etwas vermindert und kam noch dem des Jupiter gleich. Im Januar 1573 war er kleiner als der Jupiter und grösser als Sirius, welchem er

Ende Februar und Anfangs März gleich wurde. Im April und Mai war er nur noch von der 2. Grösse, im Juni, Juli und August von der 3., im September, October und November von der 4., im December 1573 und Januar 1574 von der 5., im Februar von der 6. Grösse und im März endlich verschwand er. Seine Farbe war im Anfange klar, weiss und sehr glänzend, hierauf wurde sie gelblich und im März 1573 röthlich, ungefähr wie Mars oder Aldebaran. Im Mai wurde sie bläulich weiss, wie Saturn, und diese Farbe behielt er bis zum Ende bei, er wurde jedoch immer dunkeler.

Eben so war der Stern beschaffen, welchen Kepler's Schüler zum ersten Male am 30. September 1604 alten Styls im rechten Fusse des Schlangenträgers wahrnahmen und welcher bereits den Jupiter an Licht übertraf, obgleich er in der vorhergehenden Nacht gar nicht gesehen war. Er begann hierauf, allmählig abzunehmen und nach 15 oder 16 Monaten konnte man ihn nicht mehr wahrnehmen.

Es war ebenfalls ein neuer Stern dieser Art, welcher zur Zeit Hipparch's so glänzend erschien, dass dieser nach Plinius' Erzählung dadurch bewogen wurde, die Fixsterne zu beobachten und einen Katalog derselben anzufertigen. Die Sterne, welche wechselweise erscheinen und verschwinden, deren Licht allmählig zunimmt und welche die 3. Grösse kaum jemals überschreiten, scheinen von einer anderen Art zu sein, und uns, indem sie sich umwälzen, wechselweise einen glänzenden und einen dunkeln Theil zu zeigen. Die Dünste aber, welche aus der Sonne, den Fixsternen und den Kometenschweifen aufsteigen, können vermöge ihres Gewichtes in die Atmosphären der Planeten fallen, sich dort verdichten und in Wasser und flüssige Gasarten verwandeln; hierauf aber, durch langsame Erwärmung, nach und nach in Salze, Schwefel, Tincturen, Schlamm, Thon, Erde, Sand, Steine, Korallen und andere irdische Stoffe übergehen.

§. 61. Allgemeine Anmerkung. Die Hypothese der Wirbel unterliegt vielen Schwierigkeiten. Damit nämlich jeder Planet um die Sonne Flächen beschreiben könne, welche der Zeit proportional sind, müssten die Umlaufszeiten der Theile ihres Wirbels im doppelten Verhältniss ihres Abstandes von der Sonne stehen. Damit die Umlaufszeiten der Planeten im $^3/_2$ten Verhältniss ihrer Abstände von der Sonne ständen, müssten die Umlaufszeiten der Theile ihrer Wirbel im $^3/_2$ten Verhältniss ihrer Abstände stehen. Damit ferner die kleinen Wirbel, welche sich um den Saturn, den Jupiter und andere Planeten drehen, für sich bestehen und sich frei im Wirbel der Sonne bewegen könnten, müssten die Umlaufszeiten der Theile des Sonnenwirbels gleich sein. Die Umdrehungen der Sonne und der Planeten um ihre Axen, welche mit den Bewegungen der Wirbel übereinstimmen müssten, weichen aber weit von diesen Proportionen ab. Die Kometen haben sehr regelmässige Bewegungen, sie befolgen bei ihren Umläufen dieselben Gesetze wie die Planeten und ihr Lauf kann nicht durch Wirbel erklärt werden. Sie

gehen nämlich mit sehr excentrischen Bewegungen in alle Theile des Himmels, was nur geschehen kann, wenn man die Wirbel aufhebt.

Die geworfenen Körper erleiden hienieden keinen andern Widerstand, als den der Luft und im Boyle'schen Vacuum hört aller Widerstand auf, so dass eine dünne Feder und festes Gold dort mit gleicher Geschwindigkeit fallen. Dasselbe findet in den Himmelsräumen oberhalb unserer Atmosphäre statt. In ihnen müssen sich alle Körper ganz frei bewegen, und also die Planeten und Kometen ihre Umläufe in Bahnen, welche der Art und Lage nach gegeben sind, zurücklegen, indem sie die oben erklärten Gesetze befolgen. Sie werden nach den Gesetzen der Schwere in ihren Bahnen verharren, aber die ursprüngliche und regelmässige Lage der letztern konnte sie nicht durch diese Gesetze erlangen.

Die sechs Hauptplaneten bewegen sich um die Sonne in Kreisen, welche um die letztere concentrisch sind, sie befinden sich sehr nahe in derselben Ebene und ihre Bewegungen haben dieselbe Richtung. Die zehn Monde, welche sich um die Erde, den Jupiter und den Saturn in Kreisen drehen, die um diese Planeten concentrisch sind, bewegen sich in derselben Richtung und sehr nahe in den Ebenen dieser Planetenbahnen. Alle diese so regelmässigen Bewegungen entspringen nicht aus mechanischen Ursachen; da die Kometen sich in sehr excentrischen Bahnen und nach allen Gegenden des Himmels frei bewegen. Vermöge dieser Art von Bewegung gehen die letzteren sehr schnell und leicht durch die Planetenbahnen und sind in ihrem Aphel, wo ihre Bewegung sehr langsam ist und sie längere Zeit verweilen, so weit von einander entfernt, dass ihre gegenseitige Anziehung fast unmerklich ist. Diese bewundernswürdige Einrichtung der Sonne, der Planeten und Kometen hat nur aus dem Rathschlusse und der Herrschaft eines alles einsehenden und allmächtigen Wesens hervorgehen können. Wenn jeder Fixstern das Centrum eines, dem unserigen ähnlichen Systemes ist, so muss das Ganze, da es das Gepräge eines und desselben Zweckes trägt, bestimmt Einem und demselben Herrscher unterworfen sein. Das Licht der Fixsterne ist von derselben Natur, wie das der Sonne, und alle Systeme senden einander ihr Licht zu. Ferner sieht man, dass derjenige, welcher diese Welt eingerichtet hat, die Fixsterne in ungeheure Entfernungen von einander gestellt hat, damit diese Kugeln nicht, vermöge ihrer Schwerkraft, auf einander fallen.[332])

Dieses unendliche Wesen beherrscht alles, nicht als Weltseele, sondern als Herr aller Dinge. Wegen dieser Herrschaft pflegt unser Herr Gott *παντοκράτωρ*, d. h. der Herr über Alles **genannt zu werden. Denn das Wort Gott (Deus) bezieht sich auf Diener und die Gottheit ist die Herrschaft Gottes nicht über einen eigentlichen Körper, wie diejenigen annahmen, welche Gott einzig zur Weltseele machen, sondern**

über Diener. Der höchste Gott ist ein unendliches, ewiges und durchaus vollkommenes Wesen; ein Wesen aber, wie vollkommen es auch sei, wenn es keine Herrschaft ausübte, würde nicht Gott sein. Wir sagen nämlich wohl: mein Gott, unser Gott, der Gott Israels, der Gott der Götter, der Herr der Herrn; aber wir sagen nie: mein Ewiger, euer Ewiger, der Ewige Israels, der Ewige der Götter und eben so wenig mein Unendlicher, noch mein Vollkommener; weil diese Bezeichnungen sich nicht auf unterworfene Wesen beziehen. Das Wort Gott (Deus) bezeichnet bisweilen Herr*), aber jeder Herr ist nicht Gott. Die Herrschaft eines geistigen Wesens ist es was Gott ausmacht; sie ist wahr im wahren Gott, die höchste im höchsten und die erdichtete im erdichteten Gotte. Es folgt hieraus, dass der wahre Gott ein lebendiger, einsichtiger und mächtiger Gott, dass er über dem Weltall erhaben und durchaus vollkommen ist. Er ist ewig und unendlich, allmächtig und allwissend, d. h. er währt von Ewigkeit zu Ewigkeit, von Unendlichkeit zu Unendlichkeit, er regiert alles, er kennt alles, was ist oder was sein kann. Er ist weder die Ewigkeit noch die Unendlichkeit, aber er ist ewig und unendlich; er ist weder die Dauer noch der Raum, aber er währt fort und ist gegenwärtig; er währt stets fort und ist überall gegenwärtig, er existirt stets und überall, er macht den Raum und die Dauer aus. Da jedes Theilchen des Raumes beständig existirt, und jeder untheilbare Moment der Dauer überall fortwährt; so kann man nicht behaupten, dass derjenige, welcher der Herr und Verfertiger aller Dinge ist, nie und nirgend existire. Jede Seele, welche zu verschiedenen Zeiten, durch verschiedene Sinne und durch die Bewegung mehrerer Organe denkt, ist stets eine und dieselbe untheilbare Person. Es giebt auf einander folgende Theile in der Dauer und neben einander stehende Theile im Raume; es giebt aber nichts Aehnliches in dem, was die Person des Menschen ausmacht, oder in seinem denkenden Princip und noch viel weniger wird dergleichen in der der denkenden Substanz Gottes stattfinden. Jeder Mensch, so weit er ein fühlendes Wesen ist, ist während seines ganzen Lebens und in allen verschiedenen Organen seiner Sinne ein und derselbe Mensch. Eben so ist Gott überall und beständig ein und derselbe Gott. Er ist überall gegenwärtig, und zwar nicht nur virtuell, sondern auch substantiell; denn man kann nicht wirken, wenn man nicht ist. Alles wird in ihm bewegt und ist in ihm ent-

*) Pocok leitet das Wort Gott (Deus) vom arabischen Worte Du (Genitiv Di) ab, welches Herr bedeutet, und in diesem Sinne werden die Fürsten Götter genannt. (Psalm 84., V. 6 und Joh. Cap. 10., V. 45.) Moses wird der Gott seines Bruders Aron und des Königs Pharao genannt (Exodus, Cap. 4., V. 16. und Cap. 7., V. 1.) und in demselben Sinne wurden sonst die Seelen der Fürsten von den Heiden Götter genannt, aber mit Unrecht, denn nach ihrem Tode haben sie keine Herrschaft mehr.
Bemerkung des Verfassers.

halten*), aber ohne wechselseitige Einwirkung; denn Gott erleidet nichts durch die Bewegung der Körper und seine Allgegenwart lässt sie keinen Widerstand empfinden. Es ist klar, dass der höchste Gott nothwendig existire, und vermöge derselben Nothwendigkeit existirt er überall und zu jeder Zeit. Hieraus folgt auch, dass er durchaus sich selbst ähnlich ist, ganz Ohr, Auge, Gehirn, Arm, Gefühl, Einsicht und Wirksamkeit auf eine keineswegs menschliche und noch weniger körperliche, sondern durchaus unbekannte Weise. Eben so wie der Blinde keine Idee von den Farben hat, haben wir auch durchaus keine Idee von der Weise, wie der weiseste Gott fühlt und alle Dinge erkennt. Er hat weder einen Körper, noch eine körperliche Gestalt; er kann also weder gesehen, noch gehört, noch berührt werden, und man darf ihn unter keiner fühlbaren Gestalt anbeten. Wir haben wohl eine Vorstellung von seinen Eigenschaften, aber keine von seinen Bestandtheilen. Wir sehen nur die Gestalt und Farbe der Körper, wir hören ihre Töne, wir fühlen ihre äussere Oberfläche, wir riechen und schmecken sie; was aber die inneren Substanzen betrifft, so erkennen wir sie weder durch irgend einen Sinn, noch durch Nachdenken, und noch weniger haben wir eine Vorstellung von der Substanz Gottes. Wir kennen ihn nur durch seine Eigenschaften und Attribute, durch die höchst weise und vorzügliche Einrichtung aller Dinge und durch ihre Endursachen; wir bewundern ihn wegen seiner Vollkommenheiten, wir verehren und beten ihn an wegen seiner Herrschaft. Wir als Unterthanen beten ihn an, denn Gott ohne Vorsehung, ohne Herrschaft und ohne Endursachen ist nichts anderes, als die Bestimmung (Fatum) und die Natur.

Die blinde metaphysische Nothwendigkeit, welche stets und überall dieselbe ist, kann keine Veränderung der Dinge hervorbringen; die ganze, in Bezug auf Zeit und Ort herrschende Verschiedenheit aller Dinge kann nur von dem Willen und der Weisheit eines nothwendig existirenden Wesens herrühren. Man sagt allegorisch: Gott sieht, hört, redet, lacht, liebt, hasst, wünscht, giebt, nimmt an, freut sich, zürnt, kämpft, arbeitet, hanet, construirt; weil alles dasjenige, was man von

---

*) Die Alten hatten diesen Gedanken, wie aus der Weise hervorzugehen scheint, nach welcher sich Pythagoras nach Cicero de natura deorum Lib. I. und Thales und Anaxagoras ausdrücken. Eben so Virgil in Georgicon, Buch IV., V. 220. und Aeneis, Buch VI., V. 721.; Philo im Anfange des Buches I. der Allegorie und Aratus in seinen Erscheinungen (Phaenomena). Eben so verhält es sich in der heiligen Schrift: Paulus, Apostelgeschichte, Cap. XVII., V. 27. und 28.; Johannes in seinem Evangelium, Cap. XIV., V. 2.; Moses im Deuteronomium, Cap. IV., V. 39. und Cap. X., V. 14.; David in Psalm 139., V. 7., 8. und 9., Salomon im 1. Buch der Könige, Cap. VIII., V. 27.; Hiob, Cap. XXII. V. 12., 13. und 14.; Jeremias, Cap. XXIII., V. 23. und 24. Die Heiden dachten sich, dass die Sonne, der Mond, die Sterne, die Seelen der Menschen und alle anderen Theile der Welt Stücke des höchsten Wesens ausmachten; und dass man ihnen Verehrung schuldig sei.

Bemerkung des Verfassers.

Gott sagt, von irgend einer Vergleichung mit menschlichen Dingen entnommen ist. Diese Vergleichungen, wenn sie auch sehr unvollkommen sind, geben indessen doch eine schwache Vorstellung von ihm.

Dies hatte ich von Gott zu sagen, dessen Werke zu untersuchen, die Aufgabe der Naturlehre ist.

Ich habe bisher die Erscheinungen der Himmelskörper und die Bewegungen des Meeres durch die Kraft der Schwere erklärt, aber ich habe nirgends die Ursache der letzteren angegeben. Diese Kraft rührt von irgend einer Ursache her, welche bis zum Mittelpunkte der Sonne und der Planeten dringt, ohne irgend etwas von ihrer Wirksamkeit zu verlieren. Sie wirkt nicht nach Verhältniss der Oberfläche derjenigen Theilchen, worauf sie einwirkt (wie die mechanischen Ursachen), sondern nach Verhältniss der Menge fester Materie, und ihre Wirkung erstreckt sich nach allen Seiten hin, bis in ungeheure Entfernungen, indem sie stets im doppelten Verhältniss der letzteren abnimmt. Die Schwere gegen die Sonne ist aus der Schwere gegen jedes ihrer Theilchen zusammengesetzt, und sie nimmt mit der Entfernung von der Sonne genau im doppelten Verhältniss der Abstände ab, und dies geschieht bis zur Bahn des Saturns, wie die Ruhe der Aphelien der Planeten beweist; sie erstreckt sich ferner bis zu den äusseren Aphelien der Kometen, wenn diese Aphelien in Ruhe sind.[353])

Ich habe noch nicht dahin gelangen können, aus den Erscheinungen den Grund dieser Eigenschaften der Schwere abzuleiten, und Hypothesen erdenke ich nicht. Alles nämlich, was nicht aus den Erscheinungen folgt, ist eine Hypothese und Hypothesen, seien sie nun metaphysische oder physische, mechanische oder diejenigen der verborgenen Eigenschaften, dürfen nicht in die Experimentalphysik aufgenommen werden. In dieser leitet man die Sätze aus den Erscheinungen ab und verallgemeinert sie durch Induction. Auf diese Weise haben wir die Undurchdringlichkeit, die Beweglichkeit, den Stoss der Körper, die Gesetze der Bewegung und der Schwere kennen gelernt. Es genügt, dass die Schwere existire, dass sie nach den von uns dargelegten Gesetzen wirke, und dass sie alle Bewegungen der Himmelskörper und des Meeres zu erklären im Stande sei.

Es würde hier der Ort sein, etwas über die geistige Substanz hinzuzufügen, welche alle festen Körper durchdringt und in ihnen enthalten ist. Durch die Kraft und Thätigkeit dieser geistigen Substanz ziehen sich die Theilchen der Körper wechselseitig in den kleinsten Entfernungen an und haften an einander, wenn sie sich berühren. Durch sie wirken die elektrischen Körper in den grössten Entfernungen, sowohl um die nächsten Körperchen anzuziehen, als auch sie abzustossen. Mittelst dieses geistigen Wesens strömt das Licht aus, wird zurückgeworfen, gebeugt, gebrochen und erwärmt die Körper. Alle Gefühle werden erregt und die Glieder der Thiere nach Belieben bewegt, durch die Vi-

brationen desselben, welche sich von den äusseren Organen der Sinne, mittelst der festen Fäden der Nerven bis zum Gehirn und hierauf von diesem zu den Muskeln fortpflanzen. Diese Dinge lassen sich aber nicht mit wenigen Worten erklären, und man hat noch keine hinreichende Anzahl von Versuchen, um genau die Gesetze bestimmen und beweisen zu können, nach welchen diese allgemeine geistige Substanz wirkt. —

Ueber das Weltsystem.

§. 1. Die Himmelsräume sind flüssig.

Dass die Fixsterne in den höchsten Theilen des Weltraumes unbeweglich verharren[334]), und die Planeten tiefer als sie sich um die Sonne drehen; dass auf gleiche Weise die Erde in ihrem jährlichen Umlaufe und ihrer täglichen Umdrehung um die eigene Axe sich bewege; dass ferner die Sonne, wie ein Brennpunkt der Welt, im Mittelpunkte aller ruhe; dies war eine sehr alte Meinung der Philosophen.

So hatten einst Philolaus, Aristarch von Samos, Plato in früherer Zeit, die Schaar der Pythagoräer*), und früher als diese Anaximander, so wie endlich jener weise König der Römer Numa Pompilius geurtheilt. Der Letztere errichtete, als ein Symbol des runden Weltgebäudes und des Sonnenfeuers im Centrum, den Tempel der Vesta von runder Form und stiftete den heiligen Gebrauch, dass in dessen Mitte ein beständiges Feuer erhalten werden sollte. Es ist aber wahrscheinlich, dass sich diese Meinung von den Aegyptern, den ältesten Beobachtern der Gestirne, fortgepflanzt habe. Von ihnen und den benachbarten Völkern scheint nämlich alle ältere und vernünftigere Philosophie zu den Griechen, einem mehr philosophischen Volke, übergegangen zu sein. Auch verrathen die heiligen Mysterien der Vesta, welche auf den Verstand des Volkes einwirkten, den Geist der Egypter, welche heilige und hieroglyphische Gebräuche bildlich darzustellen pflegten. Hierauf lehrten Anaxagoras, Demokrit und mehrere Andere, dass die Erde sich unbeweglich im Mittelpunkte des Weltraumes befinde, und alle Gestirne sich gegen Westen, einige schneller, andere langsamer und

*) In Betreff der ältesten Pythagoräer erregt mir Timaeus von Locri gewichtige Zweifel, indem er in seinem Werke περι ψυχας κοσμου die Erde auf sehr beredte Weise in der Mitte des Weltalls annimmt. Ueber derselben nimmt er den Mond und über diesem die Sonne an, welche in der Zeit eines Jahres ihren Umlauf vollende. Diese wird nach ihm, fast mit gleicher Geschwindigkeit, durch den Merkur und die Venus begleitet. Hierauf theilt er den drei übrigen Planeten, Mars, Jupiter und Saturn, einem jeden seine eigene Geschwindigkeit und Bahn zu. Alle aber sind innerhalb der Kugel des ersten beweglichen Körpers (Primi Mobilis) enthalten, durch dessen Umdrehung sowohl alle unteren Planeten, als auch die Sonne selbst bewegt werden.
Bemerkung des Verfassers.

in freien Räumen bewegen. Die festen Bahnen wurden nämlich später von Endoxus, Calippus nnd Aristoteles eingeführt, indem man von Tage zu Tage mehr von der ursprünglich eingeführten Lehre abwich und die neueren Dichtungen der Griechen allmählig überwiegende Geltung bekamen.

Mit diesen festen Bahnen vertragen sich schlecht die Erscheinungen der Kometen. Diese rechnete man einst unter die Himmelskörper und die Chaldäer, die sehr kundigen Astronomen, hielten sie für irrende Sterne, welche sich einmal während ihrer einzelnen Umläufe, indem sie in die unteren Theile ihrer sehr exentrischen Bahnen herabsteigen, uns sichtbar darstellen. Obige Hypothese der festen Bahnen stiess die Kometen später mit Nothwendigkeit in die, unterhalb des Mondes gelegenen, Gegenden hinab. Da nun umgekehrt, nach den neueren Beobachtungen der Atronomen, die Kometen in die oberhalb des Mondes gelegenen Gegenden zurückversetzt sind; so brachen jene Bahnen zusammen, und wurden aus dem Aether entfernt.

§. 2. Das Princip der Kreisbewegung in freien Räumen.

Es ist nicht bekannt, durch welche Bande, nach den Lehren der Alten, die Planeten in den freien Räumen gehalten und, indem sie beständig vom geradlinigen Wege abgezogen, in eine reguläre Bahn getrieben werden. Ich glaube, dass man zur Erklärung dieses Umstandes die festen Bahnen erdacht hat. Die neueren Gelehrten nehmen entweder Wirbel an, wie Kepler und Cartesius, oder irgend ein anderes Princip des Stosses oder der Anziehung, wie Borelli, Hook und andere unserer Landsleute.

Aus dem ersten Gesetze der Bewegung geht mit Bestimmtheit hervor, dass irgend eine Kraft erforderlich sei; unsere Aufgabe ist es, ihre Grösse und Eigenschaft herzuleiten und auf mathemathische Weise ihre Wirkung in Körpern, welche sich bewegen sollen, zu erforschen. Damit wir ferner ihre Art nicht hypothetisch bestimmen, haben wir sie, da sie nach einem Centrum gerichtet ist, Centripetalkraft genannt, und indem man die Benennung vom Mittelpunkt annimmt, haben wir eine solare Centripetalkraft, die nach der Sonne, eine terrestritische, die nach der Erde und eine joviale, die nach dem Jupiter gerichtet ist; und eben so bei den übrigen Planeten.

§. 3. Wirkungen der Centripetalkräfte.

Dass durch die Centripetalkräfte die Planeten in ihren Bahnen erhalten werden können, ersieht man aus den Bewegungen der Projectile. Ein geworfener Stein wird, indem ihn seine Schwere antreibt, vom geradelinigen Wege abgebogen und fällt, indem er in der Luft eine krumme Linie beschreibt, zuletzt auf die Erde. Wird er mit grösserer Geschwindigkeit geworfen, so geht er weiter fort und durch weitere Vergrösserung derselben könnte es geschehen, dass er einen Bogen von 1, 2, 5, 10, 100, 1000 Meilen beschriebe, oder dass er endlich über die Grenzen der Erde hinausginge und nicht mehr zurückfiele. Es bezeichne AFB

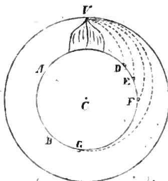


Fig. 213.

die Oberfläche der Erde, C ihren Mittelpnnkt und VD, VE, VF krumme Linien, welche ein, von der Spitze V eines sehr hohen Berges, längs einer horizontalen Linie und mit nach nnd nach vergrösserter Geschwindigkeit geworfener, Körper beschreibt. Damit der Widerstand der Luft, durch welche die Bewegung der Himmelskörper kaum verzögert wird, nicht in Rechnung komme, wollen wir uns dieselbe ganz fortgenommen oder wenigstens ihren Widerstand als nicht vorhanden denken. Auf dieselbe Weise, wie der mit der kleinsten Geschwindigkeit geworfene Körper den kleinsten Bogen VD, mit der grösseren den grösseren Bogen VE beschreibt, mit der noch grösseren Geschwindigkeit bis F nnd weiter bis G gelangt; wird derselbe endlich, wenn die Geschwindigkeit stets vergrössert wird, über den ganzen Umfang der Erde fortgehen nnd zu dem Berge, von welchem er geworfen worden ist, zurückkehren. Da nun die Fläche, welche der Körper mit dem nach dem Mittelpunkte gezogenen Radiusvector beschreibt (nach Principien, Buch I., §. 13.), der Zeit proportional ist; so wird die Geschwindigkeit, bei der Rückkehr zum Berge, nicht kleiner, als beim Ausgange sein. Ist aber die Geschwindigkeit unverändert geblieben, so kann er sich öfters nach demselben Gesetze herumbewegen. Denken wir uns nnn Körper, welche aus höheren Punkten längs horizontaler Linien fortgeworfen werden, nnd zwar aus Punkten, welche 5, 10, 100, 1000 oder mehr Meilen nnd eben so viel Erdhalbmesser hoch liegen; so werden sie nach ihrer verschiedenen Geschwindigkeit nnd nach der, in den einzelnen Pnnkten stattfindenden, Kraft der Schwere Erdbogen beschreiben, die entweder con- oder excentrisch sind, und in diesen Bahnen werden die Körper fortfahren, nach der Weise der Planeten die Himmel zu durchwandern.

§. 4. Gewissheit des Beweises.

Wie man aus dem Falle eines geworfenen Steines schliesst, dass er schwer sei, und wie die beständige Abweichung geworfener Körper gegen die Erde nicht minder ein Zeichen der Schwere ist; so ist jede Abweichnng vom geraden Wege aller, in freien Räumen sich bewegender Körper nnd ihre beständige Hinneigung gegen irgend einen Ort ein sehr sicheres Zeichen, dass eine gewisse Kraft existire, durch welche die Körper überall nach jenem Orte hingetrieben werden. Wie aus dem Vorhandensein der Schwere nothwendig folgt, dass alle Körper anf Erden nach unten hin streben nnd daher entweder geradlinig herabfallen, wenn sie ruhend losgelassen werden, oder von der geradlinigen Bahn stets nach

33*

der Erde zu abliegen, wenn sie geradlinig geworfen werden, so folgt aus einer nach irgend einem Mittelpunkte gerichteten Kraft mit derselben Nothwendigkeit, dass alle Körper, auf welche jene Kraft ihre Wirkung ausübt, entweder in gerader Linie nach jenem Mittelpunkt herabsteigen, oder, wenn sie in schiefer Richtung geworfen worden sind, stets von der geradlinigen Bahn nach jenem Mittelpunkte hin abweichen. Auf welche Weise man aus den Bewegungen auf die Kräfte und aus diesen auf jene schliessen könne, dies ist ausführlich in den Büchern von der Bwegnng dargestellt worden.

§. 5. Die Centripetalkräfte sind nach den einzelnen Mittelpunkten der Planeten gerichtet.

Dass die Centripetalkräfte nach der Sonne, der Erde und den Planeten gerichtet seien, schliesse ich folgendermaassen. Es wandert der Mond um unsere Erde und beschreibt mit den, nach dem Mittelpunkt der letzteren gezogenen Radien Flächenräume, welche sehr nahe den Zeiten proportional sind. Dies ergiebt sich ganz bestimmt aus der Vergleichung der Geschwindigkeit des Mondes mit seinem scheinbaren Durchmesser. Bei einem kleinen scheinbaren Durchmesser, welcher eine grössere Entfernung andeutet, ist die Bewegung langsamer, bei einem grösseren geschwinder. Mit einer regelmässigen Bewegung wandern die Jupitertrabanten um ihren Planeten, indem sie, so weit man es mit den Sinnen wahrnimmt, concentrische Kreise mit gleichförmiger Bewegung beschreiben. So läuft auch der Begleiter des Saturns mit ziemlich gleichförmiger und gleichmässiger Bewegung, indem man die Excentricität kaum wahrnimmt.

Dass die Venus und der Merkur sich um die Sonne bewegen, ersieht man aus ihren mondförmigen Phasen. Bei voller Beleuchtung liegen sie jenseits der Sonne, bei halber in der Gegend der Sonne, bei sichelförmigem Ansehen diesseits der Sonne, wobei sie bisweilen vor der Sonnenscheibe vorübergehen. Die Venus beschreibt nun eine kreisförmige um die Sonne concentrische Bahn, und sehr nahe mit gleichförmiger Bewegung. Der Merkur hingegen, bei seiner mehr excentrischen Bahn, nähert sich bald der Sonne merklich, entfernt sich bald von ihr. Er hat aber immer eine grössere Geschwindigkeit, wenn er sich näher bei der Sonne befindet, woraus folgt, dass er mit dem nach der Sonne gezogenen Radius der Zeit proportionale Flächen beschreibt. Dass endlich die Erde um die Sonne, oder diese um jene, mit dem sie verbindenden Radius Flächen beschreibe, welche genau den Zeiten proportional sind, wird durch die Vergleichung des scheinbaren Durchmessers der Sonne mit ihrer scheinbaren Bewegung bewiesen. Dies sind astronomische Experimente, aus denen (nach den §§. 13., 14. und 16. des ersten Buches nebst ihren Zusätzen) folgt, dass die Centripetalkräfte gegeben sind, welche entweder genau, oder ohne merklichen Fehler nach den Mittelpunkten der Erde, des Jupiters, des Saturns und der Sonne gerichtet sind. Bei dem Merkur, der Venus, dem Mars und den Tra-

banten fehlen die Experimente, und es gilt hier der Beweis durch Analogie.

§. 6. Die Centripetalkräfte nehmen im doppelten Verhältniss der Abstände von den Mittelpunkten der Planeten ab.

Aus §. 18., Zusatz 6. des ersten Buches folgt aber, dass diese Kräfte im doppelten Verhältniss der Abstände vom Mittelpunkte eines jeden Planeten abnehmen. Die Umlaufszeiten der Jupitertrabanten stehen zu einander im $^{3}/_{2}$ten Verhältniss ihrer Abstände vom Mittelpunkte des Planeten. Bei ihnen war dieses Verhältniss schon lange bekannt. Flamsteed aber zeigte mir zuerst, wie man es so genau erhalten könne, als man mit den Sinnen zu unterscheiden vermag, indem er die Abstände öfters mit dem Mikrometer und mittelst der Verfinsterungen der Trabanten bestimmte. Dieselben hatte, vor der Erfindung des Mikrometers, Galilei bestimmt und zwar gab er sie zu respective

an.	6,	10,	16,	28	Jupiterhalbmessern
Nach Simon Marins waren sie	6,	10,	16,	26	-
nach Cassini waren sie	5,	8,	13,	23	-
nach Borelli genauer waren sie	$5^{2}/_{3}$,	$8^{2}/_{3}$,	14,	$24^{2}/_{3}$	-
Nach der Erfindung des Mikrometers bestimmte sie Taunley zu . . .	5,51;	8,78;	13,47;	24,72	-
Flamsteed aber . . .	5,31;	8,85;	13,98;	24,23	-
und genauer mittelst der Verfinsterungen . . .	5,578;	8,876;	14,159;	24,903	-

Die Umlaufszeiten der Trabanten sind nach Flamsteed's Beobachtungen: $1^d\ 18^h\ 28^m\ 36^s$; $3^d\ 13^h\ 17^m\ 54^s$; $7^d\ 3^h\ 59^m\ 36^s$; $16^d\ 18^h\ 5^m\ 13^s$ und die hieraus abgeleiteten Abstände verhalten sich wie die Zahlen 5,578; 8,878; 14,168; 24,968.

Diese stimmen ziemlich nahe mit den, aus der Beobachtung geschlossenen Werthen überein. Bei den der Sonne nahe stehenden Planeten, dem Merkur und der Venus, gilt jene Proportion sehr genau, so weit bis jetzt die Astronomen die Durchmesser dieser Bahnen, mittelst der besten Beobachtungen, bestimmt haben.

§. 7. Die oberen Planeten schliessen die Sonne ein, und beschreiben mit den nach ihr gezogenen Radien Flächen, welche den Zeiten proportional sind.

Dass auch der Mars sich um die Sonne bewege, wird durch seine Phasen und das Verhältniss seiner scheinbaren Durchmesser erwiesen. Aus dem vollen Lichte bei der Conjunction der Sonne und dem höckerigen Ansehen in den Quadraturen ergiebt sich mit Gewissheit, dass er die Sonne umgiebt. Da ferner sein Durchmesser etwa 5mal grösser in der Opposition der Sonne erscheint, als in der Conjunction, und da sein Abstand von der Erde dem scheinbaren Durchmesser umgekehrt pro-

portional ist; so wird jener Abstand in der Opposition etwa 5mal grösser als in der Conjunction sein. Die Entfernung des Mars von der Sonne ist aber in beiden Fällen ungefähr dieselbe, welche man in den Quadraturen aus dem höckerigen Ansehen ableitet. Wie er die Sonne in fast gleichen, die Erde in sehr ungleichen Abständen einschliesst, so beschreibt er auch mit den nach der Sonne gezogenen Radien die Flächenräume ziemlich gleichförmig, an dem nach der Erde gezogenen Radius bewegt er sich bald schnell, bald ist er stillstehend, bald rückgängig. Dass der Jupiter sich oberhalb des Mars befinde und, was Abstand und beschriebene Fläche betrifft, ebenfalls mit ziemlich gleichförmiger Bewegung um die Sonne laufe, schliesse ich folgendermaassen. In einem Briefe, welchen Flamsteed an mich geschrieben hat, bemerkt derselbe, dass alle Verfinsterungen des innersten Trabanten, deren genaue Beobachtung er bis jetzt erfahren hat, mit seiner Theorie innerhalb eines Fehlers von 2 Zeitminuten übereinstimmen. Beim vierten Trabanten sei der Fehler nicht viel grösser, beim dritten kaum 3mal so gross, hingegen beim zweiten viel grösser; jedoch weiche er weniger von seiner Rechnung ab, als der Mond von den gewöhnlichen Tafeln abzuweichen pflegt. Er berechne aber die Verfinsterungen nur vermittelst der mittleren Bewegungen der Trabanten und der von Römer gefundenen Lichtgleichung. Setzen wir nun, dass die Theorie von der bis jetzt beobachteten Bewegung des vierten Trabanten um weniger als 2^m abweiche, so wird sich seine ganze Umlaufszeit von $16^d\ 18^h\ 5^m\ 13^s$ zu 2^m verhalten, wie $360^0 : 1'\ 48''$.

Der Fehler der Flamsteed'schen Rechnung, auf die Bahn der Trabanten reducirt, ist also kleiner als $1'\ 48''$; d. h. die jovicentrische Länge des Trabanten wird bis auf einen Fehler, welcher kleiner als $1'\ 48''$ ist, bestimmt. Jene Länge ist aber, wenn der Trabant sich in der Mitte des Schattens befindet, der heliocentrischen Länge des Jupiters gleich; demnach stellt die Hypothese, welcher Flamsteed folgt, d. h. die Kepler-Kopernikanische, welche er in Bezug auf die Bewegung des Jupiters corrigirt hat, jene Länge bis auf einen Fehler kleiner, als $1'\ 48''$ dar. Durch diese Länge und die immer genau bekannte geocentrische Länge wird der Abstand des Jupiters von der Sonne bestimmt und dieser ist immer derselbe, welcher aus jener Hypothese hervorgeht. Jener grösste Fehler von $1'\ 48''$ in der heliocentrischen Länge ist nämlich fast unmerklich und ganz zu vernachlässigen; er kann aber auch aus der unbekannten Excentricität des Trabanten entspringen. Nachdem der Abstand und die Länge richtig bestimmt sind, muss der Jupiter nothwendig mit dem nach der Sonne gezogenen Radiusvector nach dem Gesetze, welches die Hypothese vorschreibt, Flächenräume beschreiben, die der Zeit proportional sind. Auf dasselbe kann man in Bezug auf den Saturn, aus dessen Trabanten, nach Huygens's und Halley's Beobachtungen schliessen, obgleich eine längere Reihe von Beobachtungen

zur Bestätigung der Sache und einer hinreichend genauen Richtung erforderlich ist.

§. 8. Die Kraft, durch welche die oberen Planeten regiert werden, ist nicht nach der Erde, sondern nach der Sonne gerichtet.

Der Jupiter würde, wenn Jemand ihn von der Sonne aus betrachtete, niemals rückläufig oder stillstehend erscheinen, wie man ihn von der Erde aus sicht, sondern er würde stets mit einer ziemlich gleichförmigen Bewegung vorwärts schreiten. Aus der grössten Ungleichheit der scheinbaren geocentrischen Bewegung schliesst man, nach §. 16, Zusatz 4. des ersten Buches, dass die Kraft, durch welche der Jupiter von der geradlinigen Bewegung abgebracht und in seine Bahn getrieben wird, nicht nach der Erde gerichtet sei. Man muss nun nach §§. 14., 16. und den Zusätzen des letzteren einen anderen Mittelpunkt dieser Kräfte suchen, um welchen die Beschreibung der Flächen durch die verbindenden Radien Vectoren gleichförmig werde. Dass dieser die Sonne sei, ist schon beiläufig für den Mars und Saturn, für den Jupiter aber überflüssig genau erwiesen. Man kann sich ferner vorstellen, dass die Sonne und die Planeten durch irgend eine andere Kraft gleichförmig und längs paralleler Linien angetrieben werden. Durch eine solche Kraft aber wird, nach Gesetze, Zusatz 6., die Lage der Planeten unter sich nicht geändert und keine bemerkbare Wirkung hervorgebracht; wir handeln aber nur von den Ursachen bemerkbarer Wirkungen. Man verwerfe daher jede derartige Kraft als eine precäre und gar nicht auf die Erscheinungen der Himmelskörper einwirkende; die ganze übrige Kraft, durch welche der Jupiter angetrieben wird, ist nach §. 16., Zusatz 1. des ersten Buches, nach dem Mittelpunkte der Sonne gerichtet.

§. 9. Die nach der Sonne gerichtete Kraft nimmt, durch alle Gegenden der Planeten, im doppelten Verhältniss der Abstände von der Sonne ab.

Die Abstände der Planeten von der Sonne ergeben sich übereinstimmend, mögen wir mit Tycho die Erde, oder mit Kopernikus die Sonne in den Mittelpunkt des Systems setzen; und dass diese Abstände die wahren seien, haben wir schon beim Jupiter bewiesen. Auf die Bestimmung derselben haben Kepler und Bullialdus vorzüglich viel Mühe verwendet, weshalb auch ihre Tafeln besser mit den Erscheinungen am Himmel übereinstimmen.

Es verhalten sich aber die Cuben der Abstände bei allen Planeten, beim Jupiter und Mars, dem Saturn und der Erde, wie auch bei der Venus und dem Merkur, wie die Quadrate der Umlaufszeiten, daher nimmt, nach §. 18., Zusatz 6. des ersten Buches, die gegen die Sonne gerichtete Centripetalkraft, durch alle Himmelsgegenden der Planeten, im doppelten Verhältniss der Abstände von der Sonne ab. Bei der Prüfung dieser Proportion muss man immer die mittleren Abstände oder die halben grossen Axen (nach §. 35. des ersten Buches) nehmen und die Kleinigkeiten vernachlässigen, welche bei der Bestimmung der Bahnen

aus unmerklichen Beobachtungsfehlern haben entspringen können und welche man den später anzugebenden Ursachen zuschreiben muss.

So wird man immer genau zu der vorhergehenden Proportion gelangen. Da nämlich die Abstände der Planeten Saturn, Jupiter, Mars, Erde, Venus, Merkur von der Sonne sich, nach astronomischen Beobachtungen und Kepler's Rechnung verhalten, wie die Zahlen: 951000, 519650, 152350, 100000, 72400, 38806, nach Bullialdus's Rechnung aber wie 954198, 522520, 152350, 100000, 72398, 38585; so verhalten sich dieselben hingegen, nach dem Schlusse aus den Umlaufszeiten, wie die Zahlen 953806, 520116, 152399, 100000, 72333, 38710.

Die Abstände Kepler's und Bullialdu's weichen kaum merklich von einander ab, und wo die Abweichung am grössten ist, schliessen sie die aus den Umlaufszeiten geschlossenen Werthe zwischen sich ein.

§. 10. Die nach der Erde gerichtete Kraft nimmt im doppelten Verhältniss der Abstände von der Erde ab. Dies wird unter der Hypothese, dass die Erde ruhe, bewiesen.

Dass die gegen die Erde gerichtete Kraft ebenfalls im doppelten Verhältniss der Abstände abnehme, schliesse ich folgendermassen. Der mittlere Abstand des Mondes vom Mittelpunkt der Erde beträgt

nach Ptolemäus, Kepler, Bullialdus, Hevel und Riccioli 59
- Flamsteed . . . . $59\frac{1}{3}$
- Vendelinus 60
- Kopernikus . . . . $60\frac{1}{3}$
- Kircher . . . . $62\frac{1}{2}$
- Tycho . . . . $56\frac{1}{2}$

Erdhalbmesser.

Tycho aber und alle diejenigen, welche seine Refractionstafeln benutzen, setzen ganz der Natur des Lichtes zuwider die Refraction der Sonne und des Mondes grösser, als die der Fixsterne und zwar um 4 oder 5 Minuten, und um eben so viel nehmen sie die Parallaxe des Mondes grösser an, nämlich um $\frac{1}{12}$ oder $\frac{1}{15}$ ihres Werthes. Verbessert man diesen Fehler, so ergiebt sich der Abstand ungefähr = 61 Erdhalbmessern, fast wie die Anderen ihn angeben. Nehmen wir ihn nun im Mittel = 60 Halbmessern und die siderische Umlaufszeit des Mondes = $27^d\ 7^h\ 43^m$ an, wie die Astronomen sie bestimmt haben; so würde nach §. 18., Zusatz 6. des ersten Buches ein Körper, welcher nahe bei der Oberfläche der Erde in unserer Luft herumliefe, bei einer Centripetalkraft, welche sich zu der im Abstande des Mondes stattfindenden umgekehrt wie die Quadrate der Abstände, d. h. wie 3600 : 1 verhielte, seinen Umlauf, nach Aufhebung des Widerstandes der Luft, in $1^h\ 24^m\ 27^s$ ausführen. Setzt man nun den Umfang der Erde, wie die Franzosen ihn neuerdings bestimmt haben, = 123249600 Pariser Fuss; so würde derselbe Körper, wenn seine Kreisbewegung aufgehoben wäre und die Centrifugalkraft wie vorhin wirkte, beim freien Falle $15\frac{1}{12}$ Pariser Fuss in 1 Sekunde zurücklegen. Man schliesst dies aus einer, nach

§. 76. des ersten Buches angestellten, Rechnung und es stimmt mit der Erfahrung überein. Durch Pendel- und andere darauf angestellte Versuche hat nämlich **Huygens** bewiesen, dass Körper, welche, durch die ganze Centripetalkraft jeder Art an der Oberfläche der Erde angetrieben, herabfallen, in der Zeit von 1 Sekunde $15^1/_{12}$ Pariser Fuss zurücklegen.

§. 11. Beweis unter der Hypothese, dass die Erde sich bewege.

Giebt man die Bewegung der Erde zu, so mögen diese und der Mond sich, nach Gesetze, Zusatz 4. und §. 98. des ersten Buches, um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt bewegen. Der Mond wird sich alsdann (nach §. 101. des ersten Buches) in derselben Zeit von 27^d 7^h 43^m, wenn die gegen die Erde gerichtete Kraft im doppelten Verhältniss des Abstandes vermindert wäre, in einer Bahn herumbewegen, deren Halbmesser sich zum früheren, d. h. zu 60 Erdhalbmessern verhielte, wie die Summe der Erde und des Mondes zur ersten der zwei mittleren Proportionalen dieser Summe und der Erde.[335]) Setzen wir also den Mond wegen seines scheinbaren Durchmessers von $31',5 = {}^1/_{42}$ der Erde, so

wird jenes Verhältniss $= 43 : \sqrt[3]{42 \cdot 43^2} = 128 : 127$.

Daher wird der Halbmesser dieser Bahn, d. h. der Abstand zwischen dem Mittelpunkte der Erde und dem des Mondes $= 60^1/_2$ Erdhalbmessern, fast wie **Kopernikus** ihn angegeben hat, indem **Tycho's** Beobachtungen nicht passen. In dieser Entfernung gilt also jene doppelte Proportion der Abnahme der Kräfte. Den Zuwachs der Bahn, welcher aus der Wirkung der Sonne entspringen muss, habe ich ganz unbedeutend vernachlässigt; zieht man ihn ab, so bleibt der wahre Abstand etwa gleich $60^4/_9$ Erdhalbmessern.

§. 12. Die Abnahme im doppelten Verhältniss der Abstände der Erde und Planeten wird auch durch die Excentricität und die sehr langsame Excentricität der Apsiden bewiesen.

Das Verhältniss der Abnahme der Kräfte wird ausserdem durch die Excentricität der Planetenbahnen und die sehr langsame Bewegung der Apsiden bewiesen. Nämlich (nach §. 85. und Zusätzen des ersten Buches) ist es klar, dass bei keinem anderen Verhältniss die um die Sonne sich bewegenden Planeten, in ihren einzelnen Umläufen, einmal zum kleinsten Abstande von der Sonne herab- und einmal zum grössten Abstande hinaufsteigen und die Lage dieser Abstände unverändert bleiben kann. Eine kleine Abweichung vom doppelten Verhältniss würde eine, in einem einzelnen Umlaufe merkliche und in mehreren Umläufen sehr bedeutende Bewegung der Apsiden hervorbringen. Jene Bewegung zeigt sich aber bei den Bahnen der, um die Sonne sich bewegenden, Planeten nach unzähligen Umläufen kaum bemerkbar. Einige Astronomen leugnen diese Bewegung ganz, andere nehmen sie so klein an, dass sie aus den später anzuführenden Ursachen leicht entspringen kann und in der vorliegenden Untersuchung von keiner Bedeutung ist. Aber auch

die weit grössere Bewegung des Mond-Aphels, welche bei einem einzelnen Umlauf 3° beträgt, braucht nicht beachtet zu werden. Durch diese Bewegung wird bewiesen, dass die gegen die Erde gerichtete Kraft in einem Verhältnisse abnimmt, welche nicht kleiner als das doppelte und weit kleiner als das dreifache ist. Ginge dieses doppelte Verhältniss allmählig in das dreifache über, so würde die Bewegung des Aphels ins Unendliche zunehmen und so durch eine sehr kleine Veränderung die Bewegung des Apogeums des Mondes übertreffen. Jene sehr langsame Bewegung entspringt aus der Wirkung der anziehenden Kraft der Sonne, wie später gezeigt werden wird. Wenn man diese Ursache aufhöbe, würde das Apogeum des Mondes ruhen und das doppelte Verhältniss eintreten.

§. 13. Von der Grösse der, nach den einzelnen Planeten gerichteten Kraft. Die sehr grosse Kraft der Sonne.

Nachdem dieses Verhältniss festgestellt ist, kann man nun die Kräfte der Planeten unter sich vergleichen. In der mittleren Entfernung des Jupiters von der Sonne ist die grösste Elongation des 4. Trabanten vom Mittelpunkte des Jupiters, nach Flamsteed's Beobachtungen = 8′ 13″, und daher verhält sich die Entfernung dieses Trabanten von jenem Mittelpunkte zur mittleren Entfernung des Jupiters von der Sonne, wie 124 : 52012, und zur mittleren Entfernung der Venus von der Sonne, wie 124 : 7234.[336])

Die mittleren Umlaufszeiten der Trabanten und der Venus betragen aber 16^d, 18^h und 224^d, 16^h.

Hieraus findet man (nach §. 18., Zusatz 2. des ersten Buches), indem man die Entfernungen durch die Quadrate der Zeiten dividirt, dass die Kraft, durch welche der Trabant gegen den Jupiter getrieben wird, sich zu der Kraft, welche die Venus gegen die Sonne hinzieht, sich verhält, wie 442 : 143.[337])

Vermindert man nun die Kraft, welche den Trabanten antreibt, im doppelten Verhältniss von 124 : 7234, so ergiebt sich, dass die Kraft des Jupiters im Abstande der Venus von der Sonne sich zur Kraft der Sonne, welche die Venus antreibt, wie 0,13 : 143 = 1 : 1100 verhält. Mithin ist in gleichen Abständen die Kraft der Sonne 1100mal so gross, als die des Jupiters.

Durch eine ähnliche Rechnung finde ich aus der Umlaufszeit des (6.) Saturnstrabanten von 15^d 22$^2/_3$^{h} und seiner grössten Elongation vom Saturn, die im mittleren Abstande des letzteren von uns 3′ 20″ beträgt, dass der Abstand dieses Trabanten vom Mittelpunkte des Saturns sich zum Abstande der Venus von der Sonne verhält, wie 92$^2/_5$: 7234.

Hieraus ferner, dass die absolute Kraft der Sonne 2360 mal so gross, als die absolute Kraft des Saturns ist.

§. 14. Geringe anziehende Kraft der Erde.

Aus der regelmässigen heliocentrischen und unregelmässigen geocentrischen Bewegung der Venus, des Jupiters und der anderen Planeten

folgt offenbar (nach §. 16., Zusatz 4. des ersten Buches), dass die gegen die Erde gerichtete Kraft sehr klein sei, im Vergleich mit derjenigen, welche gegen die Sonne gerichtet ist. Die Parallaxe der Sonne haben aus der im Fernrohre beobachteten Halbirung des Mondes Riccioli und Vendelinus, jeder für sich, zu bestimmen versucht und sie nicht grösser als 30'' angesetzt. Kepler fand die Parallaxe des aufgehenden Mars, welche viel grösser ist, sowohl durch Tycho's, als seine eigenen Beobachtungen, unmerklich. Flamsteed untersuchte sie mittelst des Mikrometers und fand sie im Perigeum des Mondes nie grösser als 25''; hieraus schloss er, dass die Parallaxe der Sonne höchstens 10'' betrage. Alsdann verhält sich der Abstand des Mondes von der Erde zum Abstand der letzteren von der Sonne nur wie 29 : 10000 und zum Abstand der Venus von der Sonne, wie 29 : 7234.

Hieraus und aus den Umlaufszeiten leitet man, nach der bereits (§. 13.) dargestellten Methode, ab, dass die absolute Kraft der Sonne wenigstens 229400 mal so gross ist, als die absolute Kraft der Erde. Wenn man nur auf die Bestimmungen von Riccioli und Vendelinus, dass die Parallaxe kleiner als 30'' sei, fusste, so würde sich doch ergehen, dass die absolute Kraft der Sonne 8500 mal so gross, als die der Erde sei.

§. 15. Scheinbare Durchmesser der Planeten.

Durch ähnliche Rechnung bin ich auf das Verhältniss zwischen den Kräften und den Körpern der Planeten gekommen; bevor ich jedoch dieses auseinandersetze, sind die scheinbaren Durchmesser der Planeten in ihren mittleren Abständen von der Erde zu bestimmen. Den Durchmesser des Jupiters hat Flamsteed mit dem Mikrometer zu 40'' bis 41'', den Durchmesser des Saturnringes zu 50'', den der Sonne zu 32' 13'' bestimmt. Der Durchmesser des Saturns verhält sich zu dem seines Ringes nach Huygens und Halley wie 4 : 9, nach Galletius wie 4 : 10, nach Hook, welcher sich eines 60füssigen Teleskopes bediente, wie 5 : 12.

Aus dem mittleren Verhältniss 5 : 12 findet man den Durchmesser des Saturnkörpers = 21''.

§. 16. Verbesserung der scheinbaren Durchmesser.

Dies sind die scheinbaren Werthe. Alle leuchtenden Punkte aber werden, durch die ungleiche Brechbarkeit des Lichtes, in den Fernröhren ausgedehnt und nehmen im Brennpunkte des Objectivglases einen kreisförmigen Raum ein, dessen Breite etwa $^1/_{50}$ von der Oeffnung des Glases beträgt. Dies geschieht jedoch so, dass das Licht in der sehr dünnen Umgebung kaum oder nicht einmal kaum empfunden wird, in der Mitte aber, wo es dicht genug zusammengedrängt ist, stark genug auf den Sinn wirkt und einen kleinen leuchtenden Kreis bildet, dessen Breite nach dem Glanze des leuchtenden Punktes verschieden ist und meistens $^1/_3$, $^1/_4$ oder $^1/_5$ der ganzen Breite gleichkommt. Es bezeichne ABD den Kreis des ganzen Lichtes, PQ den mit hinreichend sichtbarem Lichte

strahlenden kleinen Kreis, C den gemeinschaftlichen Mittelpunkt beider; CA und CB seien zwei auf einander perpendikuläre Halbmesser des grösseren Kreises, ACBE ein auf diesen Halbmessern errichtetes Quadrat, AB die Diagonale desselben; EGH eine Hyperbel, zum Mittelpunkte C und den Asymptoten CA und CB beschrieben; PG sei ein im beliebigen Punkte P der Linie CB errichtetes Perpendikel, welches die Hyperbel in G und die geraden Linien AB und AE in K und F schneidet. Alsdann wird nach meiner Rechnung die Dichtigkeit des Lichtes in dem beliebigen Punkte P der Linie TG proportional und daher im Mittelpunkte C unendlich gross, in der Nähe der Peripherie hingegen einem Minimum gleich sein. Das ganze, innerhalb des kleinen Kreises PQ enthaltene, Licht verhält sich zu dem ganzen ausserhalb desselben befindlichen, wie CAKP : PKB.

Fig. 214.

Man denke sich den kleinen Kreis PQ da aufhörend, wo die Dichtigkeit TG des Lichtes zu klein wird, um hinreichend auf den Sinn einzuwirken.

Hieraus erklärt sich, warum Picard ein 3 Fuss breites Feuer in einer Entfernung von 191382 Fuss mittelst eines dreifüssigen Fernrobres 8 Secunden breit sah, während es nur 3,14 Secunden breit hätte erscheinen sollen.[338] Daher erscheinen die helleren Fixsterne in Fernröhren 5 bis 6 Secunden breit und zwar mit vollem Lichte, wobei sie sich mit schwächerem Lichte noch weiter ausdehnen. Aus diesem Grunde schaffte Hevel, indem er die Oeffnung des Fernrohres verminderte, einen grossen Theil des umgebenden Lichtes fort und bewirkte so, dass die Scheibe des Sternes entschieden kreisrund und kleiner erschien, obgleich sie auch jetzt 5 bis 6 Secunden im Durchmesser hatte. Huygens aber schaffte, indem er die Ocularoläser leicht mit Russ überzog, alles falsche Licht dermaassen fort, dass die Sterne wie Punkte frei von jeder merklichen Breite erschienen. Daher bestimmte Huygens wegen der Breite des Hindernisses, welches alles Licht auffing, die Durchmesser der Planeten grösser, als andere sie mit dem Mikrometer bestimmt haben. Das falsche Licht erscheint nämlich, wenn der Planet bedeckt ist, breiter und durch die stärkeren Strahlen nicht mehr verdunkelt. Hierher rührt es endlich, dass die Planeten auf der Sonnenscheibe so schmal erscheinen, indem sie durch das ausgedehnte Licht verengert werden.

Nach Hevel, Galletius und Halley schien der Merkur nicht

über 12 bis 15 Secunden, nach Crabtrius die Venus nur 1 Minute 2 Secnnden und dieselbe nach Horrox 1 Minnte 12 Secnnden einzunehmen, während die letztere doch, nach den von Hevel und Hnygens ausserhalb der Sonnenscheibe angestellten Messungen, wenigstens 1 Minute 24 Secnnden im Durchmesser haben sollte. So erschien auch der scheinbare Durchmesser des Mondes, welchen man im Jahre 1684, wenige Tage vor und nach der Sonnenfinsterniss, auf der Pariser Sternwarte zu 31' 30" bestimmt hatte, während der Finsterniss nicht grösser als 30' oder 30' 5". Daher sind die Durchmesser der Planeten ausserhalb der Sonnenscheibe zu verkleinern, innerhalb zu vergrössern und zwar um einige Secunden. Bei den mit dem Mikrometer angestellten Messungen scheinen aber die Fehler kleiner als gewöhnlich anszufallen. Den Halbmesser des Jupiter, wie man ihn aus dem Durchmesser des Schattens bei den Verfinsterungen seiner Trabanten gefunden hat, bestimmte Flamsteed zur grössten Elongation des 4. Trabanten im Verhältniss 1 : 24,903.

Da nnu diese Elongation 8' 13" beträgt, so wird hiernach der Durchmesser des Jupiters = 39",5.[339])

Der mit dem Mikrometer zu 40" oder 41" bestimmte Durchmesser wird daher, indem man das falsche Licht verwirft, auf 39",5 reducirt.

Durch eine ähnliche Correction hat man den Durchmesser des Saturns von 21" zu vermindern, und ihn = 20" oder noch etwas kleiner anzusetzen. Der Durchmesser der Sonne muss aber, wenn ich nicht irre, wegen des stärkeren Lichtes etwas mehr verkleinert und = 32' oder 32' 6" gesetzt werden.

§. 17. Warum einige Planeten mehr, andere weniger dicht sind, und ihre Kräfte den in den einzelnen enthaltenen Mengen der Materie proportional sind.

Dass Körper von so verschiedener Grösse der Proportionalität mit ihren Kräften so nahe kommen, ist wenigtens etwas geheimnissvoll. Es ist möglich, dass die entfernteren Planeten wegen der geringen Wärme von jenen metallischen und weniger schweren Substanzen, mit denen die Erde bedeckt ist, frei und dass die Körper der Venus nnd des Merkurs, durch die grössere Sonnenwärme mehr zusammengekocht und zusammengelaufen sind. Durch den Versnch mit dem Brennspiegel ist es bekannt, dass die Wärme mit der Dichtigkeit des Lichtes zunimmt; dieses wächst aber im doppelten Verhältniss der Annäherung zur Sonne. Hieraus schliesst man, dass die Sonnenwärme auf dem Merkur 7mal so gross sei, als bei uns im Sommer; bei einer so hohen Temperatur kocht aber das Wasser und verdampft allmählig der Vitriol- und Quecksilber-Spiritus, wie ich mittelst des Thermometers erfahren habe. Es kann daher auf dem Merkur nur schwere Flüssigkeiten geben, welche eine grosse Wärme ertragen und aus denen die dichtesten Substanzen entstehen. Wie wenn Gott die einzelnen Körper, welche dnrch eine angemessene zeitige Wärme erhalten werden müssen, in so verschiedeue

Abstände von der Sonne gesetzt hat, und so diejenigen immer dichter sind, welche sich ihr näher befinden. Durch diese Einrichtung wird es am besten klar, dass die Gewichte aller Planeten sich zu einander wie ihre Kräfte verhalten.

Ich wünsche aber, die scheinbaren Durchmesser der Planeten genauer zu erklären. Dies geschieht, wenn eine Lampe in grosser Entfernung durch eine kreisförmige Oeffnung leuchtet und man bald die Oeffnung, bald das Lampenlicht verkleinert, bis das Bild im Telescop wie ein Planet erscheint und durch dieselben Messungen bestimmt wird. Alsdann wird die Breite der Oeffnung sich zu ihrem Abstande vom Objecte verhalten, wie der wahre Durchmesser des Planeten zu seinem Abstande von uns. Das Lampenlicht kann hierbei entweder durch vorgehängtes Zeug, oder indem man das Glas mit Russ belegt, geschwächt werden.

§. 18. Eine andere Analogie der Kräfte und der Körper zeigt sich bei den Himmelskörpern.

Der bereits beschriebenen Analogie ist eine andere verwandt, welche zwischen den Kräften und den angezogenen Körpern stattfindet. Da die Wirksamkeit der Centripetalkräfte auf die Planeten im doppelten Verhältniss der Entfernung abnimmt, die Umlaufszeit aber im $^3/_2$ten Verhältniss derselben zunimmt; so wird offenbar in gleichen Abständen gleicher Planeten von der Sonne die Wirksamkeit der Umlaufszeit gleich sein. Ferner wird in gleichen Abständen ungleicher Planeten die gesammte Wirksamkeit den Körpern der Planeten proportional sein. Eine Wirksamkeit, welche nämlich nicht den zu bewegenden Körpern proportional wäre, könnte diese nicht gleichmässig von den Tangenten der Bahnen abzielen und bewirken, dass die Umläufe in gleichen Zeiten und in gleichen Bahnen ausgeführt werden. Ferner könnte die Bewegung der Jupitertrabanten nicht so regelmässig sein, wenn die solare Kraft nicht gleichmässig auf den Jupiter und alle Trabanten, nach Verhältniss ihrer Gewichte wirkte Dasselbe findet beim Saturn und seinen Trabanten, wie auch bei der Erde und unserem Monde statt, was aus §. 106., Zusatz 2. und 3. des ersten Buches erhellt. In gleichen Abständen ist daher die Wirksamkeit der Centripetalkraft auf alle Planeten gleich, nach Verhältniss der Körper oder der Menge der in ihnen enthaltenen Materie; sie ist es daher auch auf alle gleich grossen Theilchen, aus denen die Planeten zusammengesetzt sind. Wirkte sie nämlich stärker auf Theilchen einer Art, schwächer auf Theilchen einer anderen Art, als nach Verhältniss der Menge der Materie; so würde auch ihre Wirkung auf die Planeten grösser oder kleiner sein, nicht nur nach Verhältniss der Grösse, sondern auch nach der Art der Materie, welche sich in dem einen reichlicher, in dem andern sparsamer vorfände.

§. 19. Sie wird auch bei den irdischen Körpern gefunden.

Ich habe das Dasein dieser Analogie bei Körpern verschiedener Art, welche auf unserer Erde existiren, durch sehr genaue Versuche ge-

funden. Die Wirksamkeit der terrestrischen Kraft, welche den zu bewegenden Körpern proportional ist, wird dieselben in gleichen Zeiten mit gleichen Geschwindigkeiten bewegen (nach 2. Gesetze der Bewegung) und sie wird bewirken, dass alle losgelassenen Körper sowohl durch gebildete Räume in gleichen Zeiten herabfallen, als auch, wenn sie an gleichen Fäden aufgehängt werden, in gleichen Zeiten oscilliren. Bei grösserer Wirksamkeit würden die Zeiten kleiner, bei kleinerer grösser sein. Dass aber alle Körper (wenn man den geringen Widerstand der Luft aufgehoben denkt) in gleichen Zeiten herabfallen, hatten andere schon längst beobachtet und am genauesten kann man die Gleichheit der Zeiten an den Pendeln wahrnehmen. Ich habe den Versuch mit Gold, Silber, Blei, Glas, Sand, gemeinen Salz, Holz, Wasser und Waizen angestellt. Ich verglich zwei gleiche hölzerne Büchsen mit einander; die eine füllte ich mit Holz an, und hängte dasselhe Gewicht Goldes (so genau ich konnte) im Schwingungspunkte des ersteren auf. An gleichen, 11 Fuss langen Fäden hangend, bildeten die Büchsen Pendel, welche in Bezug auf Gewicht, Gestalt und Widerstand der Luft durchaus gleich waren und mit gleichen Schwingungen neben einander aufgehängt, schwangen sie sehr lange zugleich hin und her. Ferner verhielt sich die Menge der Materie im Golde zur Menge der Materie im Holze, wie die Wirksamkeit der bewegenden Kraft auf das ganze Gold, zu ihrer Wirksamkeit auf das ganze Holz, d. h. wie das Gewicht zum Gewicht und eben so bei den übrigen. Bei Körpern von demselben Gewicht würde ein Unterschied der Materie, welcher selbst kleiner als $^1/_{1000}$ der letzteren wäre, durch diese Versuche haben wahrgenommen werden müssen.

§. 20. Die Uebereinstimmung der Analogie.

Da nun die Wirksamkeit der Centripetalkraft nach den angezogenen Körper, in gleichen Abständen, der Materie in diesem Körper proportional ist; so stimmt es mit der Vernunft überein, dass sie auch der Materie im anziehenden Körper proportional sei. Die Wirksamkeit ist nämlich gegenseitig und macht (nach 3. Gesetz der Bewegung), dass die Körper wechselseitig sich bestreben, einander näher zu kommen, und sie muss daher in beiden Körpern sich selbst gleich sein. Es kann der eine Körper als der anziehende, der andere als der angezogene betrachtet werden; allein diese Unterscheidung ist mehr mathematisch als natürlich. Die Anziehung findet in der That in jedem Körper gegen den andern statt und ist daher in beiden von derselben Art.

§. 21. Ihre Coïncidenz.

Die anziehende Kraft findet demnach in beiden Körpern statt. Die Sonne zieht den Jupiter und die übrigen Planeten, der Jupiter seine Trabanten an, und gleichermassen wirken die letzteren, wie auch der Jupiter und alle Planeten wechselseitig auf einander. Obgleich die wechselseitige Anziehung je zweier Planeten von einander unterschieden und als zwei Wirkungen betrachtet werden können, vermöge deren die eine den andern anzieht; so sind sie doch, insofern sie zwischen beiden

thätig sind, nicht zweifach, sondern machen nur eine einfache Operation zwischen zwei Gliedern aus. Durch die Zusammenziehung eines, zwei Körper verbindenden, Seiles können diese zu einander hingezogen werden. Die Ursache der Wirksamkeit ist zweifach, insofern nämlich jeder der beiden Körper hierzu eingerichtet ist; ebenso ist die Wirksamkeit selbst zweifach, insofern sie in beiden Körpern stattfindet; so weit sie aber als zwischen beiden thätig betrachtet wird, ist sie einfach und eine und dieselbe. Es ist nicht Eine Operation, durch welche die Sonne den Jupiter, und eine zweite Operation, durch welche der letztere die erstere anzieht, sondern es findet nur eine einzige Operation, durch welche die Sonne und der Jupiter einander näher zu kommen suchen. Durch die Wirksamkeit, mit welcher die Sonne den Jupiter anzieht, suchen beide (nach dem 3. Gesetz der Bewegung) sich gegenseitig zu nähern und durch die Wirksamkeit, mit welcher der Jupiter die Sonne anzieht, suchen beide ebenfalls einander näher zu kommen. Die Sonne wird aber nicht durch eine doppelte Wirksamkeit gegen den Jupiter, noch dieser gegen jene hingezogen; sondern es findet nur Eine Wirksamkeit zwischen beiden statt, vermöge welcher beide einander näher kommen. Das Eisen zieht den Magneten eben so an, wie es durch ihn angezogen wird; denn alles Eisen in der Nähe eines Magneten zieht auch anderes Eisen an. Die Wirksamkeit zwischen dem Magneten und dem Eisen ist aber einfach und wird auch als solche von den Naturforschern angesehen. Die Operation des Eisens gegen den Magneten ist dieselbe, welche der Magnet zwischen sich und dem Eisen ausführt und durch welche beide einander näher zu kommen suchen. Dies erhellt daraus, dass die ganze Kraft des Eisens beinahe anfhört, so wie der Magnet fortgenommen wird. Auf diese Weise denke man sich, dass die einfache Operation zwischen zwei Planeten aus den vereinigten wirkenden Kräften beider entspringe und es wird sich dies bei beiden auf dieselbe Weise verhalten. Wenn sie daher der Menge der, in dem einen enthaltenen, Materie proportional ist, so wird sie es auch der im anderen enthaltenen Materie sein.

§. 22. Die Kräfte kleiner Körper sind unmerklich.

Es wird jemand vielleicht sagen, nach diesem Gesetze müssten alle Körper sich wechselseitig anziehen, was gegen die Erfahrung bei den irdischen Körpern ist. Ich erwidere hierauf, dass die Erfahrung bei den irdischen Körpern keine ist. Die Anziehungen gleichartiger Kugeln, in der Nähe ihrer Oberflächen, sind (nach §. 114. des ersten Buches) ihren Durchmessern proportional. Daher wird eine Kugel von 1 Fuss im Durchmesser, welche mit der Erde gleichartig ist, an ihrer Oberfläche ein Körperchen etwa 20000000 mal schwächer, als die Erde an ihrer Oberfläche anziehen und eine so geringe Kraft wird keine bemerkbaren Wirkungen hervorbringen. Zwei derartige Kugeln, welche nur um $^1/_4$ Zoll von einander abständen, würden im freien Raume erst nach der Zwischenzeit eines Monats, vermöge ihrer gegenseitigen Anziehung,

zusammenkommen. Die Annäherung noch kleinerer Kugeln würde, im Verhältniss ihrer Durchmesser, langsamer erfolgen. Aber auch ganze Berge würden nicht hinreichen, bemerkbare Wirkungen hervorzubringen; denn ein Pendel würde am Fusse eines 3 Meilen hohen und 6 Meilen breiten halbkugelförmigen Berges durch die anziehende Kraft des letzteren nicht um 2 Linien vom Perpendikel abweichen.[341]) Diese Kräfte kann man nur bei den sehr grossen Körpern der Planeten wahrnehmen, wenn man nicht in Bezug auf kleinere Körper folgendermaassen schliesst.

§. 23. Die gegen alle irdischen Körper gerichteten Kräfte sind der Menge der Materie proportional.

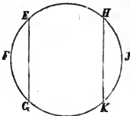


Fig. 215.

Es bezeichne EFGJ die Erdkugel, welche durch die beliebige Ebene EG in zwei Theile EFG und EJG zerlegt ist. Der erste Theil liegt auf dem zweiten, und drückt gegen diesen mit seinem ganzen Gewichte. Der Theil EJG kann diesen Druck nicht anshalten, noch unbewegt bleiben, wenn nicht ein gleiches entgegengesetztes Streben stattfindet.

Die Theile drücken daher mit ihren Gewichten gleich gegen einander, d. h. sie werden gleich stark zu einander hingezogen, wie das dritte Gesetz es verlangt. Wären sie daher von einander getrennt und losgelassen, so würden sie gegen einander wechselseitig mit Geschwindigkeiten fallen, welche den Körpern **umgekehrt** proportional wären. Dies kann man alles an einem Magneten versuchen und anschaulich machen. Es bezeichne nun EFG irgend einen kleinen Körper an der Oberfläche der Erde. Die Anziehungen dieses Theilchens und der übrigen Erde EJG werden einander gleich sein, die Anziehung des erstern gegen die Erde, d. h. sein Gewicht, ist aber seiner Materie proportional, wie Pendelversuche gezeigt haben; daher wird auch die Anziehung der Erde gegen das Theilchen der Materie des letzteren proportional sein. Demnach sind die Anziehungen aller irdischen Körper der Menge der, in jedem enthaltenen Materie proportional.

§. 24. Dieselben Kräfte sind gegen die Himmelskörper gerichtet.

Die Kräfte, welche der Materie in den irdischen Körpern von beliebiger Form proportional sind und sich daher mit der Gestalt der letzteren nicht ändern, müssen auch in allen Körpern, den himmlischen wie den irdischen, vorhanden und in allen der Menge der Materie proportional sein. Diese alle sind nämlich nicht durch die Art der Substanz, sondern nur durch die Gestalt und Modification von einander verschieden. Dies wird bei den Himmelskörpern auf folgende Weise bewiesen. Es ist bekannt, dass die solare Kraft gegen alle Planeten, auf gleiche Abstände reducirt, der in den einzelnen Planeten enthaltenen Materie proportional ist. Dasselbe steht auf gleiche Weise in Betreff der Wirk-

samkeit des Jupiters gegen seine Trabanten fest, und dieselbe Bewandtniss hat es mit der Anziehnng aller Planeten gegen einen einzelnen derselben. Hieraus folgt aber (nach §. 110. des ersten Buches), dass ihre Anziehnng der in den einzelnen Körpern enthaltenen Materie proportional ist.

§. 25. Die Kräfte nehmen von der Oberfläche der Planeten auswärts im doppelten, einwärts im einfachen Verhältniss der Entfernungen vom Mittelpunkte ab.

Wie Theile der Erde sich gegenseitig anziehen, so ist dasselbe bei Theilen der Planeten der Fall. Wenn der Jupiter und seine Trabanten sich vereinigten und Eine Kugel bildeten, so würden sie einzeln ohne Zweifel fortfahren, sich wie vorhin wechselseitig anzuziehen. Umgekehrt, wenn der Körper des Jupiters in mehrere Kugeln zerlegt würde, so ist anzunehmen, dass diese nicht minder sich gegenseitig anziehen würden, als dies von Seiten der Trabanten geschieht. Diese Anziehungen bewirken, dass die Körper der Erde und aller Planeten eine Kugelgestalt annehmen, dass ihre Theile an ihnen haften und nicht in den Aether zerstreut werden. Es steht nun aber fest, dass diese Kräfte aus der allgemeinen Natur der Materie entspringen, und dass daher die Kraft der ganzen Kugel aus den Kräften ihrer Theilchen zusammengesetzt ist. Hieraus folgt aber (nach §. 117., Zusatz 3. des ersten Buches), dass die Kraft jedes Theilchens im doppelten Verhältniss der Entfernung von demselben abnimmt und (nach §§. 115. und 118.), dass die Kraft der ganzen Kugel von ihrer Oberfläche auswärts im doppelten, einwärts im einfachen Verhältniss der Entfernungen vom Mittelpunkte abnehmen muss, wenn nur die Kugel aus gleichförmiger Materie besteht. Wenn aber auch die Kugeln in der Richtung vom Mittelpunkte zur Oberfläche nicht gleichförmig sind, so wird doch (nach §. 119.) die Abnahme auswärts im doppelten Verhältniss der Entfernung noch gelten, wenn nur die Ungleichförmigkeit überall, in der Richtung gegen die Oberfläche, ähnlich ist. Zwei Kugeln dieser Art werden (nach §. 119.) sich gegenseitig mit einer Kraft anziehen, welche im doppelten Verhältniss des Abstandes ihrer Mittelpunkte von einander abnimmt.

§. 26. Die Grösse der Kräfte und der in den einzelnen Fällen aus ihnen entspringenden Bewegungen.

Die absolute Kraft einer Kugel ist daher der Menge der in ihr enthaltenen Materie proportional. Die bewegende Kraft, durch welche jede beliebige Kugel gegen eine andere hingezogen wird und welche man bei Körpern auf der Erde gewöhnlich das Gewicht nennt, verhält sich wie das Produkt der in jeder der beiden Kugeln enthaltenen Materie, dividirt durch das Quadrat des Abstandes zwischen beiden Mittelpunkten (nach §. 119., Zusatz 4.), und dieser Kraft ist die Grösse der Bewegung proportional, mit welcher beide Kugeln in einer gegebenen Zeit einander näher kommen. Die beschleunigende Kraft, durch welche jede Kugel nach Verhältniss ihrer Materie gegen die andere hin-

gezogen wird, verhält sich wie die Menge der Materie in dieser anderen Kugel, dividirt durch das Quadrat des Abstandes beider Mittelpunkte (nach §. 119., Zusatz 2.), und dieser Kraft ist die Geschwindigkeit proportional, mit welcher die angezogene Kugel sich in einer gegebenen Zeit gegen die anziehende Kugel bewegt. Hat man dies gehörig eingesehen, so wird man leicht die Bewegungen der Himmelskörper unter sich bestimmen können.

§. 27. Alle Planeten laufen um die Sonne.

Vergleichen wir die Kräfte der Planeten mit einander, so finden wir, dass die Kraft der Sonne 1000 und noch mehrmal grösser ist, als die Kräfte aller übrigen zusammengenommen. In Folge des Dranges einer so grossen Kraft ist es aber nothwendig, dass alle Körper, innerhalb des Planetensystems und noch weit darüber hinaus, geradlinig zur Sonne herabsteigen, wenn sie sich nicht anderweitig bewegen. Die Erde ist ebenfalls unter diese Körper zu zählen.

Der Mond gehört gewiss zum Geschlecht der Planeten und unterliegt denselben Anziehungen wie diese, da er nur durch die anziehende Kraft der Erde in seiner Bahn gehalten wird. Dass die Erde und der Mond auf gleiche Weise gegen die Sonne gezogen werden, und dass eben so alle Körper den Gesetzen der Anziehung unterworfen sind, haben wir schon oben bewiesen. In welcher Zeit aber ein beliebiger Körper, welcher einer Bewegung um die Sonne beraubt wäre, herabsteigen und bei diesem Falle bis zur Sonne gelangen würde, ergiebt sich (nach §. 76. des ersten Buches) aus einem Abstande von ihr; nämlich in der Hälfte der Umlaufszeit, in welcher er bei einem halb so grossen Abstande um die Sonne laufen würde oder in einer Zeit, welche sich zum Umlaufszeit des Planeten verhält, wie $1:4\sqrt{2}$.

So würde die Venus in Zeit von 40 Tagen, der Jupiter in 2 Jahren und 1 Monat, die Erde und der Mond in 66 Tagen und 19 Stunden zur Sonne gelangen.[342]) Da dies nicht geschieht, müssen die Körper sich nothwendig nach einer anderen Richtung bewegen, und nicht jede Bewegung ist hierzu hinreichend; zur Verhinderung des Herabfallens wird vielmehr eine hinreichend grosse Geschwindigkeit erfordert.

Hieraus ergiebt sich auch ein Grund für die langsamer werdenden Planeten. Wenn die Kraft der Sonne nicht im doppelten Verhältniss der Verzögerung abnähme, so würde ihr Ueberschuss bewirken, dass die Körper zu ihr herabstiegen. Wenn z. B. die Bewegung, unter übrigens gleichen Umständen, doppelt so langsam würde, so würde der Planet durch den vierten Theil der früheren solaren Kraft in seiner Bahn festgehalten werden und vermöge des Ueberschusses der anderen $^3/_4$ zur Sonne herabsteigen. Ferner werden die Planeten Saturn, Jupiter, Mars, Venus und Merkur nicht wirklich in ihrer Erdnähe verzögert, eben so wenig werden sie wirklich stillstehend oder mit langsamer Bewegung rückgängig. Alles dieses ist nur scheinbar und die absoluten Bewegungen, bei denen die Planeten in ihren Bahnen verharren, sind immer

rechtläufig und sehr nahe gleichförmig. Dass solche Bewegungen um die Sonne erfolgen, haben wir bewiesen, und daher ruhet die letztere als Mittelpunkt der absoluten Bewegungen; denn die Ruhe der Erde muss man durchaus bestreiten, damit die Planeten in ihrer Erdnähe nicht wirklich verzögert, stillstehend und langsam rückgängig werden, und so aus Mangel an Bewegung in die Sonne fallen.

Da ferner die Planeten Venus, Mars, Jupiter u. s. w. mit den nach der Sonne gezogenen Radien regelmässige Bahnen und Flächenräume beschreiben, welche letztere, wie gezeigt worden ist, den Zeiten so weit proportinal sind, als man es mit den Sinnen wahrnehmen kann; so folgt (nach §. 16. und §. 106., Zusatz 3. des ersten Buches), dass die Sonne durch keine merkliche Kraft angetrieben wird, ausser durch eine solche, welche auf alle Planeten gleichmässig nach Verhältniss der Grösse ihrer Körper und längs paralleler Linien wirkt, auf welche Weise das ganze System sich geradlinig fortbewegen würde. Diese Bewegung des ganzen Systems ist zu verwerfen, und die Sonne als nahe in seinem Mittelpunkte ruhend anzunehmen[343]). Bewegte sich die Sonne um die Erde, und führte sie die übrigen Planeten mit sich fort, so müsste die Erde die Sonne mit einer grossen, die um diese befindlichen Planeten mit einer wirkungslosen Kraft anziehen (ganz §. 106., Zusatz 3. zuwider). Hierzu kommt, dass, wenn manche die Erde wegen der Schwere ihrer Theile in die unterste Gegend des Weltalls gesetzt haben, nun die Sonne mit grösserem Rechte wegen ihrer Centripetalkraft, die 1000 und mehrmal grösser als die Schwere der Erde ist, an den untersten Ort gesetzt und als Mittelpunkt des Systems aufgestellt werden müsste. Die wahre Einrichtung des Systems wird so vollsändiger und genauer eingesehen.

§. 28. Der gemeinschaftliche Mittelpunkt aller Planeten ruhet, und die Sonne bewegt sich sehr langsam. Erklärung der Bewegung der letzteren.

Da die Fixsterne unter sich ruhen, so denken wir uns die Sonne, die Erde und die Planeten wie ein System von Körpern, welche sich beliebig unter einander bewegen und deren gemeinschaftlicher Schwerpunkt (nach Gesetze, Zusatz 4.) entweder ruhen oder sich gleichförmig in gerader Linie bewegen wird. Die letzte Hypothese ist schwierig; verwirft man sie, so wird jener gemeinschaftliche Schwerpunkt ruhen. Von demselben entfernt sich die Sonne nie weit. Der gemeinschaftliche Schwerpunkt der Sonne und des Jupiters fällt auf die Oberfläche der ersteren. Wären alle Planeten auf derselben Seite der Sonne, wie der Jupiter angenommen, so würde der gemeinschaftliche Schwerpunkt kaum doppelt so weit, als vorhin, vom Mittelpunkt der Sonne entfernt sein.[344]) Diese wird daher, indem sie nach der verschiedenen Stellung der Planeten verschieden angetrieben wird, und mit einer gewissen Schwankung sich selbst langsam bewegt, sich niemals um die Länge ihres Durchmessers vom ruhenden Schwerpunkte des ganzen Systems entfernen. Aus den oben gefundenen Gewichten der Sonne und der Planeten, und

ihrer gegenseisigen Lage erhält man ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt, und wenn dieser bekannt ist, auch den Ort der Sonne zu einer gegebenen Zeit.

§. 29. Die Planeten laufen nichts desto weniger in Ellipsen, deren Brennpunkte in der Sonne liegen, und beschreiben mit den nach der letzteren gezogenen Radien Vectoren Flächenräume, welche den Zeiten proportional sind.

Um die auf diese Weise schwankende Sonne bewegen sich die Planeten in elliptischen Bahnen und beschreiben mit den nach jener gezogenen Radien Vectoren Flächenräume, welche sehr nahe den Zeiten proportional sind, wie (§. 106.) gezeigt worden ist. Wenn die Sonne ruhete und die Planeten nicht wechselweise auf einander wirkten, so würden die elliptisch Bahnen und die den Zeiten proportionalen Flächenräume genau stattfinden (nach §. 29. und §. 33., Zusatz 1. des ersten Buches). Die gegenseitigen Einwirkungen der Planeten auf einander sind, im Vergleich mit den Wirkungen der Sonne auf dieselben, unbedeutend und bringen daher keine bemerkbaren Fehler hervor. Diese Fehler sind bei den Umläufen, welche um die auf beschriebene Weise bewegte Sonne erfolgen, kleiner, als wenn die letztere sich in Ruhe befände (nach §. 107. und 109., Zusatz des ersten Buches; besonders wenn man den Brennpunkt einer jeden Bahn in den gemeinschaftlichen Schwerpunkt aller inneren Planeten setzt, d. h. den Brennpunkt der Merkurbahn in den Mittelpunkt der Sonne, den Brennpunkt der Venusbahn in den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Sonne und des Merkurs, den Brennpunkt der Erdbahn in den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Sonne, des Merkurs und der Venus, u. s. w. Auf diese Weise werden die Brennpunkte aller Planetenbahnen, die des Saturns ausgenommen, nicht merklich vom Mittelpunkte der Sonne entfernt sein, und es wird der Brennpunkt dieser letzten Bahn nicht merklich vom gemeinschaftlichen Schwerpunkte des Jupiters und der Sonne abweichen. Ferner wird der Mittelpunkt der letzteren von den Astronomen nicht unpassend, als der gemeinschaftliche Brennpunkt aller Bahnen angenommen. Selbst beim Saturn beträgt der hieraus entspringende Fehler nicht mehr als 1′ 45″.

Wenn diese Bahn dadurch, dass man ihren Brennpunkt in den gemeinschaftlichen Schwerpunkt des Jupiters und der Sonne setzt, besser mit den Erscheinungen übereinstimmt, so wird man dadurch eine Bestätigung alles bisher Gesagten erhalten.

§. 30. Von den Dimensionen der Bahnen und der Bewegung der Aphelien und Knoten.

Wenn die Sonne ruhete und die Planeten nicht gegenseitig auf einander wirkten, so würden auch ihre Aphelien und Knoten (nach §. 29. und §. 33., Zusatz) ruhen, und die grossen Axen ihrer elliptischen Bahnen (nach §. 35.) sich wie die Cubikwurzeln aus den Quadraten der Umlaufszeiten verhalten; also, wenn diese gegeben wären, selbst bekannt sein. Diese Zeiten muss man nicht in Bezug auf die beweglichen Aequi-

noctialpunkte, sondern auf den ersten Stern im Widder rechnen. Durch die Bewegung der Sonne wird aber jede halbe grosse Axe um etwa $^1/_3$ des Abstandes, zwischen dem Mittelpunkt der Sonne und dem gemeinschaftlichen Schwerpunkt dieser und des betreffenden Planeten (nach §. 101.) vergrössert, und durch die Wirkung der äusseren Planeten auf die inneren werden die Umlaufszeiten der letzteren wenig und kaum merklich vergrössert; endlich werden die Aphelien sehr langsam rechtläufig bewegt (nach §. 107., Zusatz 6. und 7.) So werden auch durch die Einwirkung der Kometen, wenn sich deren jenseits des Saturns befinden, die Umlaufszeiten aller Planeten und am stärksten die der äusseren vergrössert und die Aphelien aller rechtläufig bewegt. Bewegen sich aber die Aphelien vorwärts, so schreiten die Knoten (nach §. 107., Zusatz 11. und 13.) zurück, und diese rückgängige Bewegung würde, wenn etwa die Ebene der Ekliptik ruhete, sich (nach §. 107., Zusatz 16.) zur rechtläufigen Bewegung des Aphels in jeder Bahn sehr nahe verhalten, wie die rückgängige Bewegung der Mondsknoten zur rechtläufigen seines Aphels, d. h. wie 10 : 21.

Die astronomischen Beobachtungen scheinen aber anzudeuten, dass die Aphelien sich sehr langsam rechtläufig, die Knoten aber rückgängig in Bezug auf die Fixsterne bewegen. Hiernach wird es wahrscheinlich, dass sich in den jenseits der Planeten befindlichen Gegenden Kometen befinden.[345]) Diese werden ihren Umlauf in sehr excentrischen Bahnen machen, sehr geschwind durch ihre Perihelien gehen und bei ihrer sehr langsamen Bewegung im Aphel fast die ganze Zeit hindurch in den, oberhalb der Planeten befindlichen, Gegenden verweilen; wie wir später ausführlich zeigen werden.

§. 31. Aus den angeführten Principien leitet man alle, bis jetzt von den Astronomen bemerkten, Mondbewegungen ab.

Die auf diese Weise umlaufenden Planeten können andere als Trabanten oder Monde mit sich führen, wie (§. 106.) gezeigt worden ist. Die Sonne bewirkt aber, dass unser Mond sich schneller bewegt, mit den nach der Erde gezogenen Radienvectoren grössere, als der Zeit proportionale Flächen beschreibt, eine weniger gekrümmte Bahn hat und daher näher zur Erde gelangt in den Syzygien, als in den Quadraturen, so weit die Bewegung der Excentricität dies nicht verhindert. Die letztere ist nämlich am grössten, wenn das Apogeum des Mondes sich in den Syzygien, und am kleinsten, wenn es sich in den Quadraturen befindet; daher ist der Mond im Perigeum geschwinder und näher, im Apogeum aber langsamer und entfernter in den Syzygien, als in den Quadraturen. Ausserdem bewegt sich das Apogeum recht-, die Knoten aber rückgängig, jedoch mit ungleicher Geschwindigkeit. Das erstere geht nämlich schneller in den Syzygien vorwärts und langsamer in den Quadraturen rückwärts, und vermöge des Ueberschusses der rechtgängigen Bewegung über die rückgängige geht es jährlich nach der Ordnung der Zeichen fort. Die Knoten aber ruhen in den Syzygien

und gehen in den Quadraturen sehr schnell rückwärts. Die grösste Breite des Mondes ist auch grösser in seinen Quadraturen, als in seinen Syzygien, und die mittlere Bewegung langsamer im Perihel der Erde, als in ihrem Aphel. Mehr Ungleichheiten werden bis jetzt in der Bewegung des Mondes von den Astronomen nicht wahrgenommen, diese aber folgen alle aus unseren Principien (§. 107., Zusatz 2. bis 13. des ersten Buches), und zeigen sich als wirklich am Himmel existirend. Dies kann man in jener genialen und, wenn ich nicht irre, genauesten Hypothese von Horrox sehen, welche Flamsteed dem Himmel angepasst hat; die astronomischen Hypothesen müssen jedoch bei der Bewegung der Knoten verbessert werden. Diese lassen die grösste oder Mittelpunktsgleichung in ihren Octanten zu, und diese Ungleichheit ist am meisten zu bemerken, wenn der Mond sich in den Knoten, also in den Octanten befindet. Daher haben Tycho und andere nach ihm diese Ungleichheit in die Octanten des Mondes verlegt, und sie als eine monatliche angesehen. Die von uns angeführten Umstände zeigen aber, dass man sie auf die Octanten der Knoten beziehen und als eine jährliche ansehen müsse.

§. 32. Es folgen daraus ferner mehrere noch nicht beobachtete, ungleichförmige Bewegungen.

Ausser den von den Astronomen wahrgenommenen Ungleichheiten existiren einige andere, durch welche die Mondbewegungen so sehr gestört werden, dass man sie bis jetzt durch kein Gesetz auf eine bestimmte Regel hat zurückführen können. Nämlich die Geschwindigkeiten der stündlichen Bewegungen des Apogeums und der Mondsknoten, und die Gleichungen derselben, wie auch der Unterschied der grössten Excentricität in den Syzygien und der kleinsten in den Quadraturen und die, Variation genannte, Ungleichheit nehmen jährlich (nach §. 107., Zusatz 14.) zu und ab im dreifachen Verhältniss des scheinbaren Durchmessers der Sonne. Die Variation steht ausserdem sehr nahe im doppelten Verhältniss der Zeit zwischen den Quadraturen (nach §. 10., Zusatz 1. und §. 107., Zusatz 16.).

Alle Ungleichheiten sind aber in dem gegen die Sonne hin liegenden Theile der Bahn etwas grösser, als im entgegengesetzten Theile, aber um einen kaum bemerkbaren Unterschied.

§. 33. Der Abstand des Mondes von der Erde zu einer gegebenen Zeit.

Durch eine Rechnung, welche ich der Kürze wegen nicht beschreibe, finde ich ferner, dass die, vom Monde mit dem nach der Erde gezogenen Radius in einzelnen gleichen Zeittheilchen beschriebene, Fläche sehr nahe der Summe aus der Zahl 237,3 und dem Sinus versus des doppelten Winkelabstandes des Mondes von der nächsten Quadratur, für den Radius = 1, proportional ist, und daher das Quadrat des Abstandes des Mondes von der Erde sich verhält, wie jene Summe, dividirt durch die stündliche Bewegung der ersteren.[346])

Dies verhält sich so, wenn die Variation in den Octanten ihren mittleren Werth hat; ist sie grösser oder kleiner, so muss jener Sinus versus in demselben Verhältniss vergrössert oder verkleinert werden. Es mögen die Astronomen untersuchen, wie weit die so gefundenen Abstände mit den scheinbaren Durchmessern des Mondes übereinstimmen werden.

§. 34. Aus den Bewegungen des Mondes werden diejenigen der Jupiter- und Saturnstrabanten abgeleitet.

Aus den Bewegungen unseres Mondes kann man die Bewegungen der Monde oder Trabanten des Jupiters und des Saturns ableiten.

Die mittlere Bewegung der Knoten des 4. Jupiterstrabanten steht nämlich zu derjenigen unserer Mondsknoten in einem Verhältniss, welches aus dem doppelten gegenseitigen Verhältniss der Umlaufszeiten der Erde und des Jupiters um die Sonne und dem einfachen gegenseitigen Verhältniss der Umlaufszeit jenes Trabanten um den Jupiter und unseres Mondes um die Erde zusammengesetzt ist (nach §. 107., Zusatz 16.) und der Knoten des Trabanten legt daher in Zeit von 100 Jahren 8° 24' rückläufig zurück.[347])

Die mittleren Bewegungen der Knoten der inneren Jupiterstrabanten verhalten sich zu der des vierten, wie ihre Umlaufszeiten zu der des letzteren (nach demselben Zusatz); sie sind daher gegeben. Die rechtläufige Bewegung der Planetenferne eines jeden Trabanten verhält sich zur rückgängigen Bewegung seiner Knoten, wie die Bewegung des Apogeums unseres Mondes zu der Bewegung seiner Knoten (nach demselben Zusatz), und ist daher gegeben. Die grössten Gleichungen der Knoten und Planetenferne eines jeden Trabanten verhalten sich zu den grössten Gleichungen der Knoten und des Apogeums unseres Mondes, wie respective die Bewegung der Knoten und Planetenferne der Trabanten, während der Zeit Eines Umlaufes der früheren Gleichungen zur Bewegung der Knoten und des Apogeums unseres Mondes, während der Zeit Eines Umlaufes der letzteren Gleichungen. Die jovicentrische Variation eines Trabanten verhält sich zur geocentrischen des Mondes, wie die ganzen Bewegungen der Knoten, während der Umlaufszeit des Trabanten zu der des Mondes (nach demselben Zusatz) und sie überschreitet daher beim 4. Trabanten nicht 5'' 12'''.

Wegen der geringen Grösse dieser Ungleichheit und ihrer langsamen Bewegung findet man die Bewegung der Trabanten so regelmässig, dass die neueren Astronomen entweder jede Bewegung der Knoten leugnen, oder sie für eine sehr langsame, rückgängige halten.

§. 35. Die Planeten drehen sich in Bezug auf die Fixsterne mit gleichförmiger Bewegung um ihre Axen, und diese Bewegung stimmt ganz mit der Zeitgleichung überein.

Während die Planeten auf diese Weise um entfernte Mittelpunkte laufen, drehen sie sich zugleich um ihre eigenen Axen und zwar:

die Sonne in 26^{d},
der Jupiter in 9^{h} 56^{m},
der Mars - 24 40,
die Venus - 23

und in Ebenen, welche nicht sehr gegen die Ebene der Ekliptik geneigt sind, wie auch nach der Ordnung der Zeichen. Die Astronomen bestimmen dies mittelst der Flecken, welche wechselnd auf den Himmelskörpern sichtbar werden. Auf ähnliche Weise erfolgt die Umdrehung unserer Erde in 24^{h}.

Es ist bekannt, dass diese Bewegungen durch Einwirkung der Centripetalkräfte weder beschleunigt noch verzögert werden (nach §. 107., Zusatz 22.). Sie werden daher vor allen übrigen gleichförmig, und zur Messung der Zeit geeignet; aber nicht die durch die Rückkehr zur Sonne, sondern zu irgend einem Fixsterne bestimmten Umdrehungen sind gleichförmig. Durch die ungleichförmig veränderte Lage der Planeten gegen die Sonne werden nämlich die ersteren Umdrehungen selbst ungleichförmig.

§. 36. Der Mond dreht sich auf gleiche Weise mit einer täglichen Bewegung um seine Axe, und hieraus entspringt die Libration.

So dreht sich auch der Mond um seine eigene Axe mit einer, in Bezug auf die Fixsterne höchst regelmässigen Bewegung. Seine Drehung erfolgt in 27^{d}, 7^{h}, 43^{m}, d. h in einem siderischen Monate, so dass die tägliche Umdrehung der mittleren Bewegung des Mondes in seiner Bahn gleich wird.

Ferner wird immer dieselbe Seite des letzteren dem Centrum, um welches jene mittlere Bewegung geschieht, zugewendet sein, d. h. sehr nahe dem äusseren Brennpunkte der Mondbahn. Hieraus folgt, dass er der Erde nicht stets dieselbe Seite zukehrt, sondern dieselbe bald gegen Osten, bald gegen Westen abwendet, je nach der Lage des Brennpunktes, wohin er gerichtet ist. Diese Abwendung ist der Mittelpunktsgleichung der Mondbahn, oder dem Unterschiede zwischen der mittleren und wahren Bewegung gleich. Dies ist die Libration des Mondes in der Länge. Es findet aber auch eine in der Breite statt, welche aus der Neigung der Axe des Mondes gegen die Ebene, in welcher er seinen Umlauf um die Erde macht, entspringt.

Jene Axe behält nämlich sehr nahe ihre Lage gegen die Fixsterne bei, und daher bekommen wir wechselweise bald den einen, bald den anderen Pol zu sehen. Dasselbe kann man bei der Erde sehen, deren Pole, wegen der Neigung ihrer Axe gegen die Ebene der Ekliptik, wechselweise von der Sonne beschienen werden. Die Lage der Axe gegen die Fixsterne und die Aenderung dieser Lage genau zu bestimmen, ist eine des Astronomen würdige Aufgabe.

§. 37. Von der Präcession der Aequinoctien und der schwankenden Bewegung der Axe der Erde und der Planeten.

Durch die tägliche Umdrehung der Planeten erhält ihre Materie

das Bestreben, sich von der Axe dieser Bewegung zu entfernen; daher steigen die flüssigen Theile etwas höher in der Nähe des Aequators, als nahe bei den Polen empor, und würden die festen Theile überschwemmen, wenn diese sich nicht gleichmässig erhöben. Daher sind die Planeten nahe bei ihrem Aequator etwas dicker, als an den Polen, und deshalb weichen ihre Aequinoctialpunkte zurück. Eben so senkt sich ihre Axe zweimal in den einzelnen Umläufen mit einer schwingenden Bewegung, und kehrt zweimal zu ihrer früheren Neigung zurück, wie im §. 107., Zusatz 18. des ersten Buches, auseinandergesetzt worden ist. Der Jupiter zeigt sich auch, wenn man ihn durch sehr lange Fernröhre sieht, nicht ganz kreisrund, sondern sein der Ekliptik paralleler Durchmesser ist etwas grösser, als der von Norden nach Süden gezogene.

§. 38. Das Meer muss zweimal an den einzelnen Tagen Fluth und zweimal Ebbe haben, und die erste trifft auf die dritte Stunde nach dem Eintritte des Himmelskörpers in den Meridian des Ortes.

In Folge der täglichen Bewegung der Erde und der Anziehungen der Sonne und des Mondes muss unser Meer in den einzelnen Sonnen- und Mondtagen zweimal anschwellen und zweimal sinken (nach §. 107., Zusatz 19. und 20.), die grösseste Höhe des Wassers der 6. Stunde beider Tage vorangehen und der vorhergehenden 12. Stunde folgen. Durch die Langsamkeit der täglichen Bewegung wird die Fluth auf die 12. Stunde zurückgezogen und vermöge der reciproken Bewegung vorwärts gezogen und auf die 6. Stunde geschoben. Warum sollten wir nicht, bis die Zeit durch die Beobachtungen genauer bestimmt sein wird, uns an die Mitte halten und die grösste Fluth auf die 3. Stunde setzen? Auf diese Weise wird das Wasser während der ganzen Zeit, wo die Kraft der Himmelskörper zu seiner Erhebung grösser ist, sinken. Jene Kraft ist nämlich grösser von 9^h bis 3^h und kleiner von 3^h bis 9^h. Ich zähle die Stunden sowohl von der obern, als von der untern Culmination beider Gestirne und verstehe unter einer Stunde des Mondtages $^1/_{24}$ desjenigen Zeitraumes, welchen der Mond gebraucht, um bei der täglichen scheinbaren Bewegung einen Umlauf vom Meridian des Ortes an zu machen.

§. 39. Die grössten Fluthen treten in den Syzygien, die kleinsten in den Quadraturen beider Gestirne und der Erde ein, und zwar in der 3. Stunde nach der Culmination des Mondes. Ausserhalb der Syzygien und der Quadraturen weicht sie etwas von jener 3. Stunde nach der 3. Sonnenstunde hin ab.

Beide Bewegungen des Wassers, welche durch diese zwei Himmelskörper hervorgebracht werden, zeigen sich aber nicht gesondert, sondern bringen eine gewisse vermischte Bewegung hervor. In der Conjunction und Opposition beider vereinigen sich ihre Wirkungen und bilden die grösste Ebbe und Fluth. In den Quadraturen hebt die Sonne das Wasser, wenn der Mond es herabdrückt und drückt es herab, wenn dieser es hebt und aus dem Unterschiede dieser Wirkungen entspringt die kleinste Fluth. Da nun, wie die Erfahrung es bestätigt, die Wir-

kung des Mondes grösser als die der Sonne ist; so fällt die grösste Wasserhöhe auf die dritte Mondstunde. Ausserhalb der Syzygien und Quadraturen trifft die grösste Fluth, welche bei alleiniger Wirksamkeit der Sonne auf die dritte Sonnenstunde fallen würde, durch Zusammensetzung beider Kräfte, auf eine zwischenliegende Zeit, welche der dritten Mondstunde näher liegt. Beim Uebergange des Mondes von den Syzygien zu den Quadraturen, wo die dritte Sonnenstunde der dritten Mondstunde vorausgeht, wird die grösste Wasserhöhe auch vor der letzten eintreten, und zwar am weitesten bald nach den Octanten des Mondes, und um gleiche Intervalle wird die Fluth, beim Uebergange des Mondes von den Quadraturen zu den Syzygien, der dritten Mondstunde nachfolgen.

§. 40. Die Fluthen sind grösser, wenn die Himmelskörper sich in der Erdnähe befinden.

Die Wirkungen der Himmelskörper hängen von ihren Abständen von der Erde ab. In kleineren Abständen sind die ersteren grösser, in grösseren kleiner, und zwar im dreifachen Verhältniss der scheinbaren Durchmesser. Daher bringt die Sonne im Winter, wo sie sich in der Erdnähe befindet, grössere Wirkungen hervor, in Folge deren die Fluthen in den Syzygien grösser und in den Quadraturen kleiner (unter übrigens gleichen Umständen), als im Sommer sind. Der Mond wird ferner in jedem einzelnen Monate in der Erdnähe grössere Fluthen erregen, als 15 Tage vor- oder nachher, wo er sich in der Erdferne befindet. Hieraus folgt, dass zwei allergrösste Fluthen nicht in zwei zusammenhängenden Syzygien auf einander folgen können.

§. 41. Die Fluthen sind grösser zu den Zeiten der Aequinoctien.

Die Wirkung beider Gestirne hängt auch von ihrer Abweichung, oder ihrem Abstande vom Aequator ab. Befände sich nämlich ein Gestirn am Pole, so würde es die einzelnen Wassertheile beständig anziehen, ohne Zu- oder Abnahme der Wirksamkeit und würde daher keine wechselnde Bewegung hervorbringen. Wenn daher beide Gestirne sich von dem Aequator nach dem Pole zu entfernen, so nimmt allmählig ihre Wirksamkeit ab, und sie erregen daher geringere Fluthen in den Solstitial-, als in den Aequinoctial-Syzygien. Umgekehrt bewirken sie grössere Fluthen in den Solstitial-, als in den Aequinoctial-Quadraturen; weil nämlich nun die Wirkung des im Aequator befindlichen Mondes am stärksten die Wirkung der Sonne übertrifft. Es treffen daher die grössten Fluthen in die Syzygien und die kleinsten in die Quadraturen der Aequinoctien, und die grösste Fluth in den Syzygien ist immer von der kleinsten in den Quadraturen begleitet, wie die Erfahrung es bestätigt. Dadurch, dass der Abstand der Sonne von der Erde im Winter kleiner als im Sommer ist, wird aber bewirkt, dass die grössten und kleinsten Fluthen öfters dem Frühlings-Aequinoctium vorangehen, als nachfolgen und öfters dem Herbst-Aequinoctium nachfolgen als vorangehen.

§, 42. Die Fluthen ausserhalb des Erd-Aequators werden wechselweise grösser und kleiner.

Fig. 216.

Die Wirkungen beider Gestirne hängen anch von der Breite des Ortes ab. Es bezeichne ApEP die überall mit tiefem Wasser bedeckte Erde, C ihren Mittelpunkt, P nnd p ihre Pole und AE den Aequator. F sei irgend ein Ort ausserhalb des Aequators, Ff sein Parallelkreis nnd Dd der auf der andern Seite des Aeqnators ihm entsprechende. L sei der Ort, welchen der Moud vor 3 Stunden einnahm, H der Ort anf der Erde, welcher perpendikulär unter ihm, so wie h derjenige, welcher ihm gegenüber liegt, K und k zwei um 90° von jenen abstehende Orte anf der Erde. CH und Ch seien die grössten Höhen des Meeres, vom Mittelpunkte der Erde aus gemessen, CK und Ck die kleinsten. Beschreibt man zu den beiden Axen Hh und Kk eine Ellipse, hierauf durch Umdrehnng der letzteren nm die grosse Axe Hh das Sphäroïd HPK hpk; so wird dieses sehr nahe die Figur des Meeres darstellen und CF, Cf, CD, Cd werden die Höhen des Meeres in den Orten F, f, D und d sein. Beschreibt ferner bei der vorhergehenden Umdrehnng der Ellipse ein beliebiger Pnnkt N den Kreis NM, welcher die Parallelen Ff und Dd in den beliebigen Orten R und T, wie auch den Aeqnator AE in S schneidet; so wird CN die Höhe des Meeres in allen, auf diesem Kreise liegenden, Orten R, S, T sein. Hieranf wird bei der täglichen Umdrehung des Ortes F die grösste Fluth in F 3 Stunden nach der oberen Culmination, hierauf die grösste Ebbe in Q 3 Stunden nach dem Untergange, die grösste Flnth in f 3 Stunden nach der untern Culmination und zuletzt die grösste Ebbe in Q 3 Stunden nach dem Aufgange des Mondes stattfinden und zwar wird die letzte Fluth in f kleiner sein, als die frühere in F. Man kann sich nämlich das ganze Meer in zwei grosse und halbkugelförmige Fluthen geschieden denken, die eine auf der Halbkugel KHkC nach Norden geneigt, die andere anf der entgegengesetzten Halbkugel KhkC, und man sie daher respective die nördliche nnd die südliche Fluth nennen. Diese Fluthen, welche einander stets entgegengesetzt sind, kommen wechselweise in die Meridiane der einzelnen Orte und zwar nach Verlauf einer Zwischenzeit von 12 Mondstunden. Da nnn die nördlichen Gegenden mehr an der nördlichen Fluth, und die südlichen mehr an der südlichen Theil nehmen; so entspringen hieraus die wechselweise grösseren nnd kleineren Fluthen an den einzelnen, ausserhalb des Aeqnators gelegenen Orten. Die grössere Fluth wird nämlich, wenn der Mond nach dem Zenith zu vom Aequator abweicht, ungefähr auf die 3. Stunde nach der oberen

Culmination des Mondes fallen; wenn die Abweichung des Mondes wechselt, geht sie in die kleinere Fluth über. Der grösste Unterschied der Fluthen findet um die Zeiten der Solstitien statt, besonders wenn der aufsteigende Knoten des Mondes sich im Anfangspunkte des Widders befindet. So übertreffen die Morgenfluthen im Winter die des Abends, und die Abendfluthen im Sommer die des Morgens in Plymouth um etwa 1 Fuss und in Bristol um 15 Zoll, wie Colopress und Sturm beobachtet haben.

§. 43. Durch die Beibehaltung der eingeflössten Bewegung wird der Unterschied der Fluthen vermindert und ist die dritte Fluth nach den Syzygien die grösste im Monat.

Die bisher beschriebenen Bewegungen werden etwas geändert durch jene wechselseitige Kraft der Gewässer, vermöge welcher die Meeresfluth auch, wenn die Einwirkung der Himmelskörper aufhört, noch einige Zeit anhalten kann. Diese Beibehaltung der eingeflössten Bewegung verändert den Unterschied der wechselnden Fluthen; sie lässt die nächsten Fluthen nach den Syzygien grösser und die nächsten nach den Quadraturen kleiner werden. Daher sind die wechselnden Fluthen in Plymouth und Bristol nicht viel mehr als 1 Fuss oder 15 Zoll von einander verschieden, ferner sind nicht die ersten, sondern die dritten Fluthen nach den Syzygien in diesen Häfen die grössten.

§. 44. Die Bewegung des Meeres wird durch die Hindernisse des Bettes verzögert.

Es kann auch vorkommen, dass die allergrösste Fluth erst die vierte oder fünfte nach den Syzygien ist, oder noch später ankommt, indem nämlich die Bewegung des Meeres in Folge von Untiefen später an die Küsten gelangt. So kommt die Fluth an die Westküste Irlands um die dritte Morgenstunde und 1 oder 2 Stunden später in die Häfen an der Südküste dieser Insel, ferner nach den Blei- oder Sorlingischen Inseln, dann allmählig nach Falmouth, Plymouth, Portland, der Insel Wight, Winchelsea, Dover, der Mündung der Thames und der Londonbrücke, indem sie 12 Stunden zur Zurücklegung dieses Weges gebraucht. Aber auch durch das nicht hinreichend tiefe Bette des Oceans selbst wird die Fortpflanzung der Fluthen verhindert. Es tritt nämlich die Fluth bei den Glücklichen Inseln und an den westlichen, dem Atlantischen Meere ausgesetzten, Küsten Irlands, Frankreichs, Spaniens und des ganzen Afrika bis zum Vorgebirge der guten Hoffnung um die dritte Mondstunde ein, ausserdem an einigen untiefen Orten, wo die Fluth verhindert langsamer ankommt und im Meerbusen von Cadix, wo in Folge der fortgepflanzten Bewegung des Mittelländischen Meeres die Fluth beschleunigt wird. Geht man von diesen Küsten weiter, quer über den Ocean nach den Küsten Amerika's; so tritt die Fluth zuerst an den östlichen Küsten Brasiliens um die vierte oder fünfte Mondstunde ein, hierauf an der Mündung des Amazonenstromes um die sechste, an den anliegenden

Inseln um die siebente und im Hafen St. Angustin in Florida um die $7^1/_2$te Mondstunde. Die Fluth pflanzt sich daher über den Ocean langsamer fort, als nach Verhältniss der Bewegung des Mondes. Diese Verzögerung ist aber sehr nothwendig, damit das Meer zu derselben Zeit zwischen Brasilien und Neu-Frankreich sinke, und bei den Glücklichen Inseln und an den Küsten von Europa und Afrika steige; und umgekehrt. Das Meer kann nämlich nicht an dem einen Orte steigen, ohne an dem andern zu sinken. Es ist aber sehr wahrscheinlich, dass sich auch das Stille Meer nach dem oben beschriebenen Gesetze bewege. Die höchsten Fluthen sollen nämlich an den Küsten von Chili und Peru um die dritte Morgenstunde eintreten, mit welcher Geschwindigkeit sie sich aber von hier nach der Ostküste von Japan und den Philippinen, wie auch nach den übrigen bei China liegenden Inseln fortpflanzen, habe ich bis jetzt nicht gefunden.

§. 45. Aus den Hindernissen des Bettes und der Küsten entspringen verschiedene Erscheinungen, wie diejenige, dass das Meer nur einmal an einzelnen Tagen fluthet.

Es kann sich ferner ereignen, dass die Fluth sich vom Meere aus durch verschiedene Meerengen nach demselben Hafen fortpflanzt, und schneller durch die eine als durch die andere gelangt. In diesem Falle kann dieselbe Fluth, welche sich in zwei oder mehrere, nach einander ankommende zertheilt hat, durch Zusammensetzung neue verschiedenartige Bewegungen bilden. Denken wir uns die Fluth in zwei gleich grosse zertheilt, deren erste der zweiten um 6 Stunden vorangeht und auf die 3. oder 27. Stunde nach der Culmination des Mondes im Hafen eintrifft. Wenn der Mond sich bei dieser Culmination im Aequator befand, so treffen alle 6 Stunden gleiche Zuflüsse ein, welche auf die wechselseitigen Abflüsse treffen, diese jenen gleich machen und so bewirken, dass das Wasser an diesem Tage ruhig und stillsteht. Wenn der Mond sich vom Aequator entfernt, so werden die Fluthen im Ocean wechselweise grösser und kleiner, wie wir oben angeführt haben und von da pflanzen sich wechselweise zwei grössere und zwei kleinere Fluthen nach diesem Hafen fort. Die beiden grössten Fluthen bilden in ihrer Mitte die grösste Wasserhöhe, die grössere und kleinere Fluth vereint bewirken, dass das Wasser in der Mitte zwischen beiden die mittlere Höhe erreicht, zwischen den beiden kleinsten Fluthen wird das Wasser zur kleinsten Höhe ansteigen. So gelangt das Wasser innerhalb 24 Stunden nicht wie gewöhnlich zweimal, sondern nur einmal zur grössten und einmal zur kleinsten Höhe. Die grösste Höhe trifft, wenn der Mond nach dem über dem Horizont befindlichen Pole hin abweicht, auf die 6. oder 13.[348]) Stunde nach der Culmination des Mondes; ändert der Mond seine Abweichung, so geht die Fluth in Ebbe über. Ein Beispiel von allem diesen haben wir in dem Hafen des Königreiches Tunquin bei Batsham in 20° 50′ nördlicher Breite. Hier steht das Wasser an dem Tage, nachdem der Mond sich im Aequator befunden hat, still,

hieranf fängt es an, wenn jener nördliche Abweichung annimmt, hin- und herznströmen, nicht zweimal täglich wie in anderen Häfen, sondern nur einmal; und zwar trifft die grösste Fluth auf den Unter- und die grösste Ebbe auf den Anfgang des Mondes. Mit der Abweichung des Mondes nimmt diese Fluth zu bis zum 7. oder 8. Tage, nimmt hieranf während 7 anderer Tage in demselben Masse ab, hört auf, wenn der Mond seine Abweichnug ändert und geht dann in Ebbe über. Diese trifft nnn anf den Unter- und die Fluth auf den Aufgang des Mondes, bis dieser aufs nene seine Abweichnng ändert. Nach diesem Hafen steht nämlich ein doppelter Zugang vom Ocean offen, der eine geradere und kürzere zwischen der Insel Hainan und der Küste von Quantong einer Provinz China's, der andere auf einem Umwege zwischen derselben Insel und der Küste von Cochin. Durch den kürzeren pflanzt sich die Fluth schneller nach Balsham fort.

§. 46. Die Fluthzeiten innerhalb der Strombetten sind kürzer, als im Ocean.

In den Strombetten hängt die Fluth und Ebbe vom Laufe des Stromes ab. Dieser Lauf bewirkt nämlich, dass das Wasser langsamer ans dem Meere zu- und schneller in dasselbe abfliesst, es wird daher länger zurück- als herströmen; besonders wenn es weit in den Strom hinaufsteigt, wo die Gewalt des Meeres geringer ist. So soll im Flusse Avon, am dritten Steine unterhalb Bristol, das Wasser nach Sturm's Bericht 5 Stunden ein und 7 Stunden ausfliessen; oberhalb Bristol, wie bei Canesham und Bath, ist der Unterschied beider Zeiträume ohne Zweifel grösser. Derselbe hängt auch von der Grösse der Ebbe und Fluth ab. In der Nähe der Syzygien beider Gestirne überwindet die heftige Bewegung des Meeres leichter den Widerstand der Ströme und bewirkt, dass das Wasser schneller und länger einströmt, wodurch dieser Unterschied vermindert wird. Während aber der Mond sich den Syzygien nähert, müssen die Ströme nothwendig, da die grosse Fluth ihrem Laufe hinderlich ist, stärker angefüllt werden und so den Rückfluss des Meeres etwas mehr unmittelbar nach, als vor den Syzygien verhindern. Aus dieser Ursache treffen die langsamsten Fluthen nicht auf die Syzygien selbst, sondern gehen ihnen etwas vor aus. Ich habe gezeigt, dass die Fluth vor den Syzygien auch durch die Kraft der Sonne verzögert werde. Beide Ursachen vereinigen sich und die Verzögerung der Fluthen wird sowohl grösser, als auch den Syzygien weiter voraneilend. Dass alles dieses sich so verhalte, entnehme ich aus den Fluth-Tabellen, welche Flamsteed nach sehr vielen Beobachtungen construirt hat.

§. 47. Aus einem grösseren und tieferen Meere entspringen grössere Fluthen, und diese sind grösser an den Küsten der Continente, als mitten auf dem Meere bei Inseln, und noch grösser in untiefen Meerbusen, welche sich mit breiter Mündung gegen das Meer öffnen.

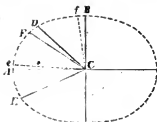


Fig. 217.

Durch die bisher beschriebenen Gesetze werden die Zeiten der Fluthen regiert; die Grösse hängt von der Grösse des Meeres ab. Es bezeichne C den Mittelpunkt der Erde, EADB die ovale Gestalt des Meeres, CA die halbe grosse und CB die halbe kleine, auf die vorige perpendikuläre Axe dieses Ovals (dieser Ellipse). D sei ein zwischen A und B liegender Punkt, ECF oder eCf der Winkel am Mittelpunkte der Erde, welchen die Breite des, durch die Küsten E und F oder e und f begrenzten, Meeres unterspannt. Es liege A in der Mitte zwischen E und F, D in der Mitte zwischen e und f. Durch den Unterschied CA — CB drücke man die Grösse der Fluth in dem sehr tiefen Meere, welches die ganze Erde umgiebt, aus; alsdann wird der Unterschied CA — CE oder CA — CF die Grösse der Fluth in der Mitte des Meeres, welches durch die Küsten E und F begrenzt ist, ausdrücken. Eben so wird durch den Unterschied Ce — Cf die Grösse der Fluth an den Küsten desselben Meeres bezeichnet werden. Hieraus folgt, dass die Fluthen mitten im Meere viel kleiner sind, als an den Küsten, und dass die letzten Fluthen sich sehr nahe wie die Breite EF, welche nicht $\gtrdot$ 90° ist, verhalten. Hiernach sind in der Nähe des Aequators, wo das Meer zwischen Afrika und Amerika eng ist, die Fluthen viel kleiner, als an beiden Seiten in den gemässigten Zonen, wo das Meer weit offen ist, und an den Amerikanischen und Chinesischen Küsten des Stillen Meeres, so wohl zwischen den Wendekreisen, als ausserhalb derselben.

Ferner folgt noch, dass an den mitten im Meere gelegenen Inseln die Fluth kaum über zwei oder 3 Fuss ansteigt, an den Küsten grosser Continente aber 3, 4 oder mehrmals so gross ist; besonders wenn die aus dem offenen Meere kommenden Bewegungen sich allmählig in einen engen Raum zusammenziehen und das Wasser gezwungen wird, zur wechselnden Anfüllung und Ausleerung von Meerbusen, mit grosser Gewalt über untiefe Stellen ein- und auszufliessen. Dies findet statt bei Plymouth und der Brücke von Chepstow in England, bei Mont St. Michel und Auranches in der Normandie, bei Camboja und Pegu in Ostindien. An diesen Orten, wo das Meer mit grosser Geschwindigkeit ankommt und zurückgeht, überschwemmt es bald die Küste, bald lässt es sie viele Meilen weit trocken. Die Gewalt, mit welcher es kommt und geht, kann nicht früher gebrochen werden, als bis das Wasser 40, 50 oder noch mehr Fuss hoch gehoben und herabgedrückt ist. So haben auch lange, untiefe Meerengen, welche sich gegen das Meer mit einer breiteren Mündung, als das übrige Bett, wie die Britische und Magellan-Strasse an ihrem östlichen Eingange,

eine grössere Ebbe und Fluth, sie steigern ihren Lauf oder lassen darin nach und werden aus dieser Ursache stärker gehoben und herabgedrückt. An den Küsten von Süd-Amerika soll das Stille Meer bei der Ebbe nicht selten um zwei Meilen zurückweichen und sich dem Anblick eines am Ufer Stehenden entziehen. Daher sind dort auch die Fluthen höher als gewöhnlich. In tiefern Gewässern ist aber die Geschwindigkeit, womit das Wasser vor- und rückwärts strömt, immer kleiner, und es steigt und sinkt daher auch weniger. An solchen Orten soll der Ocean, so viel man weiss, nicht über 6, 8 od. 10 Fuss ansteigen.[349]) Die Grösse des Steigens berechnete ich aber folgendermassen.

§. 48. Aus den angeführten Principien berechnet man die Kraft der Sonne, welche die Bewegung des Mondes stört.

Es bezeichne S die Sonne, T die Erde, P den Mond und PADB die Bahn des letzteren. Auf SP nehme man SK = ST und SL : SK = $SK^2 : SP^2$, ferner ziehe man LM ∓ PT.

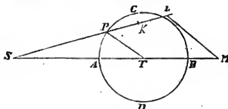


Fig. 218.

Wird nun die mittlere Kraft der Sonne, welche auf die Erde wirkt, durch den Abstand ST oder SK bezeichnet, so wird SL die auf den Mond wirkende Kraft der Sonne sein. Diese ist aus den Seitenkräften SM und LM zusammengesetzt, von denen LM und der Theil TM von SM die Bewegung des Mondes stört (wie im §. 107. und dessen Zusätzen auseinandergesetzt worden ist). So weit die Erde und der Mond sich um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt bewegen, wird die erstere durch ähnliche Kräfte angetrieben; allein die Summe so wohl der Kräfte, als auch der Bewegungen darf man auf den Mond beziehen, und die erstere Summe durch die Linie TM und ML, welche ihnen analog sind, bezeichnen. Die Kraft ML, in ihrer mittleren Grösse, steht zu der Kraft, vermöge welcher der Mond sich in seiner Bahn um die ruhende Erde, im Abstande PT bewegen könnte, im doppelten Verhältniss der Umlaufszeit des Mondes um die Erde zur Umlaufszeit der letzteren um die Sonne (nach §. 107., Zusatz 17.), d. h. im doppelten Verhältniss von $27^d\ 7^h\ 43^m : 365^d\ 6^h\ 9^m$ oder im Verhältniss

1. $1000 : 178725 = 1 : 178^{29}/_{40}$.

Die Kraft, vermöge welcher der Mond sich in seiner Bahn um die ruhende Erde, in einem Abstande PT von $60^1/_2$ Erdhalbmessern bewe-

gen könnte, verhält sich zu derjenigen Kraft, vermöge welcher er in derselben Zeit, in einem Abstande von 60 Halbmessern seine Bahn beschreiben würde, wie 2. $60{,}5 : 60$,

und diese Kraft verhält sich zur Schwerkraft bei uns, wie

3. $1 : 60^2$.

Daher verhält sich, nach den einzelnen Verhältnissen 1., 2. und 3. die mittlere Kraft ML zur Schwerkraft an der Oberfläche der Erde, wie 4. $1 . 60{,}5 : 60^3 . 178^{29}/_{40} = 1 : 638092{,}8$.

Hiernach ergiebt sich auch die Kraft TM aus dem Verhältniss der Linien TM und ML. Dies sind die Kräfte der Sonne, welche die Bewegung des Mondes stören.

§. 49. Berechnung der Kraft der Sonne, wodurch das Meer bewegt wird.

Steigt man von der Mondbahn zur Oberfläche der Erde herab, so werden diese Kräfte im Verhältniss 60,5 : 1 kleiner, und so die Kraft ML 38604600 mal kleiner, als die Schwerkraft. Diese Kraft, welche von allen Seiten gleichmässig auf die Erde wirkt, wird kaum die Bewegung des Mondes verändern und daher in der Auseinandersetzung jener Bewegung vernachlässigt werden können. Die andere Kraft TM ist an den Orten, in deren Zenith oder Nadir sich die Sonne befindet, 3mal so gross, als LM und daher 12868200mal kleiner, als die Schwerkraft. (§. 32. des dritten Buches).

§. 50. Berechnung der Fluthhöhe unter dem Aequator, welche aus der Kraft der Sonne entspringen muss.

Fig. 219.

Es bezeichne ADBE die sphärische Oberfläche der Erde; aDbE das auf ihr befindliche Wasser; C den Mittelpunkt beider; A den Ort, über welchem die Sonne perpendikulär steht, B den entgegengesetzten, D,E zwei um 90° von ihnen abstehende Orte. ACEmlk sei ein cylindrischer rechtwinkeliger Kanal, welcher durch den Mittelpunkt der Erde geht. Die Kraft ML ist in jedem Orte dem Abstande des letzteren von der Ebene DE, worauf die gerade Linie AC perpendikulär steht, proportional; sie ist daher im Theile EClm des Kanals = Null; im anderen Theile AClk verhält sie sich wie die Schwere in den einzelnen Höhen. Die Schwere ist nämlich, wenn man zum Mittelpunkte der Erde herabsteigt, überall der Höhe proportional (§. 115. des ersten Buches). Daher wird die Kraft ML, welche das Wasser aufwärts treibt, die Schwere des letzteren im Schenkel AClk des Kanals im gegebenen Verhältniss vermindern. Demnach wird das Wasser in diesem Schenkel emporsteigen, damit die Abnahme der Schwere durch die grössere Höhe ausgeglichen werde, und nicht eher im Gleich-

gewicht stehen, als bis die Schwere des ganzen derjenigen des Wassers im anderen Schenkel ClmE gleich ist. Weil die Schwere eines jeden Theilchens dem Abstande des letztern vom Mittelpunkte der Erde proportional ist, wird das Gewicht des ganzen Wassers im Schenkel des Kanals im doppelten Verhältniss der Höhe wachsen,[350]) und so die Höhe des Wassers im Schenkel AClk sich zu der im Schenkel ClmE verhalten, wie $\sqrt{12868201} : \sqrt{12868200} = 25623053 : 25623052$, und die Höhe in ClmE zum Unterschiede der Höhen, wie 25623052 : 1.

Jene Höhe beträgt aber in ClmE 19615800 Pariser Fuss, wie die Franzosen vor Kurzem bestimmt haben; daher findet man durch Analogie den Unterschied der Höhen = 9,2 Pariser Zoll.

Durch die Kraft der Sonne wird demnach die Höhe des Wassers bei A um etwa 9 Zoll grösser, als bei E.[351]) Wenn auch das Wasser im Kanal ACEmlk gefröre und erstarrte, so würden doch die Höhen des Wassers, welches die Erde umgiebt, in A, E nnd allen zwischenliegenden Orten unverändert bleiben.

§. 51. Berechnnng der Flnthhöhe, welche aus der Kraft der Sonne unter den Parallelkreisen hervorgeht.

Es bezeichne Aa (Fig. des vorigen Paragraphen) jenen Ueberschuss bei a von 9" und hf den Ueberschuss an irgend einem anderen Orte h, und man fälle anf DC das Perpendikel fG, welches die Kngel in F schneidet. Wegen der sehr grossen Entfernung der Sonne, wodnrch die nach derselben gezogenen Linien als parallel angesehen werden können, verhält sich die Kraft TM am beliebigen Orte h oder f zu jener Kraft in A, wie der Sinus FG znm Radius AC; folglich werden diese Kräfte, da sie längs paralleler Linien gegen die Sonne gerichtet sind, parallele Höhen Ff und Aa erzengen, welche in demselben Verhältniss stehen. Daher ist die Figur DfaEb ein Sphäroid, welches durch Umdrehung der Ellipse um die grosse Axe ab entstanden ist. Ausserdem verhält sich die Höhe fh zur schiefen Höhe Ff, wie fG : fC = FG : AC; und es steht so die Höhe fh zur Höhe Aa im doppelten Verhältniss des Sinus versus vom doppelten Winkel DCf zum doppelten Radius, und ist daher gegeben. Hieraus ergiebt sich anch, bei der scheinbaren Umdrehung der Sonne um die Erde, das Verhältniss des Steigens und des Sinkens des Wassers zn den einzelnen Zeiten und an jedem beliebigen Orte unter dem Aequator. Es ergiebt sich ferner die Abnahme der Meeresfluth, welche sowohl aus der Breite des Ortes, als aus der Declination der Sonne entspringt; das Steigen und Sinken des Meeres nimmt nämlich im doppelten Verhältniss des Cosinus der Breite und des Cosinus der Declination ab. Aber auch ausserhalb des Aequators wird die halbe Summe der Morgen- nnd Abendflnth, d. h. die mittlere Fluth sehr nahe in jenem Verhältniss vermindert.

§. 52. Das Verhältniss der, aus der Sonne nnd dem Monde vereint entspringenden, Fluthen unter dem Aequator, in den Syzygien und den Quadraturen.

Es mögen S und L die Kräfte der unter dem Aequator befindlichen Sonne und Mond bezeichnen, welche beide letzteren sich im mittleren Abstande von der Erde befinden. R bezeichne den Radius, T und U die Sinus versus des doppelten Complementes der Declination von Sonne und Mond, zu einer gegebenen Zeit, D und E die **mittleren**, und F und G die scheinbaren Durchmesser zu jener gegebenen Zeit. Alsdann sind die Kräfte, durch welche die Fluthen in dem Aequator erregt werden,

in den Syzygien: $\frac{UG^3}{2RE^3}$ L + $\frac{TF^3}{2RD^3}$ S,

in den Quadraturen: $\frac{UG^3}{2R.E^3}$ L — $\frac{TF^3}{2RD^3}$ S.

Wird dasselbe Verhältniss der Fluthen unter den Parallelen beobachtet, so erhalten wir aus den, auf unserer nördlichen Halbkugel genau angestellten, Beobachtungen das Verhältniss der Kräfte L und S. Endlich wird man auch nach dieser Regel die Fluthhöhe für die einzelnen Syzygien und Quadraturen vorhersagen können.

§. 53. Berechnung der Kraft, womit der Mond auf die Erregung der Fluth wirkt und der daraus entspringenden Wasserhöhe.

Vor der Mündung des **Avon**, am dritten Steine unterhalb **Bristol** beträgt nach **Samuel Sturm's** Beobachtung im Frühling und Herbst die ganze Steigung des Wassers, in der Conjunction und Opposition beider Gestirne etwa 45 Fuss, in den Quadraturen aber 25 Fuss. Die scheinbaren Durchmesser beider, welche hier nicht bestimmt werden, nehmen wir gleich den mittleren, wie auch die Declination des Mondes im Frühlings-Aequinoctium gleich der mittleren, d. h. $= 23\frac{1}{2}^0$ an. Es wird alsdann der Sinus versus des doppelten Complementes = 1682, wenn der Radius = 1000 gesetzt ist, die Declination der Sonne in den Aequinoctien und die des Mondes in den Syzygien ist = 0 und der Sinus versus des doppelten Complementes = 2000. Es wird daher die vereinigte Kraft in den Syzygien = L + S, in den Quadraturen = $\frac{1685}{2000}$ L — S, und so L + S : $\frac{1685}{2000}$ L — S = 45 · 25 = 9 : 5, oder auch 5L + 5S = $\frac{15138}{2000}$ L — 9S, L = $\frac{28000}{5138}$ S = $5\frac{5}{11}$ S.[352])

Ferner erinnere ich mich, gehört zu haben, dass im Sommer die Fluthhöhe des Meeres sich zu der in den Quadraturen verhalte, wie ungefähr 5 : 4, in den Solstitien selbst aber wahrscheinlich das Verhältniss etwas kleiner, nämlich 6 : 5 sei. Hieraus folgt aber L = $5\frac{1}{6}$S.[353]) Bis etwas Genaueres aus den Beobachtungen gefolgert sein wird, nehmen wir L = $5\frac{1}{3}$S.

Da nun die Fluthen den Kräften proportional sind, die Kraft der Sonne aber eine etwa 9 Zoll hohe Fluth hervorbringt; so wird durch die vom Monde ausgeübte Kraft eine 4 Fuss hohe Fluth erregt werden. Geben wir nun zu, dass vermöge der Kraft der Wechselwirkung, wo-

durch eine dem Wasser einmal beigebrachte Bewegung eine Zeit lang beibehalten wird, jene Höhe sich verdoppele, oder vielleicht verdreifache; so entsteht die ganze Höhe der Fluthen, welche man in der That auf dem Ocean wahrnimmt.

§. 54. Diese Kräfte der Sonne und des Mondes können kaum auf andere Weise, als durch die Meeresfluth, erkannt werden.

Diese Kräfte sind demnach ausreichend, um das Meer zu bewegen, allein andere bemerkbare Wirkungen werden sie, soviel ich erfahren habe, nicht auf der Erde hervorbringen. Da nämlich 1 Gran, bei einem Gewicht von 4000 Gran, auch mittelst der genauesten Wage kaum erkannt werden kann; da ferner die Kraft der Sonne zur Erregung der Fluth 12868200mal, und die Summe der Kräfte der Sonne und des Mondes im Verhältniss $6^1/_3 : 1$ grösser, als die Kraft der ersteren, mithin 2032820mal[354]) kleiner, als die Kraft der Schwere ist: so sieht man ein, dass jene vereinigten Kräfte 500mal zu klein sind, um das Gewicht eines an einer Wage aufgehängten Körpers merklich vermehren oder vermindern zu können. Sie werden daher keine aufgehängten Körper merklich bewegen, sie bringen demnach weder bei den Pendelversuchen, noch beim Barometer, den auf ruhendem Wasser befindlichen Körpern und bei ähnlichen statischen Versuchen bemerkbare Wirkungen hervor. Die Atmosphäre hat zwar, in Folge dieser Kräfte, nach Art des Meeres eine Ebbe und Fluth, allein mit so geringer Bewegung, dass daraus kein bemerkbarer Wind entspringen kann.*)

§. 55. Der Körper des Mondes ist ungefähr 6mal so dicht, als derjenige der Sonne.

Wenn sowohl die Wirkungen des Mondes und der Sonne auf die Erregung der Fluth, als auch ihre scheinbaren Durchmesser einander gleich wären, so würden (§. 107., Zusatz 14. des ersten Buches) ihre absoluten Kräfte ihren Grössen proportional sein. Es verhält sich aber die Wirkung des Mondes zu derjenigen der Sonne, wie etwa $5^1/_3 : 1$ (§. 53.), und sein scheinbarer Durchmesser ist kleiner im Verhältniss $31^1/_2 : 32^1/_5 = 45 : 46$.

Die Kraft des Mondes ist aber direct der Wirkung und umgekehrt dem Cubus des scheinbaren Durchmesser proportional. Auf diese Weise wird die Kraft des Mondes, verglichen mit seiner Grösse, sich zur Kraft der Sonne, ebenfalls mit ihrer Grösse verglichen, verhalten, wie $5^1/_3 : 1$ und $45^3 : 46^3$, d. h. wie 5,7 : 1.

Der Mond hat daher eine absolute Kraft, welche nach der Grösse seines Körpers, 5,7mal so gross ist, als die absolute Kraft der Sonne nach ihrer Grösse; er ist daher in demselben Verhältniss dichter.

§. 56. Der Mond ist ungefähr im Verhältniss 3 : 2 dichter, als unsere Erde.

---

*) Diejenigen sind daher unverständig, welche die Wetterveränderungen aus der Kraft des Mondes herleiten. Bemerkung des Verfassers.

In der Zeit von $27^d\ 7^h\ 43^m$, in welcher der Mond seinen Umlauf um die Erde ausführt, würde diese um die Sonne in einer Entfernung von 18,954 Sonnendurchmessern vom Mittelpunkte der Sonne sich herumdrehen können, vorausgesetzt, dass der mittlere scheinbare Durchmesser der Sonne = 32',2 sei. In dieser Zeit könnte der Mond um die ruhende Erde, in einer Entfernung von 30 Erddurchmessern herumlaufen. Wäre die Zahl der Durchmesser in beiden Fällen dieselbe, so würde sich die absolute Kraft der Erde zu derjenigen der Sonne verhalten, wie die Grösse der ersteren zur Grösse der letzteren (§. 114, Zusatz 2. des ersten Buches). Da die Zahl der Erddurchmesser im Verhältniss 30 : 18,954 grösser ist, so wird der Erdkörper im Verhältniss $30^3 : 18{,}954^3$, d. h. $3^{28}/_{29} : 1$ kleiner sein Es verhält sich daher die Kraft der Erde nach ihrer Grösse, zur Kraft der Sonne nach ihrer Grösse, wie $3^{28}/_{29} : 1$ und in demselben Verhältniss stehen die Dichtigkeiten der Erde und der Sonne. Da nun die Dichtigkeiten des Mondes und der Sonne sich zu einander verhalten, wie 5,7 : 1; so wird die Dichtigkeit des Mondes sich zu derjenigen der Erde verhalten, wie $5{,}7 : 3^{28}/_{29} = 23 : 16$.

Da nun die Grösse des Mondes sich zu der der Erde verhält, wie ungefähr $1 : 41^1/_2$, so verhalten sich die absoluten Centripetalkräfte des Mondes und der Erde zu einander, wie ungefähr 1 : 29, und in demselben Verhältniss stehen die Massen beider Himmelskörper zu einander. Hieraus ergiebt sich ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt genauer als früher, und ist dieser bekannt so kann man auch ihre gegenseitige Entfernung genauer bestimmen. Ich will aber hiermit warten, bis das gegenseitige Verhältniss des Mond- und Erdkörpers durch die Erscheinung der Meeresfluth genauer bestimmt sein wird; indem ich zugleich hoffe, dass alsdann auch der Umfang der Erde, mittelst grösserer Zwischenräume der Stationen als bisher, bestimmt sein wird.

§. 57. Von der Entfernung der Fixsterne.

Bis jetzt habe ich das Planeten-System auseinandergesetzt. Dass die Fixsterne aber sich in ungeheuere Entfernungen von diesem System befinden, schliesst man aus dem Mangel einer jährlichen Parallaxe. Es ist ganz gewiss; dass diese kleiner als 1 Minute sei und dass daher die Entfernung der Fixsterne den Abstand des Saturns von der Sonne mehr als 360mal übertreffe.[356]) Diejenigen, welche die Erde den Planeten und die Sonne den Fixsternen zuzählen, setzen die letzteren aus folgenden Gründen, in viel grössere Entfernungen. Aus der jährlichen Bewegung der Erde muss eine gegenseitige Verschiebung der Fixsterne hervorgehen, welche ungefähr der doppelten Parallaxe gleich ist. An den grösseren und in Bezug auf die entfernten, welche man kaum durch die Fernröhre wahrnehmen kann, näheren Sternen hat man noch keine Bewegung bemerkt. Geben wir nun zu, dass diese Bewegung kleiner als 20 Secunden sei, so wird der Abstand des nächsten Fixsternes 2000mal so gross, als die mittlere Entfernung des Saturns sein. Ferner empfängt

der letztere auf seiner, 17″ bis 18″ grossen Scheibe etwa $\frac{1}{2100000000}$ des Sonnenlichtes. Um so viel ist nämlich jene Scheibe kleiner, als die ganze sphärische Oberfläche, deren Radius dem der Saturnsbahn gleich ist. Setzt man voraus, dass der Saturn etwa $^1/_4$ dieses Lichtes zurückwerfe, so wird das ganze, von der leuchtenden Halbkugel zurückgeworfene Licht etwa $\frac{1}{4200000000}$ des ganzen, von der Sonnenhalbkugel ausströmenden, Lichtes sein.

Da nun das Licht im doppelten Verhältniss der Entfernung des leuchtenden Körpers schwächer wird, so würde, wenn die Sonne $10000\sqrt{42}$ mal weiter als der Saturn entfernt wäre, jene eben so hell erscheinen, als dieser sich jetzt ohne seinen Ring zeigt; sie würde also etwas leuchtender sein, als ein Fixstern erster Grösse. Gesetzt also, dass der Abstand, in welchem die Sonne wie ein Fixstern leuchten würde, 100000 mal so gross als die Entfernung des Saturns sei; so wird ihr scheinbarer Durchmesser $7^{V}\ 16^{VI}$ und ihre aus der jährlichen Bewegung der Erde entspringenden Parallaxe 13^{IV} gleich sein. So gross wird die Entfernung, der scheinbare Durchmesser und die Parallaxe der Fixsterne erster Grösse sein, welche unserer Sonne, in Bezug auf Grösse und Licht, gleich sind.

Man kann sich zwar vorstellen, dass ein ziemlich grosser Theil des Lichtes der Fixsterne, beim Durchgange durch so weite Räume, aufgehalten werde und verloren gehe, und wir so die Fixsterne näher setzen müssen; allein in diesem Falle würde man die weiter entfernten kaum sehen können. Geben wir jedoch zu, dass $^3/_4$ des Lichtes beim Uebergange von dem nächsten Fixsterne zu uns verloren gehe, so werden ebenfalls zweimal $^3/_4$ Theile desselben beim Durchgange desselben durch den doppelten Raum verloren gehen, dreimal $^3/_4$ beim Durchgange durch en dreifachen Raum, u. s. w. Demnach sind die doppelt so weit entfernten Fixsterne 16mal dunkeler, nämlich 4mal dunkeler, wegen des verminderten scheinbaren Durchmessers und nochmals 4mal, wegen des Verlustes an Licht. Aus demselben Grunde werden die dreimal so weit entfernten Fixsterne 9 . 4 . 4 = 144mal, die viermal so weit entfernten 16 . 4 . 4 . 4 = 1024mal dunkeler sein. Eine solche Verminderung des Lichtes kann aber keineswegs mit den Erscheinungen und der Hypothese, dass die Fixsterne verschiedene Entfernungen haben, bestehen.[356])

§. 58. Dass die Kometen, so oft sie sichtbar werden, sich uns näher als der Jupiter befinden, wird durch ihre Längenparallaxe bewiesen.

Die in so grossen Entfernungen von einander befindlichen Sterne ziehen sich weder wechselseitig merklich an, noch werden sie von unserer Sonne angezogen. Die Kometen sind aber nothwendig der Sonnenkraft unterworfen; wie man nämlich aus der fehlenden täglichen Parallaxe folgert, dass sie sich oberhalb des Mondes befinden müssen, so schliesst man aus ihrer jährlichen Parallaxe, dass sie in die Gegenden der Pla-

neten herabsteigen. Kometen nämlich, welche nach der Ordnung der Zeichen fortrücken, werden alle gegen das Ende ihrer Sichtbarkeit entweder langsamer als vorher, oder rückgängig, wenn die Erde sich zwischen ihnen und der Sonne befindet, hingegen geschwinder als vorher, wenn die Erde sich der Opposition nähert. Umgekehrt werden solche Kometen, welche gegen die Ordnung der Zeichen fortgehen, am Ende ihrer Sichtbarkeit geschwinder, wenn die Erde sich zwischen ihnen und der Sonne befindet, hingegen langsamer als vorher oder selbst rechtläufig, wenn die Erde auf der entgegengesetzten Seite befindlich ist. Diess rührt grösstentheils von der Bewegung der Erde in ihren verschiedenen Lagen her. Geht diese nach derselben Seite und geschwinder als der Komet fort, so wird derselbe rückläufig; geht jene langsamer, so wird dieser auch wenigstens langsamer und geht jene endlich nach der entgegengesetzten Seite, so wird dieser geschwinder. Durch die Bestimmung der Unterschiede zwischen den geschwinderen und langsameren, und die Summen der geschwinderen und rückläufigen Bewegungen und ihre Vergleichung mit der Lage der Erde, woraus dieselben entspringen, erhielt ich aus dieser Parallaxe den Abstand der Kometen zu der Zeit, wo sie aufhören, mit blossem Auge gesehen zu werden, und zwar ergab sich derselbe stets kleiner, als der Abstand des Saturns und meistentheils kleiner als der Abstand des Jupiters.

§. 59. Dasselbe wird durch die Breitenparallaxe erwiesen.

Man schliesst auf dasselbe aus der Krümmung des Weges der Kometen. Diese gehen nämlich nahebei in grössten Kreisen fort, so lange sie sich schneller bewegen; aber gegen das Ende ihres Laufes, wo die scheinbare, aus der Parallaxe entspringende, Bewegung ein grösseres Verhältniss zu ihrer ganzen scheinbaren Bewegung hat, pflegen sie von diesen Kreisen abzuweichen und, so oft die Erde sich nach der einen Seite hinbewegt, nach der entgegengesetzten Seite fortzugehen. Diese Abweichung entspringt grösstentheils aus der Parallaxe, weil sie der Bewegung der Erde entspricht und ihre bedeutendste Grösse setzte, nach meiner Rechnung, die verschiedenen Kometen ziemlich weit unterhalb des Jupiters. Hieraus folgt, dass sie in der Erd- und Sonnennähe, wo sie noch weniger entfernt sind, öfters unterhalb der Bahnen des Mars und der untern Planeten herabsteigen.

§. 60. Dies wird auf andere Weise durch die Parallaxe erwiesen.

Eine so bedeutende Annäherung wird auch noch durch die Parallaxe der jährlichen Bahn bestätigt, so weit dieselbe sich beiläufig durch die Hypothese, dass die Kometen sich gleichförmig auf einer geraden Linie bewegen, ergiebt. Bekannt ist jetzt die Methode (welche Kepler versucht, und Wallis und Wren vervollkommnet haben), wonach man den Abstand des Kometen, vermöge dieser Hypothese, aus 4 Beobachtungen bestimmt; die auf diese geradlinige Bewegung reducirten Kometen pflegen aber mitten durch die Gegend der Planeten zu gehen. So die Kometen von 1607 und 1618 zwischen der Sonne und der Erde,

nach Kepler's Bestimmung; der vom Jahre 1664 unterhalb der Marsbahn; der vom Jahre 1680 unterhalb der Merkursbahn, nach Wren's und Anderer Bestimmung. Durch eine ähnliche Hypothese der geradlinigen Bewegung setzte Hevel alle Kometen, von denen man Beobachtungen hat, unterhalb der Jupitersbahn. Diejenigen irren daher und reden ohne astronomische Rechnung, welche aus der regelmässigen Bewegung der Kometen entweder schliessen, dass diese sich in der Gegend der Fixsterne befinden, oder die Bewegung der Erde leugnen; da sie nur dann die Bewegung der Kometen auf irgend eine Regelmässigkeit zurückführen können, wenn sie zugeben, dass dieselben durch die der Erde nahe liegenden Gegenden hindurchgehen. Dies sind die aus der Parallaxe abgeleiteten Gründe, so weit man dieselben ohne eine genaue Kenntniss der Bahnen und Bewegungen der Kometen bestimmen kann.

§. 61. Aus dem Licht der Kometenköpfe folgt, dass dieselben bis zur Saturnsbahn herabsteigen.

Die Nähe der Kometen wird auch durch das Licht ihrer Köpfe bestätigt. Der Glanz eines, von der Sonne beschienenen und in entfernte Gegenden sich begebenden, Körpers nimmt nämlich im 4fachen Verhältniss der Entfernung ab; im doppelten wegen der grösseren Entfernung von der Sonne, und im zweiten doppelten Verhältniss wegen des verkleinerten scheinbaren Durchmessers. Hieraus ersieht man, dass der Saturn, wegen seiner doppelten Entfernung und seines etwa halb so grossen scheinbaren Durchmessers, 16mal dunkeler als der Jupiter erscheinen muss und dass, wenn seine Entfernung 4mal grösser wäre, sein Licht 256mal schwächer sein müsste und er mit blossem Auge kaum würde gesehen werden können. Die Kometen kommen aber nicht selten dem Saturn an Licht gleich, übertreffen ihn jedoch nicht im scheinbaren Durchmesser. Der Komet von 1678 war, nach Hook's Beobachtungen, in seinem Lichte den Sternen 1. Grösse gleich, und sein Kopf oder der in der Mitte der strahlenden Hülle gesehene Stern erschien, durch ein funfzehnfüssiges Fernrohr gesehen, eben so hell, als der Saturn nahe am Horizont. Der Durchmesser dieses Kopfes betrug aber nur 25 Secunden, d. h. fast eben so viel, als der Durchmesser des Saturns mit seinem Ringe. Die um den Kopf sich verbreitende strahlende Hülle war etwa 10mal so gross oder $4^1/_8$ Minuten breit. Ferner war der kleinste Durchmesser des Schweifes an dem Kometen von 1682, wie er durch ein sechszehnfüssiges Fernrohr gesehen und gemessen wurde, 2 Minuten gleich. Der Kern oder Stern in der Mitte war aber kaum $^1/_{10}$ hiervon, d. h. 11 bis 12 Secunden breit. An Licht und Helligkeit übertraf er den Kometen von 1680 und kam den Sternen 1. oder 2. Grösse gleich.

Der Komet von 1665 übertraf, nach Hevel's Bericht, im April fast alle Fixsterne in seiner Helligkeit, ja selbst den Saturn, indem er nämlich eine lebhaftere Farbe hatte. Dieser Komet war glänzender als jener andere, welcher am Ende des vorhergehenden Jahres erschienen

war und wurde den Sternen erster Grösse gleich gestellt. Die Breite seines Schweifes betrug etwa 6 Minuten; aber sein mit den Planeten, mittelst eines Fernrohres verglichener, Kern war bestimmt kleiner, als der Jupiter, und bald kleiner, als der Körper des Saturns, bald ihm gleich. Fügt man den Ring hinzu, so war der Saturn doppelt so gross, das Licht aber nicht stärker, als dasjenige des Kometen; folglich dieser der Sonne näher, als jener. Aus dem Verhältniss des Kernes zum Schweife, welches sich aus diesen Beobachtungen ergeben hat und aus der Breite, welche selten über 8 oder 12 Minuten ging, ergiebt sich klar, dass die Sterne des Kometen meistentheils von derselben scheinbaren Grösse, wie die Planeten, dass ihr Licht nicht selten dem des Saturns gleich sei und es bisweilen übertreffe. Hieraus folgt, dass ihre Abstände im Perihel kaum grösser, als der des Saturns sein werden. In der doppelten Entfernung würde das Licht viermal schwächer sein, und durch seine dunkele blasse Farbe um eben so viel dem Lichte des Saturns nachstehen, als dieses demjenigen des Jupiters, welcher letztere Unterschied leicht bemerkt werden kann. In einer 10fachen Entfernung aber würden ihre Körper den der Sonne übertreffen, ihr Licht hingegen dem des Saturns 100mal nachstehen. In grösseren Entfernungen würden ihre Körper den Körper der Sonne weit übertreffen, sie aber, da sie sich im tiefen Dunkel befänden, nicht mehr gesehen werden. So viel fehlt daran, dass, wenn wir unsere Sonne zu den Fixsternen zählen, die Kometen sich bis zur Mitte zwischen diesen und jener entfernen. Dort würden sie sicher nicht mehr von der Sonne, als wir von den grössten Fixsternen erleuchtet werden.

§. 62. Sie kommen weit unterhalb des Jupiters und bisweilen unterhalb der Erdbahn.

Wir haben dieses Raisonnement angestellt, ohne die Verdunkelung der Kometen durch jenen reichlichen und dicken Rauch, der ihren Kopf umgiebt und durch welchen dieser wie durch eine dichte Wolke hindurchscheint, in Betracht zu ziehen. Je mehr der Körper durch diesen Rauch verdunkelt wird, desto näher muss er nothwendig der Sonne kommen, damit er durch die Menge des von dieser ausstrahlenden Lichtes den Planeten gleich werde. Es ist daher wahrscheinlich, dass die Kometen weit unterhalb des Saturns herabsteigen, wie wir mittelst der Parallaxe erwiesen haben. Dasselbe wird aber auch im höchsten Maasse durch die Schweife bestätigt. Diese entstehen entweder durch Zurückwerfung von dem im Aether verbreiteten Rauche, oder aus dem Lichte des Kopfes. Im ersten Falle muss die Entfernung des Kometen vermindert werden, damit nicht der beständig vom Kopfe ausgehende Rauch sich durch zu weite Räume mit unglaublicher Geschwindigkeit und Expansion verbreite. Im zweiten Falle muss man alles Licht, sowohl des Schweifes, als der Nebelhülle auf den Kern des Kopfes beziehen. Denkt man sich all dieses Licht gesammelt und innerhalb der Scheibe des Kernes vereinigt, so wird der letztere bestimmt, wenn er den grössten

und glänzendsten Schweif verbreitet, den Jupiter weit an Glanz übertreffen. Da er nun bei einem kleinen scheinbaren Durchmesser mehr Licht ausschickt, so wird er weit stärker von der Sonne beleuchtet und muss ihr daher weit näher sein.

So war der Komet von 1679 am 12. und 15. December alten Styls wo er den glänzendsten Schweif verbreitete, dem Lichte nach vielen, durch einen so grossen Raum verbreiteten und ausgedehnten, Jupiterskörpern nicht ungleich; in der Grösse des Kernes stand er hingegen (nach Flamsteed's Beobachtung) dem Jupiter nach, und war daher der Sonne weit näher. Er war selbst kleiner als der Merkur, denn am 17. December, wo er der Erde näher war, erschien er Cassini, welcher ihn durch ein 35füssiges Fernrohr beobachtete, kleiner als die Saturnskugel. Am 8. December Morgens sah Halley einen sehr kurzen breiten Schweif, welcher gleichsam von dem dem Aufgange nahen Sonnenkörper ausging, nach Art einer auf ungewöhnliche Weise glänzenden Wolke, und er verschwand nicht früher, als bis die Sonne über dem Horizont sichtbar wurde. Dieser Glanz übertraf also das Licht der Wolken gegen Sonnenaufgang, und indem er nur dem unmittelbaren Glanze der Sonne nachgab, übertraf er bei Weitem das Licht aller Fixsterne zusammengenommen. Weder der Merkur, noch die Venus, noch selbst der Mond pflegten in solcher Nähe bei der aufgehenden Sonne sichtbar zu sein, Nun stelle man sich vor, dass dieses ausgedehnte Licht gesammelt und in dem Kreis des Kometenkernes, welcher kleiner als der Merkur ist, vereinigt werde. Durch den weit stärkeren Glanz wird er alsdann noch ansehnlicher werden, den Merkur bei Weitem übertreffen und daher der Sonne näher sein. Am 12. und 15. December erschien dieser Schweif, welcher über einen grösseren Raum verbreitet war, lockerer, jedoch mit so starkem Lichte, dass er bereits gesehen wurde, als die Fixsterne kaum sichtbar waren. Hierauf zeigte er sich wie ein Balken, der auf wunderbare Weise glänzte. Aus der Länge von 40 bis 50° und der Breite von 2° kann man die Menge des ganzen Lichtes berechnen.

§. 63. Dasselbe wird durch den ausgezeichneten Glanz der Schweife in der Nähe der Sonne bestätigt.

Eine so grosse Annäherung der Kometen zur Sonne wird durch ihre Lage zu der Zeit, wo sie am meisten glänzen, bestätigt. Wenn nämlich der Kopf durch die Sonne ging und noch in ihren Strahlen verborgen war, sollen die allerglänzendsten Schweife, nach der Art feuriger Balken, vom Horizont ausgegangen sein. Wenn hierauf der Kopf sichtbar wurde und weiter von der Sonne zurückwich, nahm der Glanz beständig ab und ging in eine, der Milchstrasse ähnliche Blässe über, welche jedoch anfänglich weit glänzender war, später aber matter wurde. Von dieser Art war der sehr feuerige Komet, den Aristoteles Buch 1., Meteor. 6. beschreibt. Der Kopf desselben wurde am ersten Tage nicht gesehen, weil er vor der Sonne oder wenigstens in ihren Strahlen untergegangen war; am folgenden Tage konnte er so eben gesehen werden.

Er befand sich nämlich in der möglich kleinsten Entfernung von der Sonne und ging bald unter. Wegen der zu grossen Hitze des Schweifes wurde noch nicht das sich verbreitende Feuer des Kopfes sichtbar, aber mit dem Vorrücken der Zeit (sagt Aristoteles) ward der Schweif weniger brennend und der Kopf des Kometen sichtbar. Er verbreitete seinen Glanz bis zum dritten Theile des Himmels, d. h. bis 60°. Er erschien aber im Winter, stieg bis zum Gürtel des Orion empor und verschwand daselbst.

Zwei Kometen derselben Art beschreibt Justinus im 37. Buch, welche, sagt er, so leuchteten, dass der ganze Himmel zu brennen schien, sie nahmen, ihrem Umfange nach, fast den vierten Theil des Himmels ein und übertrafen die Sonne an Glanz. Diese letzten Worte deuten an, dass die leuchtenden Kometen und die auf- oder untergehende Sonne nahe beisammen waren. Hierzu kommt der Komet von 1101 oder 1106, dessen Stern klein und dunkel war, wie bei dem Kometen von 1680; allein der von ihm ausgehende Glanz war sehr hell und dehnte sich, wie ein grosser Balken, nach Osten und dem Adler hin aus. So erzählt Hevel nach dem Berichte des Mönches Simeon in Dülmen. Er erschien im Anfange des Februars um die Abendzeit und an der Stelle, wo die Sonne am kürzesten Tage untergeht. Hieraus und aus der Lage des Schweifes ersieht man, dass der Kopf der Sonne nahe lag. Von der Sonne, sagt Matthäus in Paris, war er eine Elle weit entfernt, indem er von der 3. oder richtiger 6. Stunde bis zur 9. einen langen Strahl verbreitete. Der Komet von 1264 im Juli oder um das Solstitium ging der aufgehenden Sonne voraus, indem er seine Strahlen mit hellem Lichte bis zur Mitte des Himmels gegen Westen ausbreitete. Anfangs erhob er sich wenig über den Horizont; allein mit dem Fortrücken der Sonne entfernte er sich täglich mehr von ihm, bis es zuletzt vor der Mitte des Himmels vorüberging. Er soll im Anfange gross und hell gewesen sein und eine breite Nebelhülle gehabt haben, welche von Tag zu Tag abzunehmen anfing. Er wird (Append. Matth. Paris, Hist. Angl.) folgendermaassen beschrieben: Im Jahre 1264 erschien ein so merkwürdiger Komet, wie kein damals Lebender früher einen gesehen hatte. Von Osten stieg er mit grossem Glanze empor, und durchzog die ganze Strecke bis zur Mitte des Himmels gegen Westen sehr glanzvoll. Im Jahre 1401 oder 1402, als die Sonne unter den Horizont gesunken war, erschien in Westen ein leuchtender und heller Komet, welcher sein erhobenes Haar nach Art eines flammenden Feuers entfaltete, nicht anders als ein Spiess, der von Westen gegen Osten Strahlen wirft. Von der unter den Horizont gesunkenen Sonne an beleuchtete er mit eigenen, sich ausbreitenden Strahlen den ganzen Erdkreis; er gestattete den

anderen Sternen nicht, ihr Licht zu zeigen, noch der Luft, durch den Schatten der Nacht dunkel zu werden. Sein Licht überstieg nämlich den Glanz der anderen Sterne und schickte zum Scheitel des Himmels Flammen empor, so lange er über dem Horizonte war u. s. w. (Hist. Byzant. Ducae Michelis Nepotis Cap. 16.). Aus der Länge des Schweifes und der Zeit des ersten Erscheinens schliesst man, dass sein Kopf damals nahe bei der Sonne gewesen und täglich von ihr zurückgewichen sei; der Komet blieb nämlich 3 Monate hindurch sichtbar. Im Jahre 1527, am 11. August um 4 Uhr Morgens, zeigte sich in ganz Europa ein Schrecken erregender Komet im Löwen, und blieb jeden Tag während $1^1/_4$ Stunde leuchtend sichtbar. In der Gegend der unter dem Horizont befindlichen Sonne ging er auf, und verbreitete sich ungeheuer weit gegen Süden und Westen. Gegen Norden war er am hellsten, und soll durch seine Wolke (d. h. seinen Schweif) Schrecken erregt haben; im Sinne des Wortes hatte derselbe nämlich die Form eines gekrümmten Armes mit einem ungeheuer grossen Schwerte.

Im Jahre 1618, in den letzten Tagen des Novembers, verbreitete sich die Nachricht, es zeige sich gegen Anfgang der Sonne ein brennender Balken, welcher natürlich ein Kometenschweif war, dessen Kopf durch die hellen Strahlen verborgen wurde. Am 24. November und später zeigte sich der Komet mit hellem Lichte und sehr glänzendem Kopf und Schweif. Der letztere, welcher anfänglich 20 oder 30 Grad lang war, wuchs bis zum 9. December, wo er 75 Grad überschritt; sein Licht war aber nun mehr verdünnt und ausgebreitet, als im Anfange.

Im Jahre 1680, am 5. März neuen Styls um 7 Uhr Abends, sah der Pater Valentinus Estancius in Brasilien einen dem Horizont sehr nahen Kometen an der Stelle, wo die Sonne zur Zeit des Wintersolstitiums untergeht. Derselbe hatte einen kleinen und kaum sichtbaren Kopf, hingegen einen übermässig glänzenden Schweif; so dass Leute, welche am Ufer standen, leicht die vom Meere reflectirte Form desselben sehen konnten. So gross währte sein Glanz aber nur 3 Tage hindurch, wo er plötzlich merklich abnahm. Der Anfangs von Westen gegen Süden gerichtete und dem Horizont parallele Schweif hatte das Ansehen eines glänzenden und 23 Grad langen Balkens. Nachher, als das Licht schwächer wurde, nahm die Grösse zu, bis der Komet aufhörte, sichtbar zu sein. Daher sah auch Cassini ihn, am 10., 11. und 12. März zu Bologna 32 Grad vom Horizont aufsteigend. In Portugal soll er aber $^1/_4$ des Himmels, d. h. 45 Grad eingenommen haben, indem er sich von Westen gegen Osten mit ausgezeichnetem Glanze ausdehnte, jedoch nie ganz sichtbar wurde, indem der Kopf stets unterhalb des Horizontes verborgen blieb. Aus der Zunahme des Schweifes geht hervor, dass der Kopf sich von der Sonne entfernte und ihr anfangs, wo der Schweif am glänzendsten war, ganz nahe stand. Zu allen diesen Kometen füge man

den von 1680, dessen ausgezeichneten Glanz, in der Conjunction seines Kopfes mit der Sonne, ich oben beschrieben habe. Ein so grosser Glanz deutet darauf hin, dass Kometen dieser Art wirklich durch die Quelle des Lichtes hindurchgehen, indem die Schweife nie in der Opposition mit der Sonne leuchten und dort nie feuerige Balken sich gezeigt haben.

§. 64. Aus dem Licht der Köpfe ersieht man, wieviel dasselbe, unter übrigens gleichen Umständen, in der Nähe der Sonne grösser ist.

Dasselbe wird endlich daraus geschlossen, dass das Licht der Köpfe der Kometen zunimmt, wenn diese sich von der Erde gegen die Sonne hin bewegen, dagegen schwächer wird, wenn sie umgekehrt von der Sonne her sich der Erde nähern. So nahm bei dem letzten Kometen von 1665, nach Hevel's Beobachtung, die Bewegung vom Anfang seiner Sichtbarkeit an beständig ab, und er war also bereits bei der Erdnähe vorüber. Der Glanz seines Kopfes hingegen nahm täglich zu, bis der Komet in den Sonnenstrahlen verschwand und so aufhörte, sichtbar zu sein. Der Komet von 1683 bewegte sich ebenfalls, nach Hevel's Beobachtung, Ende Juli, wo man ihn zuerst zu sehen bekam, sehr langsam, indem er täglich nur 40 bis 45 Minuten in seiner Bahn zurücklegte. Von der Zeit an nahm seine tägliche Bewegung beständig zu, bis zum 4. September, wo sie 5 Grad überschritt. Während dieses ganzen Zeitraumes näherte sich also der Komet beständig der Erde, was sich auch aus dem mit dem Mikrometer gemessenen Durchmesser seines Kopfes ergab. Hevel fand nämlich diesen, mit Einschluss der Nebelhülle, am 6. August = 6 Minuten 5 Secunden und am 2. September = 9 Minuten 7 Secunden. Der Kopf war also im Anfange der Bewegung weit kleiner, als am Ende derselben; allein er war im ersteren Falle nahe bei der Sonne viel glänzender, als im letzteren, wie Hevel berichtet. Ferner nahm während dieser ganzen Zeit, wo er sich von der Sonne entfernte, das Licht beständig ab, ohne dass die Annäherung zur Erde diesem entgegenwirkte. Der Komet von 1618, um die Mitte des Decembers, und der von 1680, gegen das Ende des Decembers, bewegten sich sehr schnell, und waren also in der Erdnähe. Der grösste Glanz der Köpfe fand aber ungefähr 2 Wochen früher statt, wo sie kaum aus den Sonnenstrahlen hervorgetreten waren, und der grösste Glanz der Schweife noch etwas früher in grösserer Nähe zur Sonne. Am 12. December wurde der Kopf des letzten Kometen von Flamsteed gesehen und beobachtet in 9° Entfernung von der Sonne, was bei einem Sterne dritter Grösse kaum angegangen sein würde. Am 15. und 17. d. M. erschien er wie ein Stern 3. Grösse, indem er durch den Glanz der Wolken neben der untergehenden Sonne geschwächt wurde. Am 26. December bewegte er sich am schnellsten, und befand sich daher ungefähr in der Erdnähe; er stand aber dem Munde des Pegasus, einem Sterne dritter Grösse, nach. Am 3. Januar glich er einem Sterne 4., am 9. Januar einem 5. Grösse, am 13. Januar verschwand er wegen des Glanzes des zuneh-

menden Mondes und am 25. Jan. war er kaum einem Sterne 7. Grösse gleich. Der Kopf des ersteren Kometen erschien aber, nach den Beobachtungen von Cysatus, am 1. December grösser, als ein Stern erster Grösse und am 16. d. M. (wo er sich in der Erdnähe befand) hatte er wenig an Grösse, aber sehr viel an Glanz und Helligkeit verloren.

Am 7. Januar war Kepler in Betreff des Kopfes in Ungewissheit, und hörte auf, ihn zu beobachten. Nimmt man gleiche Zeiten auf beiden Seiten der Erdnähe an, so würden die Köpfe, wenn sie sich in entfernten Gegenden befänden, vor- und nachher gleich stark leuchtend gewesen sein, weil sie sich in gleichen Abständen von der Erde befanden. Dass sie in dem einen Falle sehr stark leuchteten, in dem anderen aber verschwanden, muss man im ersten Falle der Nähe, im letzteren der Entfernung der Sonne zuschreiben. Aus dem grossen Unterschiede des Lichtes in beiden Fällen schliesst man auf eine bedeutende Nähe der Sonne. Das Licht der Kometen pflegt nämlich regelmässig zu sein und sich am stärksten zu zeigen, wenn die Köpfe sich sehr schnell bewegen und daher in der Erdnähe sind; in so weit dasselbe nicht nahe bei der Sonne grösser ist.

§. 65. Dasselbe wird durch die grosse Menge der Kometen, welche man nahe bei der Sonne gesehen hat, bestätigt.

Hieraus wurde es mir endlich auch klar, warum die Knoten sich so häufig in der Gegend der Sonne befinden. Sähe man sie nämlich weit jenseits des Saturns, so müssten sie sich öfters in den der Sonne entgegengesetzten Theilen des Himmels zeigen, weil sie hier der Erde näher sein und die übrigen durch die dazwischen stehende Sonne verdunkelt werden würden.

Indem ich aber die Geschichte der Kometen durchging, fand ich, dass 4 bis 5 mal so viele in derjenigen Halbkugel, in welcher die Sonne sich befindet, entdeckt wurden, als in der entgegengesetzten; diejenigen ohne Zweifel nicht wenigen ausgeschlossen, welche das Sonnenlicht bedeckt hat. Beim Herabsteigen in unsereGegendengeben sie weder Schweife von sich, noch werden sie hinreichend von der Sonne beleuchtet, um früher mit blossen Augen gesehen zu werden, als bis sie näher als der Jupiter selbst gekommen sind. Ein weit grösserer Theil des, in diesem so kleinen Zwischenraume um die Sonne beschriebenen, Weges liegt aber an der Seite der Erde, welche der Sonne zugewendet ist und in jenem grösseren Theile sind sie der Sonne näher und pflegen stärker erleuchtet zu werden. In Folge der bedeutenden Excentricität ihrer Bahnen sind auch die unteren Apsiden der Sonne weit näher, als wenn sie sich in concentrischen Kreisen um die letztere bewegten.

§. 66. Ferner wird es dadurch bestätigt, dass die Schweife grösser und glänzender nach der Conjunction der Köpfe mit der Sonne sind, als vor derselben.

Hieraus ersehen wir ferner, warum die Schweife der Kometen stets dünn und kurz erscheinen und kaum je 15 bis 20° überschritten

haben, wenn ihre Köpfe sich der Sonne nähern, hingegen oft wie feurige Balken glänzen und sich 40, 50, 60, 70⁰ oder noch weiter der Länge nach erstrecken, wenn die Köpfe von der Sonne zurückkehren. Ein so grosser Glanz und Länge entspringt nämlich aus der Wärme der Sonne, welche die vorübergehenden Kometen erhitzt. Hieraus glaube ich schliessen zu dürfen, dass alle diejenigen Kometen, deren Schweife sehr gross sind, durch die Nachbarschaft der Sonne gegangen seien.

§. 67. Der Schweif entpringt aus der Atmosphäre der Kometen.

Man kann hieraus auch schliessen, dass die Schweife aus den Atmosphären der Kometen entspringen. Man hat aber über die ersteren eine dreifache Meinung aufgestellt. Nach der ersten sollen sie Sonnenstrahlen sein, welche sich durch den durchsichtigen Kopf des Kometen fortpflanzen; nach der zweiten sollen sie durch die Refraction des, vom Kopfe der Kometen zur Erde fortgehenden, Lichtes entstehen; endlich sollen sie nach der dritten Meinung eine Wolke oder ein Dampf sein, welcher beständig aus dem Kopfe des Kometen aufsteigt und sich in die, der Sonne abgewandten, Theile verbreitet.

Die erste Meinung gehört denjenigen an, welche noch nicht in die Wissenschaft der Optik eingeweiht sind. Denn die Sonnenstrahlen werden in einem dunkelen Zimmer nur in so fern gesehen, als sie von den Staub- und Rauchtheilchen, welche sich immer in der Luft befinden, reflectirt werden. Sie sind daher glänzender in derjenigen Luft, welche mit dickerem Rauche angefüllt ist und wirken stärker auf den Sinn, schwächer in heller Luft und kaum merklich; im Himmelsraume endlich, welcher von reflectirender Materie frei ist, kann gar keine Wirkung stattfinden. Man sieht das Licht nicht, in so weit es sich im Sonnenstrahle befindet, sondern nur in so weit, als es in unsere Augen reflectirt wird. Das Sehen erfolgt nämlich nur durch die Strahlen, welche in unser Auge dringen. Es ist daher irgend eine reflectirende Materie in der Gegend des Schweifes erforderlich, und aus diesem Grunde fällt diese Meinung mit der dritten zusammen. Jene reflectirende Materie darf sich nämlich nirgend anders, als in der Gegend des Schweifes befinden, damit nicht der durch das Sonnenlicht beleuchtete ganze Himmel gleichförmig glänze. Der zweiten Meinung stehen viele Schwierigkeiten entgegen. Die Schweife zeigen nie verschiedene Farben, welche doch die unzertrennbaren Begleiter der Brechungen zu sein pflegen. Das Licht der Fixsterne und der Planeten, welches deutlich zu uns kommt, zeigt, dass das im Himmelskörper befindliche Mittel keine brechende Kraft besitzt. Was man nämlich von den Aegyptern erzählt, dass sie bisweilen die Fixsterne mit einer glänzenden Hülle (coma) gesehen haben, muss man, da es sehr selten vorkommt, einer zufälligen Brechung durch Wolken zuschreiben. Auch die Strahlung und das Funkeln der Fixsterne muss man auf die Refraction der Augen und das Zittern der Luft schieben, indem beide verschwinden, wenn man ein Fernrohr anwendet. Durch das Zittern der Luft und der aufsteigenden Dünste wird

nämlich bewirkt, dass die Strahlen leicht von der engen Oeffnung wechselnd abgelenkt werden, was aber nie bei der weiteren Oeffnung des Objectivglases geschieht. Hieraus folgt, dass im ersteren Falle ein Funkeln entsteht, im anderen aber nicht, und der letzte Umstand beweist, dass das Licht sich regelmässig, ohne eine bemerkbare Brechung, durch die Himmelsräume fortpflanzt. Es behaupte Niemand, dass die Schweife an den Kometen nicht gesehen zu werden pflegen, wenn ihr Licht nicht stark genug ist, weil alsdann die secundären Strahlen keine hinreichende Kraft besitzen, um auf die Augen zu wirken, und dass aus diesem Grunde die Schweife der Fixsterne nicht mehr wahrgenommen werden. Man muss nämlich wissen, dass das Licht der Fixsterne mehr als 100mal verstärkt werden kann, und sich dennoch keine Schweife zeigen. Auch das Licht der Planeten ist reichlich da, aber es zeigen sich keine Schweife; dagegen haben die Kometen oft sehr starke, während das Licht ihrer Köpfe schwach und sehr düster ist. So gab der Komet von 1680 im December, wo sein Kopf an Licht kaum Sternen 2. Grösse gleich kam, einen wirklich glänzenden Schweif von sich, welcher 40, 50, 60 und mehr Grade lang war. Später am 27. und 28. Januar zeigte sich der Kopf wie ein Stern 7. Grösse, der Schweif aber war, bei einem sehr dünnen, jedoch hinreichend bemerkbaren Lichte, 6 bis 7° lang und dehnte sich mit einem sehr dunkeln, kaum wahrzunehmenden Lichte 12° weit oder noch etwas weiter aus. Aber auch am 9. und 10. Februar, wo man den Kopf mit blossem Auge nicht mehr sehen konnte, sah ich mittelst des Fernrohres den Schweif 2° lang. Wenn ferner der Schweif aus einer Brechung in der Materie des Himmels entspränge und je nach der Gestalt des Himmels von dem, der Sonne gegenüber liegenden, Punkte abgelenkt würde, so müsste diese Ablenkung in derselben Gegend des Himmels immer nach derselben Seite erfolgen. Nun befand sich aber der Komet von 1680 am 28. December um $8\frac{1}{2}$ Uhr Abends Londoner Zeit, in ♓ 8° 41′ bei 28° 6′ nördlicher Breite, wobei die Sonne in ♑ 18° 26′ stand. Der Komet von 1577 befand sich am 29. Decbr. in ♓ 8° 41′ bei 28° 40′ nördlicher Breite, und es stand die Sonne in ♑ 18° 26′. In beiden Fällen befand sich also die Erde an derselben Stelle und beide Kometen zeigten sich in derselben Himmelsgegend; allein im ersten Falle war der Schweif, nach meinen und Anderer Beobachtungen, um $4\frac{1}{2}$° von dem der Sonne gegenüber liegenden Punkte nach dem Adler hin abgelenkt, wogegen im zweiten Falle, nach Tycho's Beobachtungen, die Ablenkung 21° gegen Süden betrug. Wenn man daher die Refraction im Himmelsraume verwerfen muss, so bleibt nur übrig, die Erscheinung der Schweife nach irgend einer reflectirenden Materie abzuleiten. Dass aber die Dünste, welche zur Ausfüllung so ungeheurer Räume hinreichen, aus den Atmosphären der Kometen entspringen könnten, erklärt man sich leicht folgendermaassen.

§. 68. Die Verdünnung der Luft und der Dünste im Himmels-

raume ist ungeheuer gross, und eine sehr kleine Menge Dunst reicht hin, um die Erscheinungen der Schweife hervorzubringen.

Die Luft nimmt bekanntlich an der Oberfläche der Erde einen 1200mal grösseren Raum ein, als eine Wassermenge von demselben Gewicht; daher ist eine cylindrische 1200 Fuss hohe Luftsänle eben so schwer, als eine Wassersänle von 1 Fuss Höhe nnd derselben Breite. Eine bis zum Ende der Atmosphäre ansteigende Luftsäule kommt aber an Gewicht ungefähr einer 33 Fuss hohen Wassersäule gleich.

Nimmt man daher von der ganzen Luftsäule den unteren 1200 Fuss hohen Theil fort, so wird der übrige, obere Theil an Gewicbt einer 32 Fuss hohen Wassersäule gleich kommen. In einer Höhe von 1200 Fuss oder 2 Stadien ist daher das Gewicht der aufsteigenden Luft kleiner, und die Verdünnung der zusammengedrückten Luft grösser, als an der Oberfläche der Erde, im Verhältniss 33 : 32.

Ist dies bekannt, so kann man nun die Verdünnung der Luft in allen Höhen (mit Hülfe von §. 30., Zusatz des zweiten Buches) nach der Hypothese finden, dass die Ausdehnung des Luft der Zusammendrückung umgekehrt proportional sei. Diese Proportion ist nämlich sowohl durch Hook's, als Anderer Versuche bestätigt worden.

Wir haben in der folgenden Tabelle die Berechnung hinzugefügt, wo die erste Rubrik die Höhe der Luft in Meilen, deren 4000 dem Halbmesser der Erde gleich sind, die zweite die Zusammendrückung der Luft oder das aufsteigende Gewicht, die dritte aber die Verdünnung oder Ausdehnung derselben Luft nnter der Voraussetzung ergiebt, dass die Schwere im doppelten Verhältniss der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde abnehme. Die römischen Zahlen bedeuten hier eine gewisse Anzahl Nullen, dergestalt, dass z. B.

0,XVII 1224 = 0,000000000000000001224,
26956 XV = 26956000000000000000.

	Der Luft	
Höhe.	Zusammendrückung	Ausdehnung.
0	33	1
5	17,8515	1,8486
10	9,6717	3,4151
20	2,852	11,571
40	0,2525	136,83
400	0,XVII 1224	26956 XV
4000	0,CV 4465	73907 CII
40000	0,CXCII 1628	20263 CLXXXIX
400000	0,CCX 7859	41798 CCVII
4000000	0,CCXII 9878	38414 CCIX
∞	0,CCXII 6041	54622 CCIX

Aus dieser Tabelle[357]) ersieht man, dass die Luft beim Fortgange nach oben lockerer wird, so dass eine Kugel von der der Erde nahe liegenden Luft, deren Durchmesser 1 Zoll beträgt, wenn sie sich durch jene Auflockerung ausdehnt, in einer Höhe von einem Halbmesser alle

Räume der Planeten bis zu einer Kugel, deren Halbmesser dem Abstande des Saturns gleich ist und noch weit jenseits ausfüllen würde.[358]) In einer Höhe von 10 Erdhalbmessern würde sie aber einen Raum ausfüllen, der grösser wäre, als der des Himmels diesseits der Fixsterne (nach der obigen Rechnung §. 57.) beträgt. Obgleich nun, wegen der weit dichteren Atmosphäre des Kometen und der grossen solaren Centripetalkraft, die Luft im Himmelsraume und in den Kometenschweifen nicht so stark aufgelockert werden mag; so ergiebt sich doch aus dieser Berechnung, dass ein sehr geringer Theil Luft und Dunst zu allen jenen Erscheinungen der Schweife ausreichen wird. Die grosse Lockerheit der letzteren kann man nämlich auch daraus schliessen, dass die Sterne hindurchscheinen.

§. 69. Auf welche Weise die Schweife aus den Köpfen der Kometen entspringen können.

Das Aufsteigen der Schweife aus den Atmosphären der Köpfe und ihr Fortschreiten nach der, der Sonne abgewendeten, Seite schreibt Kepler der Wirkung der Lichtstrahlen zu, welche die Materie des Schweifes mit sich fortreissen. Dass eine sehr dünne Luft in ganz freiem Raume der Wirkung der Strahlen nachgehen könne, widerspricht der Vernunft durchaus nicht, wobei das nicht entgegensteht, dass in unseren sehr eingeschlossenen Gegenden die dicken Substanzen nicht merklich durch die Strahlen fortgestossen werden können.

Ein anderer Autor ist der Meinung, es könne leichte und schwere Theilchen gehen, die Materie der Schweife bestehe aus der ersteren und steige vermöge ihrer Leichtigkeit von der Sonne auf. Die Schwere der irdischen Körper besteht aber darin, dass die Materie in ihnen unverändert bleibt und weder ausgedehnt, noch zusammengezogen werden kann; daher vermuthe ich, dass jene Aufsteigung aus der Verdünnung der in den Schweifen enthaltenen Materie entspringe. Der Rauch steigt in einem Kamine empor, indem die Luft, auf welcher er schwimmt, ihn antreibt. Jene durch die Wärme verdünnte Luft steigt empor, weil ihr specifisches Gewicht vermindert ist, und reisst den in ihr befindlichen Rauch mit sich fort. Warum sollten nicht die Kometenschweife nach derselben Weise von der Sonne aufsteigen? Die Sonnenstrahlen wirken nämlich auf die Mittel, durch welche sie gehen, nur durch Zurückwerfung und Brechung. Die zurückwerfenden Theilchen werden auf diese Weise erwärmt, und erwärmen selbst wieder die ätherische Luft, in welcher sie sich befinden. Diese wird durch die ihr mitgetheilte Wärme verdünnt, und indem auf diese Weise ihr specifisches Gewicht, vermöge dessen sie vorher nach der Sonne strebte, vermindert wird, steigt sie nach Art des Rauches empor und reisst die zurückwerfenden Theilchen, aus denen der Schweif besteht, mit sich fort. Hierbei wird, wie schon gesagt, das Aufsteigen durch den Stoss des Sonnenlichtes befördert.

§. 70. Dass die Schweife aus diesen Atmosphären hervorgehen, wird durch verschiedene Erscheinungen derselben bestätigt.

Dass ferner die Schweife aus den Köpfen hervorgehen, und in die der Sonne abgewandten Gegenden aufsteigen, wird ausserdem durch die Gesetze, welche sie befolgen, bestätigt. So weichen sie in den Ebenen der Kometenbahnen, welche durch die Sonne gehen, von dem der letzteren gegenüber liegenden Punkte immer nach derjenigen Seite hin ab, welche die in jenen Bahnen fortrückenden Köpfe verlassen. Ferner erscheinen sie einem, in dieser Ebene befindlichen Beschauer direct an der der Sonne gegenüber liegenden Seite; entfernt sich derselbe aber aus diesen Ebenen, so nimmt er allmählig eine Ablenkung des Schweifes wahr, welche täglich zuzunehmen scheint. Ferner ist diese Ablenkung, unter übrigens gleichen Umständen, kleiner, wenn der Schweif stärker gegen die Kometenbahn geneigt ist, wie auch, wenn der Kopf der Sonne näher kommt.

Die nicht abgelenkten Schweife erscheinen geradlinig, die abgelenkten sind gekrümmt. Die Krümmung ist grösser, wenn die Ablenkung es ist und leichter wahrzunehmen, wenn der Schweif unter übrigens gleichen Umständen eine grössere Länge hat; denn bei kurzen Schweifen nimmt man eine Krümmung kaum wahr. Der Ablenkungswinkel ist kleiner in der Nähe des Kometenkopfes, grösser nahe am anderen Ende des Schweifes; daher ist der letztere mit seiner convexen Seite nach der Richtung gewendet, von wo aus die Ablenkung entsteht, und welche auf der, von der Sonne durch den Kometenkopf ins Unendliche gezogenen, Linie liegt. Diejenigen Schweife, welche ausgedehnter und breiter sind und mit einem lebhafteren Lichte glänzen, sind an der convexen Seite etwas glänzender und weniger unbestimmt begrenzt, als an der concaven Seite. Die Erscheinungen hängen daher von der Bewegung des Kopfes, nicht aber von der Himmelsgegend ab, in welcher man diesen erblickt. Sie entstehen nicht durch Strahlenbrechung im Himmelsraum, sondern entspringen aus dem Kopfe, welcher die Materie hergiebt. So wie nämlich in unserer Luft der Rauch eines jeden brennenden Körpers nach oben steigt, und zwar entweder perpendikulär, wenn der Körper ruhet oder in schräger Richtung, wenn dieser sich seitwärts bewegt; so müssen im Himmelsraume, wo die Körper gegen die Sonne gravitiren, Rauch und Dämpfe von der Sonne aufsteigen, wie schon gesagt ist, und entweder geradlinig, wenn der rauchende Körper ruhet, oder in schräger Richtung nach den oberen Theilen streben, wenn der Körper fortschreitend immer den Ort verlässt, von welchem die oberen Theile des Dampfes aufgestiegen waren. Jene Richtung wird weniger schiefgeneigt sein, wo der Dampf schneller aufsteigt, nämlich nahe bei der Sonne und dem dampfenden Körper. Dort ist nämlich die Kraft der Sonne, vermöge welcher der Dampf aufsteigt, stärker. Durch die verschiedene Schiefe wird aber die Dampfsäule gekrümmt, und weil der Dampf an der vorhergehenden Seite der Säule etwas neuer ist, wird er dort auch dichter sein, das Licht deswegen reichlicher reflectiren und weniger unbestimmt begrenzt sein;

während der Dampf an der entgegengesetzten Seite allmählig schwächer wird und nach und nach den Augen entschwindet.

§. 71. Dass die Kometen bisweilen unterhalb der Merkursbahn herabsteigen, wird durch ihre Schweife bewiesen.

Uebrigens haben wir hier nicht vor, die Ursachen der Naturerscheinungen anzugeben; ob aber das eben Gesagte wahr oder falsch sei, dies haben wir wenigstens im Früheren ausgeführt. Dass die Strahlen von den Kometenschweifen aus, längs gerader Linien sich durch die Himmelsräume fortpflanzen und so von den Theilen des Himmels herkommen, in denen die Schweife sich dem Beschauer, wo dieser sich auch befinden möge, zeigen, und dass diese von den Köpfen aus nach den, der Sonne abgewandten, Seiten aufsteigen, haben wir gezeigt. Hierauf fussend, setzen wir den Abständen der Kometen auf's Neue folgendermaassen eine Grenze:

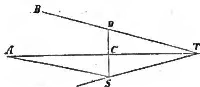


Fig. 220.

Es sei S die Sonne, T die Erde, STA der Winkelabstand des Kometen von der Sonne und ATB die scheinbare Länge des Schweifes. Da sich das Licht vom Ende des letzteren längs der geraden Linie TB fortpflanzt, so wird sich jenes Ende irgendwo auf dieser Linie befinden. Es sei D dieser Punkt, man ziehe DS, welche die Linie TA in C schneidet. Da der Schweif immer sehr nahe der Sonne gegenüber liegt, und daher diese, der Kometenkopf und das Ende des Schweifes in gerader Linie liegen, so befindet sich der Kometenkopf in C. Man ziehe SA ∦ TB, wodurch TA in A geschnitten wird; alsdann wird der Kopf des Kometen sich nothwendig zwischen T und A befinden. Das Endo des Schweifes liegt nämlich irgendwo auf der unbegrenzten Linie TB und alle Linien SD, welche von S nach TB gezogen werden können, schneiden die Linie TA irgendwo zwischen T und A. Ein Komet kann daher nicht weiter von der Erde entfernt sein, als um TA, und nicht weiter von der Sonne, als die Länge der Linie SA jenseits oder ST diesseits beträgt. Z. B. Am 12. Dec. 1680 stand der Komet um 9^0 von der Sonne ab und sein Schweif war mindestens 35^0 lang. Man construire nun das Dreieck TSA so, dass $\angle$ ATS $= 9^0$, $\angle$ SAT $=$ ATB $= 35^0$ wird; alsdann verhält sich die grösstmögliche Entfernung des Kometen von der Sonne zum Halbmesser der grossen Bahn, d. h. SA : ST $= \sin 9^0 : \sin 35^0$ nahe $= 3:11$.

Der Komet war daher damals um weniger als $^3/_{11}$ des Abstandes der Erde von der Sonne entfernt und er befand sich entweder innerhalb der Merkursbahn[359]) oder zwischen dieser und der Erde.

Ferner war am 21. December der Abstand des Kometen von der Sonne $= 32^0,4$ und die Länge des Schweifes $= 70^0$; daher verhielt

sich die Grenze des Abstandes des Kometen von der Sonne zur Entfernnng der Erde von ihr, wie sin 32°,4 : sin 70° = 4 : 7.

Der Komet war also noch nicht ans der Venusbahn herausgetreten.[360]) Am 28. December war der Winkelabstand des Kometen von der Sonne = 55° nnd die scheinbare Länge des Schweifes = 56°. Die Grenze der Entfernung des Kometen von der Sonne verhielt sich daher zum Abstande der Erde von der letzteren, win sin 55° : sin 56°; der Komet befand sich also noch innerhalb der Erdbahn. Ans der Parallaxe schliesst man aber, dass der Komet ungefähr am 5. Januar ans der letzteren heraustrat, und dass er weit unterhalb der Merkursbahn herabgestiegen war. Nehmen wir nnn an, er sei am 8. December, wo er sich mit der Sonne in Conjnnction befand, im Perihel gewesen; so hat er znr Zurücklegung des Weges vom Perihel bis zum Heranstritt aus der Erdbahn 28 Tage gebraucht nnd in den folgenden 26 oder 27 Tagen, wo er mit nnbewaffnetem Ange noch sichtbar war, seine Entfernnng von der Sonne kaum verdoppelt. Wenn man anf dieselbe Weise die Grenzen der Entfernnng anderer Kometen bestimmt, so kommt man endlich zu dem Schlnss, dass alle Kometen, so lange sie uns sichtbar sind, sich innerhalb eines kngelförmigen Raumes befinden, dessen Mittelpnnkt die Sonne und dessen Radius der einfachen, zwei- oder höchstens dreifachen Entfernung der Erde von der Sonne gleich ist.

§. 72. Die Kometen bewegen sich in Kegelschnitten, deren Brennpunkt im Mittelpnnkte der Sonne liegt und beschreiben mit den nach diesem gezogenen Radien der Zeit proportionale Flächen.

Die Kometen befinden sich daher während der ganzen Zeit ihrer Sichtbarkeit innerhalb der Thätigkeitssphäre der Sonnenkraft; sie werden folglich dnrch dieselbe angezogen nnd beschreiben anf diese Weise (nach §. 33., Zusatz 1. des ersten Bnches) Kegelschnitte, deren Brennpunkte im Mittelpunkte der Sonne liegen nnd ihre nach der Sonne gezogenen Radien beschreiben Flächen, welche den Zeiten proportional sind. Denn jene Kraft erstreckt sich nngeheuer weit und leitet die Bewegnng der Körper weit jenseits des Saturns.

§. 73. Jene Kegelschnitte sind mit Parabeln nahe verwandt. Man schliesst dies ans der Geschwindigkeit der Kometen.

Man hat eine dreifache Hypothese über die Kometen angestellt. Nach der ersten entstehen sie und werden vernichtet, so oft sie erscheinen nnd verschwinden; nach der zweiten kommen sie aus der Gegend der Fixsterne und gehen bei unserem Planetensystem vorüber; nach der dritten Hypothese endlich laufen sie beständig, in sehr excentrischen Bahnen, nm die Sonne. Im ersten Falle werden sie sich, nach der Verschiedenheit ihrer Geschwindigkeit, in beliebigen Kegelschnitten bewegen; im zweiten Falle werden sie sich in Hyperbeln nnd in diesen beiden Fällen ohne Unterschied in den Gegenden der Pole nnd der Ekliptik befinden. Im dritten Falle erfolgt die Bewegung in sehr excentrischen Ellipsen, welche Parabeln sehr nahe kommen; ihre Bahnen aber

werden, wenn das Gesetz der Planeten beibehalten wird, nicht weit von der Ebene der Ekliptik abweichen. So weit ich bis jetzt habe wahrnehmen können, findet der dritte Fall statt. Die Kometen befinden sich nämlich meistens im Zodiacus und erreichen kaum jemals eine heliocentrische Breite von 40^0[361]) Sie bewegen sich ferner in sehr nahe parabolischen Bahnen, wie ich aus ihrer Geschwindigkeit schliesse. Die letztere verhält sich nämlich, wenn eine Parabel beschrieben wird, überall zu derjenigen Geschwindigkeit, mit welcher ein Komet oder Planet sich in einem Kreise, dessen Halbmesser seiner Entfernung von der Sonne gleich ist, bewegen könnte, wie $\sqrt{2}:1$ (nach §. 36., Zusatz 7. des ersten Buches). Nach meiner Rechnung fand sich nun nahe eine solche Geschwindigkeit der Kometen. Ich untersuchte die Sache, indem ich beiläufig die Geschwindigkeiten aus den Entfernungen und diese aus der Parallaxe und den Erscheinungen des Schweifes zusammengenommen, ableitete. Die Fehler, um welche die Geschwindigkeit grösser oder kleiner wurde, waren nicht bedeutender, als sie aus den Entfernungen, welche auf jene Weise bestimmt worden waren, hervorgehen konnten. Ich bediente mich aber auch der folgenden Berechnung.

§. 74. In welcher Zeit die in Parabeln sich bewegenden Kometen die grosse Bahn durchlaufen werden.

Theilt man den Radius der grossen Bahn in 1000 Theile, so mögen die Zahlen in der 1. Columne der folgenden Tabelle den Abstand des Scheitels der Parabel vom Mittelpunkte der Sonne, in solchen Theilen ausgedrückt, bezeichnen. Alsdann wird der Komet sich in den Zeiten, welche in der zweiten Columne stehen, vom Perihel zur Oberfläche einer Kugel bewegen, deren Mittelpunkt in der Sonne liegt und deren Radius dem der grossen Bahn gleich ist. In den Zeiten, welche in der 3., 4. und 5. Columne angegeben sind, wird er jenen Abstand von der Sonne verdoppeln, verdrei- oder vervierfachen.

Tabelle I.

Abstand zwischen dem Mittelpunkt der Sonne und dem Perihel des Kometen.	Zeit, welche der Komet braucht, um von einem Perihel zu einem, dem Radius der grossen Bahn gleichen Abstande von der Sonne zu gelangen.			
1.	2.	3.	4.	5.
	d h m	d h m	d h m	d h m
0	27 11 12	77 16 28	142 17 14	219 17 30
5	27 16 7	77 23 14		
10	27 21 0	78 6 24		
20	28 6 40	78 20 13	144 3 19	221 8 54
40	29 1 32	79 23 34		
80	30 13 25	82 4 56		
160	33 5 29	86 10 26	153 16 8	232 12 20
320	37 13 46	93 23 38		
640	37 9 49	105 1 28		
1280		106 6 35	200 6 43	297 3 46
2560			147 22 31	300 6 3

In welcher Zeit die Kometen in die Sphäre der grossen Bahn ein-

oder aus ihr heraustreten, ergiebt sich beiläufig aus der Parallaxe, kürzer aber aus der folgenden Tabelle:

Tabelle II.

Scheinbarer Abstand des Kometen von der Sonne.	Scheinbare tägliche Bewegung des Kometen in seiner Bahn. rechtläufige.		Scheinbare tägliche Bewegung des Kometen in seiner Bahn. rückläufige.		Abstand des Kometen von der Sonne in Theilen, deren 1000 gleich dem Radius der grossen Bahn.
60°	2°	18'	0°	20'	1000
65	2	33	0	35	845
70	2	55	0	57	684
72	3	7	1	9	618
74	3	23	1	25	551
76	3	43	1	45	484
78	4	10	2	12	416
80	4	47	2	49	347
82	5	45	3	47	278
84	7	18	5	20	209
86	10	27	8	19	140
88	18	37	16	39	70
90	∞		∞		0

§. 75. Mit welcher Geschwindigkeit die Kometen von 1680 die grosse Bahn durchwandert sind.

Es trifft der Ein- oder Austritt auf die Zeit des Abstandes des Kometen von der Sonne in der ersten Columne, welche von Seiten der täglichen Bewegung her bestimmt wird. So war am 4. Januar 1681 alten Styls die scheinbare tägliche Bewegung des Kometen in seiner Bahn etwa 3° 5', welcher der Abstand $71^2/_3{}^0$ entspricht. Diesen erlangte der Komet am 4. Januar um 6 Uhr Morgens. Ferner hatte der Komet, welcher am 11. November sichtbar war, die tägliche scheinbare Bewegung von $4^2/_3{}^0$, welcher der Abstand $79^2/_3{}^0$ (79° 37') entspricht und dieser fand am 10. November kurz vor Mitternacht statt. Um diese Zeiten gelangten die Kometen zu dem Abstande, in welchem sich die Erde von der Sonne befand und die Erde war fast schon im Perihel. Die Tabelle I. ist aber für den mittleren Abstand = 1000 der Erde von der Sonne berechnet und der wirkliche Abstand ist um so viel grösser, als die Erde in Zeit von 1 Tage bei ihrer jährlichen Bewegung, der Komet aber in 16 h mit seiner Bewegung zurücklegen kann.

Damit der Komet auf diesen mittleren Abstand von 1000 Theilen reducirt werde, addire man zur ersten und subtrahire von der zweiten Zeit 16 h; alsdann wird jene Jan. 4. 10 Uhr Abends und diese Nov. 10. 6 Uhr (8 Uhr) Morgens.[362])

Aus dem Werthe und Fortgange der täglichen Bewegung schliesst man, dass beide Kometen am 7. und 9. December mit der Sonne in Conjunction waren. Von da bis zum Januar 4. 10 h einer- und bis zum 10. November 6 Uhr Morgens andererseits sind etwa 28 Tage.[363])

So viel Tage mussten sie (nach Tabelle I.) in den parabolischen Bahnen verwenden.

§. 76. Diese Kometen waren nicht zwei, sondern machten nur Einen aus, und es wird genauer dargethan, in welcher Bahn und mit welcher Geschwindigkeit er durch den Himmel gewandert ist.

Uebrigens wird es durch das Zusammenfallen der Perihele und die Uebereinstimmung der Geschwindigkeiten wahrscheinlich, dass diese Kometen, welche ich als zwei betrachtet habe, nicht zwei, sondern nur Ein und derselbe Komet waren. Dem Gesetze nach wird die Bahn desselben eine Parabel, oder ein nur wenig von der Parabel abweichender Kegelschnitt sein, und in ihrem Scheitelpuncte nahe die Oberfläche der Sonne berühren. Aus Tabelle II. ergiebt sich nämlich der Abstand des Kometen von der Erde am 10. November = 360[364]), am 4. Januar eben so gross. Hieraus und aus seinen Längen und Breiten schliesst man, dass der gegenseitige Abstand der Oerter, in denen er sich damals befand, ungefähr = 280 war.

Die Hälfte hiervon = 140 ist eine Ordinate der Kometenbahn, welche von der Axe einen, dem Radius der grossen Bahn oder 1000 ungefähr gleichen Theil abschneidet. Dividirt man das Quadrat der Ordinate 140 durch die Abscisse 1000, so findet man den Parameter = 19,6, oder in runder Zahl 20, deren vierter Theil = 5 der Abstand des Scheitels vom Mittelpunkte der Sonne ist. Dem Abstande 5 entspricht in Tab. I. die Zeit $27^d\ 16^h\ 7^m$. In dieser Zeit wird also der Komet in der parabolischen Bahn den Weg von seinem Perihel bis zu der, mit dem Radius der grossen Bahn beschriebenen, Kugel zurücklegen und die doppelte Zeit, oder $55^d\ 8\frac{1}{4}{}^h$ wird zu seiner ganzen Bewegung innerhalb der grossen Bahn erfordert. So verhält sich die Sache wirklich.[365]) Vom 10. November 6 Uhr Morgens, wo der Komet in diese Bahn eintrat, bis zum 4. Januar 10 Uhr Abends, wo er heraustrat, sind $55^d\ 16^h$; der Unterschied von $7\frac{3}{4}{}^h$ ist bei dieser rohen Rechnung zu vernachlässigen und kann vielleicht aus der, in der Ellipse etwas langsamer erfolgten, Bewegung entspringen. Zwischen dem Ein- und Austritt fällt die Mitte auf den 8. December 2 Uhr Morgens. Um diese Zeit also musste sich der Komet im Perihel befinden. Wirklich sah Halley an eben diesem Tage, kurz vor Sonnenaufgang, einen sehr kurzen, breiten und höchst glänzenden Schweif, welcher perpendikulär vom Horizont emporstieg, wie wir bereits gesagt haben. Aus der Lage dieses Schweifes schliesst man, dass der Komet bereits durch die Ekliptik gegangen war und nördliche Breite hatte; er war also bereits bei seinem Perihel, welches auf der anderen Seite der Ekliptik lag, vorüber, hatte jedoch noch nicht den Meridian der Sonne erreicht. Der damals zwischen dem Perihel und der Conjunction mit der Sonne befindliche Komet war also wenige Stunden vorher in dem ersteren gewesen. So nahe bei der Sonne musste er sich nämlich sehr schnell bewegen, und in einzelnen Stunden scheinbar fast halbe Grade zurücklegen.

§. 77. Durch mehrere Beispiele wird gezeigt, mit welcher Geschwindigkeit die Kometen sich bewegen.

Aus ähnlichen Berechnungen schliesse ich, dass der Komet von 1618 am 7. December gegen Sonnenuntergang in die sphärische Grenze der grossen Bahn getreten sei. Seine Conjunction mit der Sonne traf etwa auf den 9. oder 10. November; es liegen daher zwischen beiden etwa 28 Tage, wie bei dem vorhergehenden Kometen. Auch aus der Grösse des Schweifes, welche der des vorhergehenden gleich war, folgt mit Wahrscheinlichkeit, dass er den Sonnenkörper nabei berührt habe. Es glänzten in diesem Jahre 4 Kometen, von denen dieser der letzte war. Der zweite, welcher sich zuerst am 31. October nahe bei der aufgehenden Sonne zeigte und bald darauf in ihren Strahlen verschwand, war nach meiner Vermuthung derselbe, welcher um den 9. November aus den Sonnenstrahlen hervortrat. Der Komet von 1607 trat am 14. September alten Styls in die Sphäre der grossen Bahn, und gelangte am 19. October in sein Perihel, so dass zwischen beiden ein Zeitraum von 35 Tagen lag. Jener kleinste Abstand unterspannte an der Erde einen Winkel von etwa 23° und war daher beiläufig 390 Theile gross. So vielen Theilen entsprechen aber in Tabelle I. etwa 34 d.[366]) Ferner trat der Komet von 1665 am 17. März in die Sphäre der jährlichen Bahn und am 16. April in sein Perihel; die Zwischenzeit betrug also 30 Tage. Der Abstand zwischen dem Perihel und der Sonne unterspannte einen Winkel von etwa 7° an der Erde und war daher 122 Theile gross. Dem letzteren entsprechen aber in Tabelle I. 30 Tage.[367]) Wiederum trat der Komet von 1682 am den 11. August in die Sphäre der grossen Bahn, und befand sich um den 16. September in seinem Perihel, wo sein Abstand von der Sonne etwa 350 Theile gross war. Diesen entsprechen in Tabelle I. $33^1/_3$ Tage.[368])

Auch jener berühmte Komet von Regiomontanus, welcher im Jahre 1472 durch die Gegend des Nordpols ging und täglich 40° zurücklegte, betrat die Grenze der grossen Bahn am 21. Januar, wo er am Pole vorüber ging und indem er von da vorwärts eilte, verbarg er sich Ende Februar in den Sonnenstrahlen. Es ist daher wahrscheinlich, dass 30 oder mehr Tage zwischen jenem Eintritt und dem Perihel des Kometen verflossen sind, und dass der letztere sich in der Wirklichkeit nicht geschwinder als andere Kometen bewegte. Die so grosse scheinbare Geschwindigkeit hat er aber wohl nur dadurch erlangt, dass er so nahe bei der Erde vorüberging.

§. 78. Es wird die Aufgabe vorgelegt, die Bahn der Kometen zu bestimmen.

Die Geschwindigkeit der Kometen, so weit sie durch derartige genäherte Rechnung bestimmt werden kann, ist diejenige, mit welcher Parabeln oder diesen nahe kommende Ellipsen beschrieben werden müssen, und dieselbe wird daher durch die gegebene Entfernung zwischen den

Kometen und der Sonne selbst, sehr nahe gegeben. Hieraus entspringt folgende

Aufgabe.

Gegeben ist das Verhältniss zwischen der Geschwindigkeit des Kometen und seinem Abstande von der Sonne; man sucht seine Bahn.

Wenn diese Aufgabe gelöst ist, so erhält man endlich eine Methode, nach welcher man die Bahnen der Kometen auf's Genaueste bestimmen kann. Wird nämlich jenes Verhältniss zweimal angenommen und darans jedesmal die Bahn bestimmt; wird hierauf aus den Beobachtungen der Fehler beider so gefundenen Bahnen gesucht, so kann die Annahme nach der regula falsi verbessert und so eine dritte Bahn gefunden werden, welche genau mit den Beobachtungen übereinstimmt. Bestimmt man nun nach dieser Methode die Bahnen der Kometen, so kann man endlich genauer erfahren, welche Gegenden diese Körper durchwandern, wie gross ihre Geschwindigkeit, von welcher Natur die durch sie beschriebenen Bahnen sind und welche wahre Grösse und Gestalt die Schweife, nach den verschiedenen Entfernungen der Köpfe von der Sonne haben. Man darf selbst auch hoffen, dass man nach dieser Methode erfahren könne, ob die Kometen zu bestimmten Zeiten in ihre Bahnen zurückkehren und in welchen periodischen Zeiten sie ihren Umlauf vollenden. Die Aufgabe wird aber gelöst, indem man zuerst aus 3 oder mehreren Beobachtungen die stündliche Bewegung zu einer gegebenen Zeit ableitet und hierauf durch diese Bewegung die Bahn bestimmt. So ist die Auffindung der Bahn von einer einzigen Beobachtung und der stündlichen Bewegung zur Zeit derselben abhängig, und wird daher sich selbst entweder bestätigen oder widerlegen; denn der Schluss, welchen man aus der Bewegung zu der einen oder anderen Stunde und einer falschen Hypothese zieht, wird nie mit den Bewegungen des Kometen von Anfang bis zu Ende übereinstimmen. Die Methode der ganzen Berechnung geschieht folgendermaassen:

Lehnsatz I. Es sind die zwei Linien OR und TP gegeben; man soll beide durch eine dritte PR so unter dem rechten Winkel TRP schneiden, dass, wenn man von dem gegebenen Punkte S die Linie SP zieht und der Punkt O ebenfalls gegeben ist, das Produkt $SP \cdot OR^2$ einem gegebenen Werthe gleich werde.

Fig. 221.

Auflösung. 1. Graphisch. Jener gegebene Werth des Produktes sei: $M^2 \cdot N$.

Im beliebigen Punkte r der geraden Linie OR errichte man ein Perpendikel rp, welches TP in p schneidet. Durch S und P ziehe man die Linie $Sq = \frac{M^2 \cdot N}{OR^2}$.

Auf ähnliche Weise ziehe man drei oder mehrere gerade Linien Sq'' Sq''', etc., und durch alle so erhaltenen Punkte q, q'', q''', etc. die reguläre Curve qq'' q''', welche die gerade Linie TP in dem gesuchten Punkte P schneiden wird. Von diesem fälle man das Perpendikel PR.

2. Trigonometrisch. Man nehme die eben gefundene Linie TP an, alsdann werden dadurch in den Dreiecken TPR und TPS die Perpendikel TR und BS gegeben und im Dreieck SBP die Seite SP und der Unterschied $\frac{M^2 . N}{OR^2} - SP = D$ bekannt werden.

Nun bewirke man, dass D sich zu einem neuen Unterschiede E verhalte, wie p'' q'' ± p'' q''' : p'' p''', oder wie p'' q'' ± D : p'' P.

Addirt oder subtrahirt man diesen neuen Unterschied zu oder von TP, so erhält man die verbesserte Länge TP ± E.

Die Wahl der Zeichen + oder — hängt von der Zeichnung ab.

Sollte eine weitere Verbesserung nöthig sein, so wiederhole man die Operation.

3. Arithmetisch. Die vorhergehende graphische Operation sei ausgeführt, und es werde die so gefundene Länge von TP = TP + e gesetzt. Alsdann erhält man folgende verbesserte Werthe für die Linien OR, BP und SP, nämlich für OR, $OR - \frac{TR}{TP}e$, für BP, $BP + e$, für SP, $\sqrt{SP^2 + 2BP . e + e^2} = \frac{M^2 . N}{OR^2 - 2\frac{OR . TR}{TP}e + \frac{TR^2}{TP^2}e^2}$.

Hieraus folgt nach der Methode der convergirenden Reihen

$$1.\quad SP + \frac{BP}{SP}e + \frac{SB^2}{2SP^3}e^2 \text{ etc.} = \frac{M^2N}{OR^2} + 2\frac{TR}{TP}\cdot\frac{M^2N}{OR^3}e + 3\cdot\frac{TR^2}{TP^2}\cdot\frac{M^2N}{OR^4}e^2 \text{ etc.}$$ [369])

Nun setze man die gegebenen Werthe

$$2.\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{M^2 . N}{OR^2} - SP = F, \\ &2.\ \frac{TR}{TP}\cdot\frac{M^2 . N}{OR^3} - \frac{BP}{SP} = \frac{T}{G}, \\ &3.\ \frac{TR^2}{TP^2}\cdot\frac{M^2N}{OR^4} - \frac{SB^2}{2SP^3} = \frac{F}{G . H}; \end{aligned}\right.$$

alsdann wird, wenn man die Zeichen gehörig berücksichtigt, nach Gl. 1.

$F + \frac{F}{G}e + \frac{F}{GH}e^2 = 0$, oder

$$3.\quad e + \frac{e^2}{H} = - G.$$

Vernachlässigt man das sehr kleine Glied $\frac{e^2}{H}$, so wird

$$4.\quad e = - G;$$

ist jenes Glied nicht zu vernachlässigen, so setze man in demselben

statt e den Näherungswerth — G (nach Gl. 4.), und es wird dann (nach Gl. 3.)

$$5.\quad e = -G - \frac{G^2}{H}.$$

Man bemerke, dass hierdurch eine allgemeine Methode angedeutet wird, nach welcher man schwierige Aufgaben, sowohl trigonometrisch, als auch arithmetisch auflösen kann, ohne jene verwickelten Rechnungen und Auflösungen der Bedingungsgleichungen, deren man sich bisher zu bedienen pflegte.

Lehnsatz II. Es sind drei gerade Linien, und auf einer derselben ein Punkt gegeben; man soll durch diesen eine vierte Linie ziehen, deren durch jene drei begrenzten Stücke ein gegebenes Verhältniss zu einander haben.

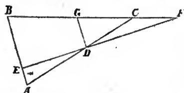


Fig. 222.

Ihrer Lage nach sind die drei Linien AB, AC, BC und auf AC der Punkt D gegeben. Man ziehe DG ⵑ AB, bis erstere BC in G schneidet. Nimmt man nun GF : BG in dem gegebenen Verhältniss und zieht man FDE, so wird FD : DE = FG : BG.

Trigonometrisch. Im Dreieck CGD sind die Winkel und die Seite CD gegeben; daraus findet man die übrigen Seiten und aus dem gegebenen Verhältniss die Linien GF und BE.

Lehnsatz III. Für eine gegebene Zeit soll man die stündliche Bewegung eines Kometen finden und graphisch darstellen.

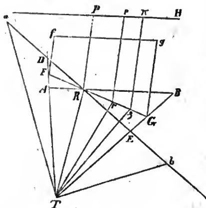


Fig. 223.

Aus Beobachtungen, welche vollkommenes Vertrauen verdienen, seien drei Längen des Kometen gegeben. Es seien ATR und RTB die Unterschiede derselben; man sucht die stündliche Bewegung zur Zeit der zwischenliegenden Beobachtung TR. Man ziehe (nach Lehnsatz II.) die gerade Linie ARB, deren abgeschnittene Theile AR und RB sich wie die Zwischenzeiten der Beobachtungen verhalten. Wenn nun ein Körper in der ganzen Zeit die ganze Linie AB gleichförmig durchliefe und inzwischen vom Orte T aus gesehen würde, so würde seine scheinbare Bewegung in der Nähe des Punktes R sehr nahe derjenigen entsprechen, welche der Komet zur Zeit der Beobachtung TR hatte.

Genauere Bestimmung. Es seien auf beiden Seiten die weiter entfernten Längen Ta und Tb gegeben, und man ziehe (nach Lehnsatz II.) die Linie aRb, deren Theile aR und Rb sich wie die Zwischenzeiten der Beobachtungen aTR und RTb verhalten. Dieselbe schneide die Linien TA und TB in D und E; da nun der Fehler der Neigung TRa ungefähr im doppelten Verhältniss der Zeit zwischen den Beobachtungen zunimmt, so ziehe man FRG so, dass entweder der Winkel DRF zu FRA oder DF zu FA im doppelten Verhältniss der ganzen Zeit zwischen den Beobachtungen Ta und Tb der ganzen Zwischenzeit der Beobachtungen TA und TR stehe, und nehme nun statt der oben gefundenen Linie AB die jetzt gefundene FRG an.

Es ist zweckmässig, die Winkel ATR, RTB, aTA und RTb nicht kleiner als 10 bis 15^0, und die ihnen entsprechenden Zeiten nicht grösser als 8 bis 12 Tage anzunehmen und die Längen dann zu bestimmen, wenn der Komet sich am geschwindesten bewegt. Auf diese Weise werden die Beobachtungsfehler ein kleineres Verhältniss zu den Unterschieden der Längen haben.

Lehnsatz IV. Die Längen der Kometen für gegebene Zeiten zu finden.

Dies geschicht, indem man auf FG die Abstände Rr und Rϱ den Zeiten proportional annimmt und die Linie Tr und Tϱ zieht.

Die trigonometrische Operation ist von selbst klar.

Lehnsatz V. Die Breiten zu finden.

Auf die Radien TF, TR, TG errichte man senkrecht die Tangenten Tf, RP, Gg der beobachteten Breiten und ziehe PH $\#$ fg.

Die PH schneidenden Perpendikel rp, $\varrho\pi$ werden alsdann die Tangenten der gesuchten Breiten für die Radien Tr, Tϱ sein.

Aufgabe I. Aus dem angenommenen Verhältniss der Geschwindigkeit des Kometen soll man seine Bahn herleiten.

Es bezeichne S die Sonne; t, T, τ seien gleich weit von einander entfernte Oerter der Erde in ihrer Bahn; p, P, π eben so viele jenen entsprechende Oerter des Kometen in seiner Bahn und ihre Zwischenzeit betrage jedesmal 1 Stunde; pr, PR, $\pi\varrho$ die auf die Ekliptik gefällten Perpendikel und rRϱ die Projection der Bahn auf dieselbe Ebene.

Man ziehe Sp, SP, Sπ, ST, SR, TR, tr, $\tau\varrho$, TP, und es mögen tr und $\tau\varrho$ einander in O schneiden. Alsdann wird TR sehr nahe nach demselben Punkte gerichtet sein und der etwaige Fehler wenigtens vernachlässigt werden können. Durch die vorhergehenden Lehnsätze werdie Winkel rOR, ROϱ, und die Verhältnisse pr : tr, PR : TR, $\pi\varrho : \tau\varrho$ gegeben. Man kennt daher die Figur tTτO der Grösse und Lage nach, wie auch den Abstand TS und die Winkel STR, PTR und STP. Setzen wir nun voraus, dass die Geschwindigkeit des Kometen sich zu der Geschwindigkeit eines, in einem Kreise zum Halbmesser SP sich um die Sonne bewegenden Planeten verhalte, wie v : 1. Alsdann ist die Linie pPπ so zu bestimmen, dass der vom Kometen in einem Zeitraume von

Fig. 224.

2 Stunden beschriebene Weg $p\pi$ sich zum Wege $v \cdot tr$ (d. h. zu dem Wege, welcher die Erde in derselben Zeit beschreiben würde, multiplicirt durch die Zahl v), wie $\sqrt{ST} : \sqrt{SP}$ verhalte; ferner dass der in der ersten Stunde vom Kometen beschriebene Weg pP, sich zu dem in der zweiten Stunde beschriebenen Wege $P\pi$ verhalte, wie die Geschwindigkeit in p zu der in P stattfindenden, d. h. wie $\sqrt{SP} : \sqrt{Sp}$, oder wie $2SP : SP + Sp$.[370])

Kleinigkeiten vernachlässige ich nämlich in dieser ganzen Operation, so weit dieselben keine bemerkbaren Fehler hervorbringen. Zunächst erlange ich, wie bei Auflösung der Bestimmungsgleichungen die Mathematiker zuerst durch Muthmassung auf die Wurzel schliessen, eben so in dieser analytischen Operation, den gesuchten Abstand TR so weit ich es vermag, und ziehe hierauf (nach Lehnsatz II.) die Curve $r\varrho$ so, dass zuerst $rR = R\varrho$; darauf (wenn das Verhältniss $SP : Sp$ bekannt geworden ist) so, dass $rR : R\varrho = 2SP : SP + Sp$ werde und erhalte so das gegenseitige Verhältniss der Linien $p\pi$, $r\varrho$ und OR.

Gesetzt, es sei $M : v \cdot tr = OR : p\pi$, so wird, weil $p\pi^2 : (v \cdot tr^2) = ST : SP$ auch $OR^2 : M^2 = ST : SP$, oder $OR^2 \cdot SP = M^2 \cdot ST =$ Constans.

Denkt man sich daher nun die Dreiecke STP, PTR in derselben Ebene, so erhält man (nach Lehnsatz I.) TR, TP, SP und PR.

Alles dieses führe ich zuerst graphisch, und zwar geschwind und roh durch, hierauf graphisch und mit grösster Sorgfalt, zuletzt aber mittelst numerischer Rechnung. Nun bestimme ich auf's Neue die Lage der Linien $r\varrho$ und $p\pi$ sehr genau und zugleich die Knoten und Neigung der Ebene $Sp\pi$ gegen die Ebene der Ekliptik. In der ersten construire ich (nach §. 36. des ersten Buches) die Bahn, in welcher der Körper sich bewegt, der vom gegebenen Orte P aus längs der geraden Linie $p\pi$ und mit einer Geschwindigkeit ausgeht, welche sich zur Geschwindigkeit der Erde verhält, wie $p\pi : v \cdot tr$.

Aufgabe II. Das angenommene Verhältniss der Geschwindigkeit und die dadurch gefundene Bahn zu verbessern.

Man nehme eine Beobachtung des Kometen, welche dem Ende der Bewegung des letzteren nahe liegt und von den vorher angewandten Beobachtungen weit entfernt ist, und suche den Durchschnitt des, nach

jenem Orte des Kometen gezogenen, Radius mit der Ebene Spπ, wie auch den Ort des Kometen in seiner Bahn zu eben derselben Zeit. Fällt jener Durchschnitt auf diesen Ort, so ist dies ein Beweis, dass die Bahn richtig bestimmt worden ist. Findet dieses nicht statt, so hat man eine neue Zahl anzunehmen und eine neue Bahn zu bestimmen. Hierauf sucht man den Ort des Kometen in der letzteren für die Zeit jener angenommenen Beobachtung und wie vorhin den Durchschnitt des Radius mit der Ebene der Bahn. Aus der Aenderung des Fehlers, verglichen mit der Aenderung der anderen Grössen, schliesse man nach der goldenen Regel wie gross die Aenderungen und Verbesserungen der letzten Grössen sein müssen, damit der hervorgehende Fehler ein Minimum werde. Wendet man diese Verbesserungen an, so erhält man die Bahn hinreichend genau; vorausgesetzt, dass sich die Berechnung auf genaue Beobachtungen stütze und man in der Annahme des Werthes von v keinen zu grossen Fehler begangen habe. Ist dies der Fall, so muss man die Operation so lange wiederholen, bis die Bahn hinreichend genau gefunden wird.

Bemerkungen und Erläuterungen

zu den mathematischen Principien der Naturlehre.

No. **1.** S. **40.** (Dortige Figur). RV drückt die ganze Verzögerung aus, welche das Pendel durch den Widerstand der Luft erleidet, während es eine doppelte Schwingung ausführt; dieselbe widerstehende Kraft würde daher $\frac{1}{2}$ RV hervorbringen, während das Pendel eine einfache Schwingung zurücklegt. Der Anfangspunkt der letzteren ist aber weder in R noch in V, sondern in irgend einen zwischen beiden liegenden Punkt zu setzen, weil der Körper eine grössere Verzögerung erlitten hat, während er den grösseren Bogen der ersten, als während er den kleineren Bogen der zweiten Schwingung beschrieb. Dieser zwischenliegende Punkt wird genähert erhalten, wenn man ST $=$ $\frac{1}{4}$RV so in die Mitte legt, dass der Punkt x sowohl ST als RV halbirt.

Ist nämlich Y der Punkt auf AF, welchen der Pendel nach der ersten Schwingung von R an erreicht, so ist RA — AY die Verzögerung während der ersten und AY — AV die Verzögerung während der zweiten Schwingung, und genähert $RA - AY = AY - AV$ oder $AY = \frac{1}{2}(RA + AV)$, hingegen genau $Ax = \frac{1}{2}(AR + AV)$ und so mit demselben Grade der Annäherung $Ax = AY = \frac{1}{2}(AR + AV) = \frac{1}{4}(AR + AV + 2AY) = \frac{1}{4}(RY + VY)$. Hiernach wird SA etwas grösser und TA etwas kleiner als $\frac{1}{4}(RY + VY)$, welche beide in der Klammer befindliche Bogen das aus R losgelassene Pendel beschreibt. Fällt es von S herab, so erleidet es während des Falles bis A eine etwas grössere Verzögerung als $\frac{1}{4}$ RV, dagegen wenn es hernach durch TA aufsteigt, eine um fast eben so viel kleinere Verzögerung als $\frac{1}{4}$ RV, und man kann daher die ganze Verzögerung des von S herabgefallenen Pendels, während Einer Schwingung $= \frac{1}{2}$ RV setzen. Obgleich jener Theil, welcher beim Falle durch SA eingeflösst sein würde, damit die Geschwindigkeit des Pendels in A kleiner sei, als wenn es im luftleeren Raume durch TA gefallen wäre, grösser ist als $\frac{1}{4}$ RV; so wird doch der Unterschied so gering sein, dass man ihn als unbedeutend ansehen kann.

No. 2. S. 52. Setzt man den Bogen AB = α, Ab = β, so wird für den Radius AM = 1, BD = AC = sin vers. $\alpha = 1 - \cos. \alpha = 2 \sin {}^1/_2 \alpha^2$ AB = 2 sin AGB = 2 sin $^1/_2 \alpha$ und eben so bd = 2 sin $^1/_2 \beta^2$; Ab = 2 sin $^1/_2 \beta$. Werden nun α und β verschwindend klein, so wird BD = $^1/_2 \alpha^2$, AB = α, bd = $^1/_2 \beta^2$, Ab = β, demnach jetzt: AB^2 : Ab^2 = $\alpha^2 : \beta^2$ = BD : bd.

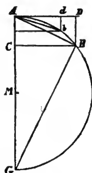


Fig. 224.

No. 3. S. 52. Weil $\frac{AD^2}{DB} = \frac{Ad^2}{db}$ = Const., so wird AD^2 = Constans. × DB, und daher für AC = DB als Abscisse, BC = AD die zugehörige Ordinate in einer Parabel. Ferner ist nach den Gesetzen der Parabel die krummlinige Figur ABC = $^2/_3$ ACBD und daher die krummlinige Figur ABD = $^1/_3$ ABCD = $^2/_3$ △ ABD.

No. 4. S. 56. (Dortige Figur). Da nämlich CV ⫩ AB und Cc ⫩ BV, so ist CVBc ein Parallelogramm, also CV = Bc = AB, und da auch CV ⫩ AB, so wird ABCV ebenfalls ein Parallelogramm, dessen Diagonale BV nach der Construction den Mittelpunkt S trifft.

No. 5. S. 57. Da AB = BC ist, hat man △ SAB = SBc. Nach der Voraussetzung ist SAB = SBC, also SBC = SBc, mithin Cc ⫩ SB. Längs BS muss auch die Centripetalkraft gerichtet sein, welche bewirken soll, dass der Körper, statt von B längs Bc fortzugehen, nach C hin abgesenkt werde.

No. 6. S. 59. Setzt man die Umlaufszeiten in zwei Kreisen = T, t, die Radien = R, r; so würden die in der Zeiteinheit beschriebenen Bogen A = $\frac{2R\pi}{T}$, a = $\frac{2r\pi}{t}$. Das in §. 18. enthaltene Verhältniss $\frac{A^2}{R} : \frac{a^2}{r}$ geht daher über in $\frac{4R^2\pi^2}{T^2R} : \frac{4r^2\pi^2}{t^2r} = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$.

No. 7. S. 60. Werden die Centripetalkräfte durch F, f, die Geschwindigkeiten durch V, v bezeichnet; so ist nach dem Lehrsatz und nach Zusatz 2. F : f = $\frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$ und da hier T^2 : t^2 = R^3 : r^3; so wird F : f = $\frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$. Ferner geht die Proportion V : v = $\frac{2R\pi}{T} : \frac{2r\pi}{t}$ hier über in V : v = $\frac{R}{R^{3/2}} : \frac{r}{r^{3/2}} = \frac{1}{R^{1/2}} : \frac{1}{r^{1/2}}$.

No. 8. S. 60. Setzt man allgemein die Schwerkraft = 2g, so wird bekanntlich ein vermöge derselben beschriebener Weg f = gt^2. Setzt man nun die Zeit t = 1, und wird während derselben Zeit der Bogen a des Kreises beschrieben, so gehört zu demselben die Fallhöhe g

und es ist daher $g.2r = a^2$ oder $2g = \frac{a^2}{r}$, d. h. die Schwerkraft identisch mit der Centripetalkraft. Demnach $f = \frac{a^2}{2r} . t^2$ und für $t = 1$ $a^2 = 2r . f$.

Fig. 225.

No. 9. S. 61. Bezeichnet Pp die Geschwindigkeit in P, Qq die Geschwindigkeit in q, wobei die kleinen Stücke Pp und Qq der Tangenten statt der Bogen gesetzt sind; sind ferner SM und SN die Perpendikel auf die Tangente: so ist Fläche $SPp = \frac{1}{2} Pp . SM$ Fläche $SQq = \frac{1}{2} Qq . SN$, also $SPp : SQq = Pp . SM : Qq . SN$.

Nach §. 13. sind aber SPp und SQq den Zeiten proportional, und im vorliegenden Falle einander gleich und mit der Zeiteinheit identisch. Daher $Pp . SM = Qq . SN$ oder $Pp : Qq = SN : SM$. Nach der Construction ist $Pp : Qq = QB : AP = DQ' : DP'$ (Fig. 17.). Angenommen nun, die Linie TS träfe DP' nicht in D, sondern in einem um x davon entfernten Punkte F; so denke man sich ein Perpendikel FG auf TN gefällt. Es würde dann leicht folgen $SM : DP' + x = SN : FG$ und da oben $SM : DP' = SN : DQ'$ jetzt $DP' + x : DP' = FG : DQ'$. Dies ist aber nicht möglich, weil $DP' + x > DP'$ und $FG < DQ$; es muss daher TS durch D gehen.

Fig. 226.

No. 10. S. 62. Die Centripatalkraft verhält sich daher (nach §. 21.) direct wie $\frac{QR}{SP^2 . QT^2}$ und indirect wie der Körper $\frac{SP^2 . QT^2}{QR}$.

No. 11. S. 63. Eigentlich hat man, wenn PR eine Tangente in P ist, $VP : PR = PQ : PR$ und daher $VP = \frac{PR . PQ}{QR}$. Ist aber der Bogen PQ verschwindend klein, so wird $QR \ddagger VP$, $PR = PQ = \frown PQ$ und so $VP = \frac{PQ^2}{QR}$.

Fig. 227.

No. 12. S. 67. Sind in der Ellipse oder Hyperbel a' und b' conjugirte Halbmesser, α der Coordinatenwinkel, a und b die halben Hauptaxen, so ist bekanntlich $a'b' \sin \alpha = ab$.

No. 13. S. 67. Setzt man $Pv = x'$, $Qv = y'$ $DC = b'$, $CP = a'$, so stimmt die Proportion $Pv . vG : Qv^2 = PC^2 : CD^2$ (Fig. 23.) mit der bekannten Gleichung der Ellipse $y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2} (2a'x' - x'^2)$ überein.

No. 14. S. 68. Es wird nämlich $Qv^2 + uP . Pv = Pv\,(uV + uP) = vP . P . V$. Ferner ist $uP = PT + Tv$; $vP = PT - Tv$ also $uP . vP = PT^2 - Tv^2$ und $Qv^2 + uP . Pv = Qv^2 - Tv^2 + PT^2 = QT^2 + PT^2 = PQ^2$.

No. 15. S. 68. Wenn Q mit P zusammenfällt, wird PF mit dem Perpendikel von C auf die Tangente identisch.

Fig. 228.

No. 16. S. 69. Die gemeinschaftliche halbe grosse Axe sei $= a$, die halbe kleine Axe $CM = B$, $Cm = b$, die Umlaufszeiten resp. T und t. Da die beschriebenen Flächenräume den Zeiten proportional sind, haben wir

1. $T : t = aB\pi : ab\pi = B : b$

Sind nun ACD, ACE gleichzeitig beschriebene Sectoren, so wird die Umlaufszeit desto kleiner, je grösser ein solcher Sector ist; also

2. $T : t = ACD : ACE$.

Sind diese Sectoren aber sehr klein, so verhalten sie sich wie die Geschwindigkeiten im Punkt A oder nach §. 7.

3. $ACE : ACD = EG : DG$.

Setzt man nun, der Kürze wegen, $AG = x$, so hat man $DG^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ $EG^2 = \frac{B^2}{a^2}(2ax - x^2)$, also

4. $DG : EG = b : B$

oder nach 2., 3. und 4. $T : t = b : B$, und nach 1. $T : t = B : b$, also

5. $T : t = 1 : 1$.

Fig. 229.

No. 17. S. 73. Ist A der Hauptscheitelpunkt der Parabel, S ihr Brennpunkt, P ein anderer Scheitelpunkt, x' die Abscisse, y' die Ordinate, beide auf den letzteren Scheitelpunkt bezogen; so hat man bekanntlich $y'^2 = \frac{2p}{\sin \alpha^2}\, x'$. Es ist aber $tg\alpha = \frac{p}{b}$, also $\frac{2p}{\sin \alpha^2} = 2p . \frac{b^2 + p^2}{p^2} = \frac{2p(2ap + p^2)}{p^2} = 4\left(a + \frac{p}{2}\right)$ und da $r^2 = b^2 + \left(\frac{p}{2} - a\right)^2 = 2ap + \frac{p^2}{4} - pa + a^2 = \left(a + \frac{p}{2}\right)^2$ also $r = a + \frac{p}{2}$, so wird $\frac{2p}{\sin \alpha^2} = 4r$.

No. 18. S. 73. Ist wie vorhin $PO = b$, $AO = a$ (Fig. 26.), so wird als Subtangente $MO = \frac{b}{tga} = \frac{b^2}{p} = \frac{2ap}{p} = 2a$, mithin $MA = AO = a$. Ferner ist $SP = r = a + \frac{p}{2} = AM + AS = MS$, endlich da MSP gleichschenklig und SN (Fig. 26.) perpendikular auf MP, so ist $MN = NP$.

No. 19. S. 76. Wegen der Proportionalität zwischen den Zeiten und den in ihnen beschriebenen Flächenräumen, möge die Fläche OT . SP in der Zeiteinheit beschrieben sein, die ganze Fläche E der Ellipse in T solchen Einheiten beschrieben werden; alsdann ist $1 : T = QT . SP : E$ also $E = T . QT . SP = T\sqrt{L}$.

No. 20. S. 77. Ist dieser grösste oder kleinste Abstand $= c$, so ist die Geschwindigkeit im Kegelschnitt $\frac{\sqrt{L}}{c}$ proportional, im betreffenden Kreise ist der Parameter $= 2c$, mithin die Geschwindigkeit in demselben $\frac{\sqrt{2c}}{c}$ proportional; es verhält sich daher die erstere Geschwindigkeit zur letzteren, wie $\sqrt{L} : \sqrt{2c}$.

Fig. 230.

No. 21. S. 77. Die Abstände Sc und SC sind respective a und A, die Perpendikel Sd und SD b und B, die Parameter l und L hier $\frac{2b^2}{a}$ und $\frac{2B^2}{A}$, die Geschwindigkeiten v und V; demnach $v : V = \frac{\sqrt{2}}{b} : \frac{\sqrt{L}}{B} = \frac{b\sqrt{2}}{b\sqrt{a}} : \frac{B\sqrt{2}}{B\sqrt{A}}$ $= \frac{1}{\sqrt{a}} : \frac{1}{\sqrt{A}}$ und auch $b : B = \sqrt{la} : \sqrt{LA} = b\sqrt{\frac{2}{a}a} : B\sqrt{\frac{2}{A}A}$.

No. 22. S. 78. Ist der Parameter $= p$, die Geschwindigkeit im Kegelschnitt $= V$, die im ersten Kreise $= k$, die im zweiten $= K$, der Abstand in diesem und im Kegelschnitt $= r$, das Perpendikel auf die Tangente $= T$; so hat man, nach Zusatz 8. $V : k = {}^1\!/_2 p : T$ nach §. 18., Zusatz 6. $k : K = \frac{1}{\sqrt{{}^1\!/_2 p}} : \frac{1}{\sqrt{r}}$, mithin $V : K = \sqrt{{}^1\!/_2 p} : \frac{T}{\sqrt{r}} = \sqrt{{}^1\!/_2 p \cdot r} : T$.

Fig. 231.

No. 23. S. 83. Setzen wir die zu B gehörende Abscisse $AM = x$, die Ordinate $BM = y$, den Radius vector $BS = r$; so wird bekanntlich $v^2 = (1 - e^2)(2ax - x^2)$ wo e die Excentricität der Ellipse ausdrückt, ferner weil $AS = a(1 - e)$ $r^2 = y^2 + (AS - x)^2 = (1 - e^2)(2ax - x^2) + (a(1 - e) - x)^2$ und hieraus nach gehöriger Reduction

1. $r = ex + (1 - e)a$

und eben so, wenn $AN = x^1$, $CN = y^1$, $SC = r^1$ gesetzt wird.

2. $r^1 = ex^1 + (1 - e)a$.

Da nun, wenn wir AG durch d bezeichnen, $BK = d + x$, $LC = d + x^1$ nach Prop. 2. $d + x : r = 2a : 2ae = 1 : e$, so folgt

3. $de + ex = r$

und nach derselben zweiten Proportion $d + x^1 : r^1 = 1 : e$

also 4. $de + ex^1 = r^1$

Vergleicht man 3. mit 1. und 4. mit 2., so gehören die Gleichungen 3. und 4. einer Ellipse an, wenn

5. $de = (1 - e) a$.

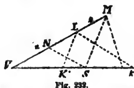


Fig. 232.

Nach Prop. 4. des Textes ist aber $2ae : 2a = a (1 - e) : d$ also in der That $de = e (1 - e)$ wie in 5.

No. 24. S. 84. Soll man K und k so bestimmen, dass $VK : KS = Vk : kS = a : e$ werde, so ziehe man aus V unter beliebigem Winkel mit VS die Linie VM, mache auf dieser $VL = a$, $LM = e = LN$, ziehe MS und LK ∓ MS; alsdann ist $VK : KS = VL : LM = a : e$. Ferner ziehe man NS und Lk ∓ NS; alsdann ist $Vk : kS = VL : LN = a : e$; also auch $VK : KS = Vk : kS$.

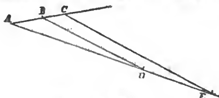


Fig. 233.

No. 25. S. 85. Man mache $AB = SV$ (Fig. 36), $AC = SP$, $AD = ab$, ziehe BD und CE ∓ BD; alsdann ist $AE = r$.

No. 26. S. 86. Da $MN = BZ - AZ$, (Fig. 37.) so halbire man AB in U, trage rechts und links von U die gegebene Länge $^1/_2MN$ auf; alsdann ist MA gegeben. Macht man nun $BV = MN$, $BW = MA$, zieht man AW und XV ∓ AW; so hat man $BX : BW = BV : AB$, d. h. $BX : MA = MN : AB$ also $BX = PM$ (im Text).



Fig. 234.

Setzt man die grosse Axe $MN = 2a$ (Fig. 37.), die Excentricität $AB = 2ae$; so ist $MA = {}^1/_2(AB - MN) = ae - a$; also nach Prop. 1. $PM = \frac{(ae - a) 2a}{2ae} = \frac{ae - a}{e}$.

Ist ferner die Abscisse des Punktes Z, in Bezug auf MA als Axe und M als Anfangspunkt, $= x$, der Radiusvector $AZ = r$; so wird $ZR = x + PM = \frac{ex + ae - a}{e}$ und da $r = ex + ae - a$ (§. 41., Bemerkung) $ZR = \frac{r}{e}$, $\frac{ZR}{AZ} = \frac{1}{e}$. Da nun ferner $\frac{MN}{AB} = \frac{2a}{2ae} = \frac{1}{e}$

$$ZR : AZ = MN : AB.$$

No. 27. S. 89. Ist in einer Ellipse ein Halbmesser $CB = a$, sein ihm conjugirter Halbmesser $CD = b$, die Abscisse CL eines beliebigen Punktes H, in Bezug auf den ersten als Abscissenaxe $= x$, die zugehörige Ordinate $HL = y$, alsdann ist bekanntlich

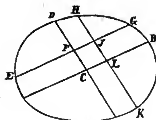


Fig. 235.

1. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

Nun verlege man den Anfangspunkt der Coordinaten nach F, so dass $CF = \alpha$ sei; alsdann wird, wenn die Richtung der Coordinaten unverändert bleibt, die Abscisse $FJ = CL = x$, die Ordinate $HJ = y^1 = y - \alpha$, und daher nach 1. die Gleichung in Bezug auf die neuen Coordinaten

2. $(y^1 + \alpha)^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

Aus 1. und 2. folgt $y^1 + 2\alpha y^1 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) - \alpha^2$.

oder 3. $y^1(y^1 + 2\alpha) = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) - \alpha^2$.

Aus 3. folgt aber für $y^1 = 0$

4. $x^2 = EF^2 = FG^2 = \gamma^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - \alpha^2)$

und hieraus $\alpha^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \gamma^2)$. Substituirt man diesen Werth von α^2 in Gl. 3., so ergiebt sich

5. $y^1(y^1 + 2\alpha) = \frac{b^2}{a^2}(\gamma^2 - x^2) = \frac{b^2}{a^2}(\gamma + x)(\gamma - x)$.

Da nun $y^1 = HJ$ $\gamma + x = EJ$, $y^1 + 2\alpha = JK$ $\gamma - x = JG$, so wird $\frac{HJ \cdot JK}{EJ \cdot JG} = \frac{b^2}{a^2} =$ Constans.

No. 28 S. 92. Ist ABDC das gegebene Viereck, und $A + D = 180^0$, $B + C = 180^0$ $PQ \mathrel{\#} AC$, $ST \mathrel{\#} AB$; so hat man in diesem Falle $PQ . PR = PS . PT$. Sind nun Pg, Pr, Ps, Pt respective perpendikulär auf AB, CD, AC, BD; so wird $\angle S = A = Q$; sin R = sin SCD = sin B = sin T, mithin

PQ sin Q . PR sin R = PS sin S . PT sin T

und entweder

PQ . PR : PS . PT = sin S . sin T : sin Q sin R

oder Pq . Pr = Ps . Pt.

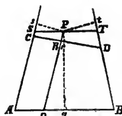


Fig. 236.

No. 29. S. 101. Um die Linie dg zu construiren, verbinde man G mit O, ziehe aus d die Linie $dg' \mathrel{\#} DG$, ziehe unter dem gegeben Winkel mit BL hier dg' die Linie dg und mache $dg = dg'$, alsdann ist offenbar $g'd : GD = Od : OD$ oder $gd : Od = GD : OD$.

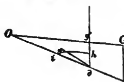


Fig. 237.

No. 30. S. 106. Es ist nämlich, wenn man $AC = a$, $CD = b$, $AL = x$, $JL = y$ setzt (Fig. 58). $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ und $\frac{dy}{dx} =$

$\frac{b^2}{a^2}\frac{a-x}{y}$. Ferner $EL = \text{Subtg.} = y : \frac{dy}{dx} \quad \frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a-x)} = \frac{2ax - x^2}{a-x}$.

$EL + LC = EC = \frac{2ax - x^2}{a-x} + a - x = \frac{a^2}{a-x}$ und $\frac{EC}{AC} = \frac{a}{a-x} = \frac{AC}{CL}$, oder $CA : CL = EC : CA$.

No. 31. S. 115. Aus den Proportionen

1. $BK : AB = HJ : GJ$ (Fig. 65)
2. $DL : BD = GJ : FG$

folgen die später in Anwendung kommenden, und zwar aus 1. $BK : AK = HJ : GJ$ und $AB : AK = GH : HJ$. Aus 3. folgt $Mi : iL = GJ : HJ$ oder $Mi : iL = AK : BK$.

No. 32. S. 120. Die der Zeit proportionale Fläche ASP ist nach §. 68 $= {}^4/_3\, GH . AS$. Die ebenfalls der verwendeten Zeit proportionale Fläche $ASp = {}^2/_3\, AS . Sp = {}^2/_3\, AS . 2AS = {}^4/_3\, AS . AS$; mithin verhalten sich die erforderlichen Zeiten wie $ASP : ASp = GH : AS$.

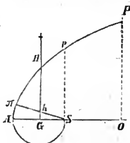


Fig. 238.

No. 33. S. 120. Für einen dem Scheitel verschwindend nahe liegenden Punkt π drückt $A\pi$ die Geschwindigkeit des Punktes A und Gh die Geschwindigkeit des Punktes G aus, wenn h der Mittelpunkt des durch π gehenden Kreises ist. Die Fläche $AS\pi$ ist nun nach §. 68., Gl. 5. $= {}^4/_3\, Gh . AS$, aber sie ist auch, da $A\pi$ verschwindend klein ist $= \frac{A\pi . AS}{2}$ mithin $\frac{A\pi . AS}{2} = {}^4/_3\, Gh . AS$ oder $Gh : A\pi = 3 : 8$.

No. 34. S. 124. Fig. 70. Setzt man $OA = a$, $OS = ae$ und $\angle QOA = E$, so wird aus $OG : OA = OA : OS$, $OG = \frac{a}{e}$.

Ferner wird $GF = OG . E = \frac{a}{e} E \sin AQ = a \sin E$, und daher der Sector AQS proportional $e \left(\frac{a}{e} E - a \sin E\right) = a\,(E - e \sin E)$, ein Ausdruck, welcher dem in der theoria motus von Gauss befindlichen entspricht.

No. 35. S. 124. Fig. 71. Setzt man $B = \frac{SH}{AB} . 57^0{,}29578 = e''$, wo $e = \sin \varphi$ und $e'' = e . 57^0{,}29578$, $N = M$, $L = \frac{AB}{SH} = \frac{1}{e}$,

$E = \Delta E'$, $ACQ = E'$,

so wird $D = e'' \sin E'$, $\triangle E' = \frac{\frac{1}{e}[M - E' + e'' \sin E']}{\frac{1}{e} \mp \cos E'} = \frac{M - E' + e'' \sin E'}{1 \mp e \cos E'}$, wie im Berliner astronomischen Jahrbuch für 1838, Pag. 281.

No. 36. S. 125. In der Theorie motus befindet sich die Gleichung $\frac{kt\sqrt{1+\mu}}{a^{3/2}} = E - e \sin E$.

Setzt man daher hier $\angle ACQ = E$, $AC = a$, $SC = ae$, so wird $AQ = aE$, das Perpendikel von S auf $CQ = SC \sin ACQ = ae \sin E$, und so hier $APS = a(E - e \sin E)$, d. h. APS proportional $E - e \sin E$.

No. 37. S. 125. Setzt man der Kürze wegen $CK = x$, $PK = z$, $CJ = \frac{1}{2}e = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$, wo 2a und 2b die beiden Axen der Hyperbel bezeichnen, so ist $AJKP = \frac{1}{2}$ ab log hyp. $\left(\frac{2x}{e}\right)$

Ferner ist $\triangle CJA = \frac{1}{8} e^2 \sin AJC$, $\triangle CKP = \frac{1}{2} xy \sin CKP$, $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} e^2 \sin AJC$, mithin $\triangle CJA = CKP$, und indem man jedes dieser Dreiecke von CAPKC subtrahirt: $AJKP = \triangle APC$.

No. 38. S. 129. Fig. 77. TC als Subtangente ist $= \frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = -\frac{a^2y^2}{b^2x}$, wobei $BO = AO = a$, b die halbe kleine Axe, $CP = y$, $OC = x$ und die Gleichung der Ellipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ ist. Demnach wird $TO = TC + CO = -\frac{a^2y^2}{b^2x} - x = -\frac{a^2}{x} = \frac{BO^2}{CO}$ und $CO : BO = BO : TO$ wie Gl. 4 im Texte.

No. 39. S. 131. Fig. 80. Es ist $Cd = y$, $Sc = x$, $SK = p$, $y^2 = 2px$ also $\sqrt{SK} : \sqrt{\frac{1}{2}Sc} = SK : \sqrt{\frac{1}{2}Sc \cdot SK} = SK : \sqrt{\frac{1}{2}px} = SK : \frac{1}{2}y = SK : \frac{1}{2}Cd$.

No. 40. S. 144. Fig. 90. Durch den Unterschied der zwei ersten Kräfte wird der Weg mn, durch die zweite Kraft gleichzeitig der geradlinige Weg $r\varrho$ zurückgelegt. Das gesuchte Verhältniss ist daher $mn : r\varrho$. Für die entstehenden Grössen ist aber $mn = \frac{mk \cdot ms}{mt}$ und $r\varrho = \frac{kr^2}{mt}$, mithin wird das gesuchte Verhältniss $mk \cdot ms : kr^2$.

Im Lehrsatz, Gl. 1. und Zusatz 1., Gl. 5. war $\angle VCP : VCp = kr : mr = F : G$ mithin nun $mr + kr : kr = G + F : F$ und $mr - kr : kr = G - F : F$ d. h. $(mr + kr)(mr - kr) : kr^2 = G^2 - F^2 : F^2$ oder $ms \cdot mk : kr^2 = G^2 - F^2 : F^2$.

No. 41. S. 147. Es muss identisch $R \,.\, G^2 - R \,.\, F^2 + T \,.\, F^2 - F^2X = T^3 - 3T^2 \,.\, X + 3T \,.\, X^2 - X^3$, also $R \,.\, G^2 - R \,.\, F^2 + T \,.\, F^2 = T^3$ und $F^2 = 3T^2 - 3TX + X^2$. so wie für X verschwindend klein, wo der halbe Parameter $R = T$ wird, $\frac{G^2}{T^2} = 1 = \frac{F^2}{3T^2}$ d. h. $G^2 : F^2 = 1 : 3$ sein.

No. 42. S. 152. Nach Hansen, Schuhmachers Jahrbuch für 1837 Pag. 121. macht der Mond einen tropischen Umlauf in 27,321882 Tagen, und es bewegt sich seine Apsidenlinie in Einem Tage rechtläufig um 6′ 41,0″, mithin während eines tropischen Monates 3° 2′ 56″.

No. 43. S. 157. Dass VP Tangente an der Curve im Punkt P sei, (Fig. 93.) wird analytisch sehr leicht bewiesen. Man kann sich aber auch wie im Text vorstellen, dass das Element der Curve bei P beschrieben wird, indem die Linie BP sich um B drehet; alsdann ist BP der Radius des osculirenden Kreises und die darauf senkrechte Linie VP Tangente an der Curve.

No. 44. S. 157. Da BV als Durchmesser constant, also sein Increment = 0 ist, so wird das Increment von BV — VP identisch mit dem Decremente von VP.

No. 45. S. 157. Die Cycloïde ausserhalb und innerhalb der Kugel wird jetzt bezüglich Epicycloïde und Hypocycloïde genannt.

No. 46. S. 161. Setzt man den Bogen $JH = s$, $LH = x$ (Fig. 95.) und nimmt man an, dass JH und KH um gleiche Incremente ds wachsen, so erhält man aus $x = r - r \cos s$, wo der Radius durch r bezeichnet ist, und durch Differentiation

$$1. \quad dx = r \sin s \,.\, ds.$$

Ferner setze man den Quadranten $HK = X$, alsdann wird nach 1.

$$2. \quad dX = rds, \text{ weil jetzt } s = 90^0.$$

und so nach 1. und 2. $dx : dX = r \sin s : r = JL : GK$. Da nun $GK = GH = SR$, $GL = TR$, und $JL = \sqrt{GJ^2 - GL^2} = \sqrt{SR^2 - TR^2}$.

$$3. \quad dx : dX = \sqrt{SR^2 - TR^2} : SR.$$

No. 47. S. 161. Vorausgesetzt, dass HY und HZ als sehr klein angesehen werden dürfen, kann man den letzteren statt seiner Sehne setzen, und es ist $HZ^2 = HY \,.\, MH = 2GH \,.\, HY$, also $HZ = \sqrt{2GH \,.\, HY}$ oder proportional $\sqrt{GH \,.\, HY}$.

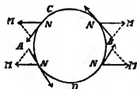


Fig. 239.

No. 48. S. 178. Die in diesem Zusatze ausgesprochenen Behauptungen in Betreff der Beschleunigung und Verzögerung der Bewegung des Körpers P durch die Kraft NM werden durch die nebenstehende Figur erläutert. Die Tangenten deuten die Richtung der Bewegung im Sinne

des Pfeils an, die Kraft NM ist aber so in Seitenkräfte zerlegt, dass die eine der Richtung nach mit der Tangente zusammenfällt. Rechts von C und D wirkt NM im entgegengesetzten Sinne, weil hier QP > QS ist.

No. 49. S. 179. Ist C die Centripetalkraft, R der Radius, T die Umlaufszeit, a eine Constante, so hat man $C = a \cdot \frac{R}{T^2}$, also $T = \frac{\sqrt{aR}}{\sqrt{C}}$. Es nimmt daher T in demselben Verhältniss ab und zu, in welchem $\sqrt{C}$ zu- und abnimmt.

No. 50. S. 183. Ist Q sehr entfernt von S, so werden die Linien LM und QM in demselben Verhältniss wachsen, wie PS : QS grösser

Fig. 240.

wird. In diesem Falle wird die Kraft QN sehr klein, und man kann NM = QM — QN statt QM setzen.

Nach der ursprünglichen Voraussetzung sind ferner diese Kräfte proportional $\frac{1}{QS^2}$. Wenn daher QK und PS constant sind, wird dieses Verhältniss gleich $\frac{1}{QS^3}$.

No. 51. S. 183. Ist d der constante wirkliche Durchmesser des Körpers Q, ϱ der von S aus gesehene scheinbare Durchmesser desselben; so hat man $\varrho = \frac{d}{QS}$ und daher ϱ^3 proportional $\frac{1}{QS^3}$.

No. 52. S. 193. (Fig. 107.) Es ist DF = DS — FS und df = ds — fs, also DF : df = DS — FS : ds — fs. Werden nun die Winkel DPE = FSE und dpe = fse verschwindend klein, so geht FS in ES und fs in es über, und es wird die Proportion

DF : df = DS — SE : ds — es = 1 : 1 nach Gl. 1 im Text.

No 53. S. 198. Die bei der Umdrehung durch den Bogen JH beschriebene Zone ist = 2SA . π . p, wo p den Abstand des Punktes Q von dem Fusspunkte des aus H auf AB gefällten Perpendikels bezeichnet. Denkt man sich dieses Perpendikel gezogen, fällt man auf dasselbe aus J das Perpendikel JM = p und zieht man JS; so ist △ JSQ ∾ HJM, also SJ : JQ = HJ : p SJ . p = SA . p = JQ . JH und endlich JQ . JH proportional 2SA . π . p.

No. 54. S. 195. Die Anziehung der einen Kugel sei $= A$, der Abstand des Körpers von ihrem Mittelpunkte $= \triangle$, ihr Durchmesser $= D$. Dieselben Grössen in Bezug auf die zweite Kugel seien a, δ, d. und dabei

$$1.\quad \triangle = \alpha D,\ \delta = \alpha d,$$

wo α eine Constante ist. Nach §. 114. ist

$$2.\quad A : a = D : d,$$

und indem man $\triangle$ so in $\triangle'$ vermindert, dass

$$3.\quad \triangle : \triangle' = D : d, \text{ also } \triangle' = \frac{d}{D}\triangle = \delta,$$

so wird, wenn A' die nun entsprechende Anziehung bezeichnet,

$$4.\quad A' : A = \frac{1}{d^2} : \frac{1}{D^2};$$

also nach 2. und 4.

$$5.\quad A' : a = \frac{D}{d^2} : \frac{d}{D^2} = D^3 : d^3.$$

No. 55. S. 201. (Fig. 112.) Der Flächeninhalt dieser Zone ist bekanntlich $= 2 . PE . \pi . Dd$, also wenn PE constant ist, der Linie Dd proportional.

No. 56. S. 202. Um die Summe aller PD zu bilden, haben wir eine arithmetische Progression zu betrachten, deren erstes Glied $=$ PD, letztes $=$ PF und Differenz $=$ Dd ist. Mithin wird die Summe aller $PD = \frac{PF + PD}{2} + \frac{PF^2 - PD^2}{2 . Dd}$ und das Produkt dieser Summe in Dd $= \frac{1}{2}(PF + PD)(Dd + PF - PD)$ und wenn wir Dd gegen $PF - PD = DF$ vernachlässigen: $= \frac{1}{2}(PF^2 - PD^2)$. Kürzer erhalten wir, indem wir $PD = x$ und $Dd = dx$ setzen $\int_{PD}^{PF} x dx = \frac{1}{2}(PF^2 - PD^2)$.

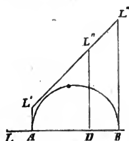


Fig. 241.

No. 57. S. 205. Im Punkte A wird $AL^{I} = AL$, im Puncte D wird $DL^{II} = DL$, im Puncte B wird $BL^{III} = BL$ und die beschriebene Fläche

$$AL_I L^{III} B = \frac{BL^{III} + AL^{I}}{2} \cdot AB$$

$$= \frac{(BL + AL)(BL - AL)}{2} = \frac{BL^2 - AL^2}{2}.$$

Dasselbe ergiebt sich auch kurz folgendermassen, indem man die unbestimmte Ordinate $L^{II}D = y$ und nach der Voraussetzung $=$ der Abscisse $LD = x$ setzt. Hiernach wird die beschriebene Fläche

$$= \int_{LA}^{LB} x dx = \frac{1}{2}(LB^2 - LA^2).$$

No. 58. S. 205. Dass hier eine hyperbolische Fläche und zwar zwischen den Asymptoten entstehe, ersieht man daraus, dass LA . LB constant, also $= a^2$ zu setzen ist. Bezeichnet man nun DL durch x, so wird die Ordinate $y = \frac{a^2}{x}$ und die Fläche

$$\int_{LA}^{LB} \frac{a^2 dx}{x} = a^2 \log\left(\frac{LB}{LA}\right).$$

No. 59. S. 206. Dies ergiebt sich unmittelbar wie im ersten Beispiel.

No. 60. S. 206. Setzt man LD $= x$, so wird die zu findende Fläche bestimmt durch $\frac{AL \,.\, LB \,.\, JS}{2} \int_{LA}^{LB} \frac{dx}{x^2} = \frac{AL \,.\, LB \,.\, JS}{2} \left[-\frac{1}{LB} - \left(-\frac{1}{LA}\right)\right]$

$= \frac{AL \,.\, LB \,.\, JS}{2 \,.\, AL} - \frac{AL \,.\, LB \,.\, JS}{2 \,.\, LB}$.

No. 61. S. 206. Setzt man nämlich wieder LD $= x$, so erhält man nach der Reihe: $\frac{LS \,.\, JS^{3/2}}{\sqrt{2}} \int_{LA}^{LB} \frac{dx}{x^{3/2}} = \frac{LS \,.\, JS^{3/2}}{\sqrt{2}} [-2 \,.\, LB^{-1/2} + 2 \,.\, LA^{-1/2}]$

$= LS \,.\, JS^{3/2} \sqrt{2} \left[\frac{1}{LA^{1/2}} - \frac{1}{LB^{1/2}}\right]$; $\frac{JS^{3/2}}{2\sqrt{2}} \int_{LA}^{LB} \frac{dx}{x^{1/2}} = \frac{JS^{3/2}}{2\sqrt{2}} 2\, [LB^{1/2} - LA^{1/2}]$

$= \frac{LB^{1/2} \,.\, JS^{3/2} - LA^{1/2} \,.\, JS^{3/2}}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{\frac{LA \,.\, LB \,.\, JS^{3/2}}{2\sqrt{2}} \int_{LA}^{LB} \frac{dx}{x^{5/2}}}$

$= \frac{LA \,.\, LB \,.\, JS^{3/2}}{2\sqrt{2}} \cdot {}^2/_3 \left[\frac{1}{LA^{3/2}} - \frac{1}{LB^{3/2}}\right] = \frac{LA \,.\, LB \,.\, JS^{3/2}}{3\sqrt{2}} \left[\frac{1}{LA^{3/2}} - \frac{1}{LB^{3/2}}\right]$.

No. 62. S. 207. Denkt man sich von L eine Tangente LT an den Kreis gezogen (Fig. 116.), so wird $LA \,.\, LB = LT^2 = LS^2 - ST^2 = (LJ + JS)^2 - AS^2 = LJ^2 + 2LJ \,.\, JS + JS^2 - AS^2 = LJ^2 + PJ \,.\, JS + JS^2 - AS^2 = LJ^2 + JH^2 + JS^2 - AS^2 = LJ^2 + SH^2 - AS^2$ mithin $LA \,.\, LB = LJ^2$ oder

1. $LA : LJ = LJ : LB$.

Hieraus folgt $LA : LJ = \sqrt{LA} : \sqrt{LB}$ oder

2. $LA \,.\, \sqrt{LB} = LJ \,.\, \sqrt{LA}$

und ebenso $LB : LJ = \sqrt{LB} : \sqrt{LA}$, oder

3. $LB \,.\, \sqrt{LA} = LJ \,.\, \sqrt{LB}$

Bringt man nun die drei Glieder im vorliegenden Beispiele unter gleiche Benennung, so erhält man zunächst den Ausdruck:

$$SJ^{3/2} . \frac{[6LS + 3LA - LB] \sqrt{LB} - [6LS + 3LB - LA] \sqrt{LA}}{3\sqrt{2} \sqrt{LA \,.\, LB}}$$

$$= \frac{SJ^{3/2}}{3LJ} \cdot \frac{(4LS + 4LA) \sqrt{LB} - (4LS + 4LB) \sqrt{LA}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4 \,.\, SJ^{3/2}}{3LJ} \cdot \frac{LS \,.\, \sqrt{LB} + LJ \,.\, \sqrt{LA} - LS \,.\, \sqrt{LA} - LJ \,.\, \sqrt{LB}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4 \,.\, SJ^{3/2}}{3 \,.\, LJ} \cdot \frac{(LS - LJ)\,(\sqrt{LB} - \sqrt{LA})}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4 \,.\, SJ^{3/2}}{3 \,.\, LJ} \cdot \frac{JS \,.\, (\sqrt{LB} - \sqrt{LA})}{\sqrt{2}} = \frac{4 \,.\, SJ^{3/2}}{3 \,.\, LJ} \sqrt{\frac{LB + LA - 2\sqrt{LB \,.\, LA}}{2}}$$

oder, weil $LA = LS - AS$, $LB = LS + AS$ und $LB + LA = 2LS$, jener Ausdruck $= \frac{4 \,.\, SJ^{3/2}}{3 \,.\, LJ} \cdot \sqrt{LS - LJ} = \frac{4 \,.\, SJ^{3/2}}{3 \,.\, LJ} \sqrt{JS} = \frac{4 \,.\, SJ^{3}}{3 \,.\, LJ}$.

No. 63. S. 208. (Fig. 116.) Die beiden einzelnen Verhältnisse sind hier $\sqrt{JS} : \sqrt{PS}$ und $\frac{1}{JS} : \frac{1}{PS}$, das zusammengesetzte also

$$\frac{1}{\sqrt{JS}} : \frac{1}{\sqrt{PS}} = \sqrt{PS} : \sqrt{JS} = PS : \sqrt{JS \,.\, PS} = PS : AS \text{ (§. 126.)}$$

No. 64. S. 208. Wir haben in diesem Falle die einzelnen Verhältnisse $\sqrt{JS} : \sqrt{PS}$ und $\frac{1}{JS^{3/2}} : \frac{1}{PS^{3/2}}$, also das zusammengesetzte $\frac{1}{JS} : \frac{1}{PS}$ $= PS : JS = PS^2 : AS^2$.

No. 65. S. 208. Aus $\sqrt{JS} : \sqrt{PS}$ und $\frac{1}{JS^2} : \frac{1}{PS^2}$ folgt durch Zusammensetzung $\frac{1}{JS^{3/2}} : \frac{1}{PS^{3/2}} = PS^{3/2} : JS^{3/2} = PS^3 : (PS \,.\, JS)^{3/2} = PS^3 : AS^3$.

No. 66. S. 208. Es ist $\triangle\, SPE \sim SEJ$, weil $JS : SH = SH : PS$ d. h. $JS : SE = SE : PS$ und $\angle\, JSE = PSE$.

No. 67. S. 208. Es ist nämlich $JE : PE = JS : SA = SA : PS = JS^{1/2} : PS^{1/2}$ mithin $JE^n : PE^n = JS^{\frac{n}{2}} : PS^{\frac{n}{2}}$.

No. 68. S. 209. (Fig. 117.) Ist r der Radius der Kugel, x die Höhe des Segments, so hat man den Flächeninhalt der Calotte $= 2r\pi \,.\, x$, und daher die oben bezeichnete physische Fläche von der Dicke O $= 2rx\pi \,.\, O$, mithin proportional rxO.

No. 69. S. 215. Setzt man $PF = x$, $FK = y$, so wird (Fig. 120.)

$$AHJKL = \int_{PA}^{PH} y\,dx = \int_{PA}^{PH} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{PA} - \frac{1}{PH} = \frac{AH}{PA \,.\, PH}.$$

No. 70. S. 215. Hier wird

$$\int_{AP}^{PH} y\,dx = \int_{PA}^{PH} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}\right].$$

No. 71. S. 215. Es ist nämlich $PH = PD = \sqrt{AP^2 + AD^2}$, wo AP constant.

Wenn daher AD $= \infty$ ist, so wird auch PH $= \infty$, und so für $n > 1$, $\frac{PA}{PH^{n-1}} = \frac{PA}{\infty} = 0$.

No. 72. S. 216. (Fig. 121., I.) Setzt man PT $= x$, so wird

$$\int_{PA}^{PB} 1 \, . \, dx = 1(PB - PA) = 1 \, . \, AB.$$

No. 73. S. 216. (Fig. 121., II.) Setzt man AD $=$ RT $=$ EB $= r$, so wird PR $= \sqrt{r^2 + x^2}$ und $\int \frac{PT}{PR} dx = \int \frac{xdx}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \sqrt{r^2 + x^2} + C$

$$\int_{PA}^{PB} \frac{PT}{PR} dx = (PE + C) - (PD + C) = PE - PD.$$

No. 74. S. 217. (Fig. 122.) Setzt man der Kürze wegen AP $= \alpha$, AS $=$ SB $= b$, PE $= x$, PD $=$ ER $= z$, so ist nach §. 136., Zusatz 1. die Anziehung des Punktes P durch das Sphäroïd proportional

$$1. \quad \int_{\alpha}^{\alpha + 2b} \left(1 - \frac{x}{z}\right) dx = 2b - \int_{\alpha}^{\alpha + 2b} \frac{x}{z} dx.$$

Man setze ferner ED $= y$, SC $= a$; alsdann wird

$$2. \quad y^2 = \frac{a^2}{b^2} [2b(x - \alpha) - (x - \alpha)^2]$$

und hieraus

$$z^2 = x^2 + y^2 = \frac{-a^2\alpha(\alpha + 2b) + 2a^2(\alpha + b)x - (a^2 - b^2)x^2}{b^2}$$

oder 3. $bz = \sqrt{-a^2\alpha(\alpha + 2b) + 2a^2(\alpha + b)x - (a^2 - b^2)x^2}$.

Aus 3. folgt für $x = \alpha$, $bx = b\alpha$, und für $x = \alpha + 2b$, $bx = b(\alpha + 2b)$ Da nun allgemein

$$4. \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{p + qx + rx^2}} = \frac{\sqrt{p + qx + rx^2}}{r} - \frac{q}{2r} \int \frac{dx}{\sqrt{p + qx + rx^2}},$$

ferner

$$\int \sqrt{p + qx + rx^2} \, . \, dx =$$

$$\frac{(q + 2rx)\sqrt{p + qx + rx^2}}{4r} + \frac{4pr - q^2}{8r} \int \frac{dx}{\sqrt{p + qx + rx^2}},$$

oder aus dieser

$$5. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{p + qx + rx^2}} =$$

$$-\frac{2(q + 2rx)\sqrt{p + qx + rx^2}}{4pr - q^2} + \frac{8r}{4pr - q^2} \int \sqrt{p + qx + rx^2} \, . \, dx;$$

so wird

$$\int_{\alpha}^{\alpha + 2b} \left(1 - \frac{x}{z}\right) dx =$$

$$2b + \frac{b}{a^2 - b^2}[b(\alpha + 2b) - b\alpha] - \frac{b \,.\, 2a^2(\alpha + b)}{2(a^2 - b^2)}\int_{\alpha}^{\alpha + 2b}\frac{dx}{bz} =$$

$$\frac{2a^2b}{a^2 - b^2} - \frac{a^2b(\alpha + b)}{a^2 - b^2}\left\{\frac{-8(a^2 - b^2)}{4a^2\alpha(\alpha + 2b)(a^2 - b^2) - 4a^4(\alpha + b)^2}\int_{\alpha}^{\alpha + 2b} bzdx\right.$$

$$\left. - \frac{2[2a^2(\alpha + b) - 2(a^3 - b^2)3]bz}{4a^2\alpha(\alpha + 2b)(a^2 - b^2) - 4a^4(\alpha + b)^2}\right\}$$

$$= \frac{2a^2b}{a^2 - b^2} - \frac{2(\alpha + b)}{\alpha^2 + 2\alpha b + a^2}\int_{\alpha}^{\alpha + 2b} zdx - \frac{\alpha + b}{(a^2 - b^2)b(\alpha^2 + 2\alpha b + a^2}$$

$$\times \left\{\begin{matrix}[a^2(\alpha + b) - (a^2 - b^2)(\alpha + 2b)](b^2 + 2b\alpha) \\ -[a^2(\alpha + b) - (a^2 - b^2)\alpha]b\alpha\end{matrix}\right\}$$

$$6. \quad \int_{\alpha}^{\alpha + 2b}\left(1 - \frac{x}{z}\right)dx =$$

$$\frac{2a^2b}{a^2 - b^2} - \frac{2(\alpha + b)}{\alpha^2 + 2\alpha b + a^2} . AKRMB - \frac{(\alpha + b)^2 2b(2b^2 - a^2}{(a^2 - b^2)(\alpha^2 + 2\alpha b + a^2)}$$

Es ist aber $AKRMB = AKMB + KMRK = 2b(\alpha + b) + KMRK$, mithin aus 6.

$$\int_{\alpha}^{\alpha + 2b}\left(1 - \frac{x}{z}\right)dx = \frac{2a^2b}{a^2 \cdot b^2} - \frac{4(a + b)^2 . b}{\alpha^2 + 2\alpha b + a^2} - \frac{2(\alpha + b)}{\alpha^2 + 2\alpha b + a^2} . KMRK$$

$$- \frac{2b(\alpha + b)^2(2b^2 - a^2}{(a^2 - b^2)(\alpha^2 + 2\alpha b + a^2)}$$

$$= 2b . \frac{a^2(\alpha^2 + 2\alpha b + a^2) - 2(\alpha + b)^2(a^2 - b^2) - (\alpha + b)^2(2b^2 - a^2)}{(a^2 - b^2)(\alpha^2 + 2\alpha b + a^3)}$$

$$- \frac{2(\alpha + b)}{\alpha^2 + 2\alpha b + a^2} . KMRK$$

$$7. \quad \int_{\alpha}^{\alpha + 2b}\left(1 - \frac{x}{z}\right)dx = 2 . \frac{a^2b - (\alpha + b) . KMRK}{\alpha^2 + 2\alpha b + a^2}.$$

Weil aber $\alpha^2 + 2\alpha b + a^2 = (\alpha + b)^2 + a^2 - b^2$, wird die Anziehung des Sphäroïds proportional

$$8. \quad 2 . \frac{a^2b - (\alpha + b) . KMRK}{(\alpha + b)^2 + a^2 - b^2}$$

Ist hingegen eine Kugel über AB beschrieben, so wird bei der vorhergehenden Bezeichnung

9. $y^2 = 2b(x - \alpha) - (x - \alpha)^2, z^2 = x^2 + y^2 = -\alpha^2 - 2\alpha b + 2(\alpha + b)x$

$$10. \quad z = \sqrt{-(\alpha^2 + 2\alpha b) + 2(\alpha + b)x}$$

für $x = a$, $z = \alpha$, $x = \alpha + 2b$, $z = \alpha + 2b$ und da allgemein

$$11. \quad \int\frac{xdx}{\sqrt{p + qx}} = \frac{2}{3q^2}(qx - 2p)\sqrt{p + qx}$$

die Anziehung der Kugel proportional

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2b}\left(1-\frac{x}{z}\right)dx = 2b - \frac{2}{3.4.(\alpha+b)^2}\,[2(\alpha+b)x + 2\alpha(\alpha+2b)]z$$

$$= 2b - \frac{1}{3(\alpha+b)^2}\Big\{[(\alpha+b)(\alpha+2b)+\alpha(\alpha+2b)](\alpha+2b) - [(\alpha+b)\alpha + a(\alpha+2b)]\alpha\Big\}$$

$$12.\quad \int_{\alpha}^{\alpha+2b}\left(1-\frac{x}{z}\right)dx = \frac{2b^3}{3(\alpha+b)^2}.$$

Hiernach verhält sich endlich die Anziehung des Sphäroïds zu der von Seiten der Kugel auf P ausgeübten Anziehung, wie

$$\frac{a^2b-(\alpha+b).KMRK}{(\alpha+b)^2+a^2-b^2} : \frac{b^3}{3(\alpha+b)^2}.$$

No. 75. S. 219. Setzt man CH = x, HM = y, so wird $y = \frac{1}{x^{n-2}}$, und daher die Fläche $GLOK = \int_{CG}^{\infty} ydx = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{CG^{n-3}} : \frac{1}{n-3}$ also weil $\frac{1}{\infty} = 0$, $GLOK = \frac{1}{n-3}\cdot\frac{1}{CG^{n-3}}$.

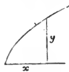


Fig. 212.

No. 76. S. 221. Es sei $x^2 = py$, also $y = \frac{x^2}{p}$; alsdann wird $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{p}x$ und $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2}{p}$ = Constans, und es drückt $\frac{d^2y}{dx^2}$ die Kraft aus, welche den Körper längs der Linie y anzieht.

No. 77. S. 221. Die Gleichung der Hyperbel in Beziehung auf die Asymptoten ist $y = \frac{p}{x}$ und hieraus $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2p}{x^3}$, also nach der Bezeichnung im Texte die Kraft proportional $\frac{2p}{A^3}$. Derselbe Werth ergiebt sich, wenn man die Werthe m = — 1 und n = 1 in $\frac{m^2-mn}{2nn}A^{\frac{mn-2n}{n}}$ substituirt. Hingegen würde aus der Substitution derselben Werthe von m und n in $\frac{mm-mn}{2nn}B^{\frac{mn-2n}{m}}$ der Werth B^3 hervorgehen. Hiernach müsste, wenn ich nicht irre, der Schluss der Anmerkung im Texte geändert werden.

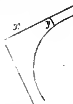


Fig. 213.

No. 78. S. 222. Vergl. §. 140.

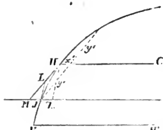


Fig. 244.

No. 79. S. 222. Ist HC ∥ VW, wo VW die Hauptaxe der Parabel ist, so haben wir nach §. 31., Bemerkung, $y^2 = \frac{p}{\sin \alpha^2} \cdot x'$. Hier ist p der Parameter der Hauptaxe und α der Winkel, welchen die Tangente HM mit der Hauptaxe bildet. Da nun MJ = und ∥ x', MH = und ∥ y'; $\frac{p}{\sin \alpha^2}$ constant = P; so ist auch $HM^2 = P \,.\, MJ$. Zieht man eben so in J eine Tangente JL, nimmt MJZ als Durchmesser an und zieht man HZ ∥ JL; so ist MZ die Subtangente der Tangente MH in Bezug auf diesen Durchmesser als Abscissenaxe, und nach derselben Weise wie bei rechtwinkligen Coordinaten und der Hauptaxe als Abscissenlinie wird hier diese Subtangente MZ = 2 . JZ also MJ = JZ und somit ML = LH.

No. 80. S. 225. Genauer nach Delambre 493ˢ,198
„ Struve 497,827.

No. 81. S. 227. Ist nämlich TR perpendikulär auf die Curve CDE so stellt ∠ PDR = TDA den Eintritts- ∠ RDS hingegen den Austrittswinkel dar. Wenn nun DP = DS, ferner PQ und SR auf DR senk-

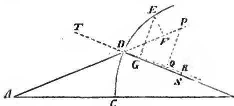


Fig. 245.

recht sind, so ist $\frac{PQ}{DP}$ der Eintrittssinus und $\frac{RS}{DS}$ der Austrittssinus. Da aber DE auf DR und EF auf DP senkrecht ist, so wird △ DEF ∾ DPQ.

Ferner wird, da DE auf DR und EG auf DS senkrecht ist, auch △ DEG ∾ DSR. Da nun der Eintrittssinus $= \frac{PQ}{DP} = \frac{DF}{DE}$ und der Austrittssinus $= \frac{RS}{DS} = \frac{DG}{DE}$; so hat man DF : DG = Eintrittssinus : Austrittssinus.

No. 82. S. 231. Ist die ganze Zeit $t = n\tau$ gesetzt, wo n beliebig gross, so bilde man folgendes Tableau:

Zeittheile: . . . . τ, 2τ, 3τ, 4τ, etc. . . . $n\tau$
Geschwindigkeiten: . . . . . . v, v^I, v^{II}, v^{III}, etc.
Decremente der Geschwindigkeit: av, av^I, av^{II}, av^{III}, etc.

Alsdann ist

$$v - av = v^I,\ v^I - av^I = v^{II},\ v^{II} - av^{II} = v^{III},\ v^{III} - av^{III} = v^{IV} = \text{etc.},$$

also auch

$$v : v - v^I = v^I : v^I - v^{II} = v^{II} : v^{II} - v^{III} = v^{III} : v^{III} - v^{IV} = \text{etc.} = \frac{1}{a}$$

und nach §. 2. $v : v^I = v^I : v^{II} = v^{II} : v^{III} = v^{III} : v^{IV} = \text{etc.}$

No. 83. S. 231. Aus dem vorhergehenden Tableau erhält man z. B.

$$v : v^{IV} = \left\{\begin{matrix} v : v^I \\ v^I : v^{II} \\ v^{II} : v^{III} \\ v^{III} : v^{IV} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{a^4}$$

eben so $v^{IV} : v^{VIII} = \frac{1}{a^4}$; mithin $v^{IV} = a^4 v$, $v^{VIII} = a^4 . v^{IV} = a^8 . v$.

No. 84. S. 231. (Fig. 133.) Setzt man $CD = x$ und $DG = y$, so ist die Gleichung der Hyperbel

1. $xy = a$, wo a constant,

Die hyperbolische Fläche wird daher

2. $A = \int y dx = a \int \frac{dx}{x} = a \text{ log. hyp. } x = \text{log. hyp. } (x^a)$.

Eine zweite hyperbolische Fläche sei

3. $A^I = \text{log. hyp. } (x^{Ia})$

Setzt man nun voraus, dass $A^I - A = \text{Constans}$ sei, so wird offenbar

$\text{log. } (x^{Ia}) - \text{log. } (x^a) = \text{log. } \left(\frac{x^I}{x}\right)^a = \text{Constans}$ oder auch

4. $x^I : x = \text{Constans}$.

No. 85. S. 233. (Fig. 135.) Nach den Lehren der Kegelschnitte ist für eine Hyperbel $CK . Kq = CA . AB = \text{Constans}$, also $CK : CA = AB : Kq$, $CA : CA - CK = Kq : Kq - AB$, d. h. $CA : AK = Kq : qk$ und hieraus $CA : \frac{1}{2}AH = Kq : \frac{1}{2}qk$.

No. 86. S. 233. Es ist nämlich

$ABHC : KkHC = AC : KC = AC : AC - AK$.

No. 87. S. 234. Wenn $ANtB - AMsB = AMsB - ALrB = ALrB - AKqB = AKqB$ ist, so wird auch

$ABHC - ABnN : ABHC - ABmM = ABHC - ABmM : ABHC - ABlL = ABHC - ABlL : ABHC - ABkK$

d. h. $CN : CM = CM : CL = CL : CK$

wie aus der Bemerkung 84. hervorgeht.

No. 88. S. 234. Aus ABqK : Bkq = $\frac{1}{2}$AK, qKlr : gktr = AC : $\frac{1}{2}$KL, rLMs : rlms = AC : $\frac{1}{2}$LM, sMNt : smnt = AC : $\frac{1}{2}$MN etc. etc. folgt für gleiche Intervalle, wo ABqK = qKLr = rLMs = sMNt = etc.
Bkq : gklr : rlms : smnt : etc. = AK : KL : LM : MN : etc. Das zweite fortlaufende Verhältniss ist mit dem in Bemerkung 84. identisch.

No. 89. S. 234, Z. B. Bms = ABsm — ABmM.

No. 90. S. 234. Ist R der ganze Widerstand im Anfange der Bewegung, welcher der Geschwindigkeit DP proportional ist, so wird der, der nach oben gerichteten Bewegung entsprechende und CP proportionale, Widerstand $R_{(a)}$ und man hat, wenn G die Kraft der Schwere bezeichnet, $AD : AC = R_{(a)} : G,\ DP : CP = R : R_{(a)}$,
also $AD . DP : AC . CP = R : G$.

No. 91. S. 236. Die Proportion QB : CK = DA : AC ergiebt sich, wie in §. 3. aus AC . AB = DC . DG oder AC : DC = DG : AB.

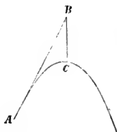


Fig. 246.

No. 92. S. 236. Drückt AB diese Geschwindigkeit, BC die ihr entsprechende Fallgeschwindigkeit aus, so ist der Parameter $= \frac{AB^2}{BC}$.

No. 93. S. 237. Man setze den Parameter = p, die Kraft der Schwere constant = g, den Widerstand = r, die Geschwindigkeit = v; alsdann ist, wenn a, b, c constante Grössen bezeichnen, $2 . DP : p = g : r$ (Gl. 11.) $p = av^2,\ r = bv,\ 2 . DP = \frac{agv^2}{bv} = cv$ also der Geschwindigkeit proportional.

No. 94. S. 240. Aus der Gleichung der Hyperbel yx = c folgt, wenn die auf einander folgenden Werthe von x x, ax, a^2x, a^3x etc. sind, dass die entsprechenden Werthe von y werden:

$$\frac{c}{x},\ \frac{c}{ax},\ \frac{c}{a^2x},\ \frac{c}{a^3x},\ \text{etc.}$$

Die erstern Werthe stehen daher in dem fortlaufenden Verhältniss $1 : a : a^2 : a^3$: etc., die letzteren in dem umgekehrten:
$1 : \frac{1}{a} : \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a^3}$: etc. Ferner hat man (Fig. 139.)

$$AKkB = \int_x^{ax} ydx = c\ [\log ax - \log x] = c \log a$$

$$KLtk = \int_{ax}^{a^2x} ydx = c\ [\log a^2x - \log ax] = c \log a \text{ etc.},$$

also $AKkB = KLtk = \text{etc.}$

No. 95. S. 240. Aus $y = \frac{c}{x}$ folgt $\frac{dy}{dx} = -\frac{c}{x^2}$ und daher

$$AT = \text{Subtg} = y : \frac{dy}{dx} = -x = CA.$$

No. 96. S. 241. Dies folgt aus §. 7.

No. 97. S. 242. Bezeichnet man die anfängliche Bewegung durch M, die Zeit durch T, den während der letzteren verlorenen Theil der Bewegung durch μ, die Zeittheilchen durch τ', τ'', τ''' etc., die ihnen entsprechenden Verluste der Bewegung durch μ', μ'', μ''' etc., den Widerstand durch R, und sind a, b, c, d, f etc. constante Grössen, so hat man $\mu = aRT$, und damit $\mu = bM$ sei, muss $RT = cM$ sein, mithin $T = c \cdot \frac{M}{R}$. Demnach wenn $\tau^1 = c \cdot \frac{M}{R}$; $\mu^1 = aR\tau^1 = f \cdot M$ und auch $M - \mu = (1 - h)\, M = f \cdot M$, proportional M.

Sind ferner V und v die Geschwindigkeiten beider Körper, T und t ihre Zeiten, S und s ihre Wege, M und m ihre Bewegungen; so hat man $S : s = V \cdot T : vt$ und da $V : v = M : m$ auch $S : s = MT : mt$.

No. 98. S. 242. Zur vorhergehenden Bezeichnung komme C als Masse und D als Durchmesser, alsdann ist $M = a \cdot VC = bVD^3$, $R = cD^2 \cdot V^2$, $T = d \cdot \frac{M}{R} = f \cdot \frac{D}{V}$, $S = gV \cdot T = hD$.

No. 99. S. 242. Bei der vorhergehenden Bezeichnung ist hier $R = aD^{5/2} \cdot V^2$, $T = b \cdot \frac{M}{R}$, $S = cVT = cV \cdot b \cdot \frac{M}{R} = dV \cdot \frac{gD^3V}{aD^{5/2}V^2}$ $= h \cdot D^{1/2}$.

No. 100. S. 243. Das im Original gebrauchte Wort Genita glaube ich am passendsten durch das Wort Function ausdrücken zu können. Das Wort Momentum habe ich zunächst in deutscher Form beibehalten, da aber aus dem Lehnsatz hervorgeht, dass momentum genitae, oder nach meiner Ausdrucksweise, das Moment einer Function mit dem Differential der letzteren identisch ist; da ich mich ferner in meinen bisherigen Bemerkungen der allgemein gebräuchlichen Bezeichnung des Differentials bereits öfters bedient habe; so werde ich mir später auch in der Regel erlauben, im Texte statt der gegenwärtig weniger gebräuchlichen, oder auch wohl in einer anderen Bedeutung verstandenen Benennung Moment die gebräuchliche Differential zu setzen.

No. 101. S. 244. Der Coefficient von A ist hier $\frac{AB}{A}$, das Moment $= a$, der Cofficient von B ist hier $\frac{AB}{B} = A$, das Moment $= b$.

No. 102. S. 246. Es sei also $A : B = B : C = C : D = D : E = E : F$, und C constant, wie auch $\frac{D}{C} = M$ und $D = CM$, alsdann haben wir

$A = \frac{C}{M^2}$, $B = \frac{C}{M}$, $E = CM^2$, $F = CM^3$. Wir erhalten hieraus, wenn m das Moment (Differential) von M, a, b, d, e, f die Momente A, B, D, E, F bezeichnen, nach §. 10. Lehrsatz:

$$a = -\frac{2Cm}{M^3} = -\frac{2m}{M} A,$$
$$b = -\frac{Cm}{M^2} = -\frac{m}{M} B,$$
$$d = Cm = \frac{m}{M} D,$$
$$e = 2CmM = 2\frac{m}{M} E,$$
$$f = 3CmM^2 = 3\frac{m}{M} F;$$

also $a : b : d : e : f = -2A : -B : D : 2E : 3F$.

No. 103. S. 246. Aus $A : B = C : D$ folgt, wenn B und C constant sind $AD = BC =$ Constans, mithin $Ad + aD = 0$ und $a : d = -A : D$.

No. 104. S. 246. Aus $A^2 \pm B^2 =$ Constans folgt: $2aA \pm 2bB = 0$ und $a : b = \pm B : A$.

No. 105. S. 246. In den beiden ersten Ausgaben dieses Werkes befand sich statt der Anmerkung, §. 11. die folgende: In Briefen, welche ich vor etwa 10 Jahren mit dem sehr gelehrten Mathematiker G. G. Leibnitz wechselte, zeigte ich demselben an, dass ich mich im Besitz einer Methode befände, nach welcher man Maxima und Minima bestimmen, Tangenten ziehen und ähnliche Aufgaben lösen könne, und zwar lasse sich dieselbe eben so gut auf irrationale, als auf rationale Grössen anwenden. Indem ich die Worte versetzte, welche meine Meinung (wenn eine Gleichung mit beliebig vielen veränderlichen Grössen gegeben ist, die Fluxionen zu finden, und umgekehrt) aussprachen, verbarg ich dieselbe. Der berühmte Mann antwortete mir darauf, er sei auf eine Methode derselben Art verfallen und theilte mir die seinige mit, welche von meiner kaum weiter abwich, als in der Form der Worte und Zeichen, den Formeln und der Idee der Erzeugung der Grössen. Die Grundlage beider Methoden ist im vorhergehenden Lehnsatze enthalten.

No. 106. S. 248. Aus $AC : AP = \sqrt{AC} : \sqrt{AK}$ (Fig. 142.) folgt nämlich, wie im §. 12., Lehrsatz $AP = \sqrt{AC \cdot AK}$.

No. 107 S. 248. Eigentlich haben wir (Fig. 143.) $ADv : pDq = Dt\,Dv : Dp\,Dq = Dt^2 : Dp.\,Dq$. Da aber Dp und Dq nur wenig von einander verschieden sind, kann man $ADv = \frac{pDq}{Dp^2} \cdot Dt^2$ setzen.

No. 108. S. 250. In Bezug auf die Hyperbel ATZ ist $AD = a$, die halbe Axe = der sogenannten halben Zwergaxe AC, $AX = x$, $TX = y$, und es geht die allgemeine Gleichung der Hyperbel $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ in diesem Falle über in $y^2 = x^2 - a^2$ oder $x^2 - y^2 = a^2$.

No. 109. S. 250. Aus $AP^2 = AC.\,AK$, folgt, weil AC constant ist, $2AP\,.\,d\,.\,AP = AC\,.\,d\,.\,AK$ d. h. $2AP\,.\,PQ = AC\,.\,KL$ oder $KL : PQ = 2AP : AC$.

No. 110. S. 253. (Fig. 144.) Da $HJ^2 = HM^2 + MJ^2$ und $HN^2 = HM^2 + (MJ - JN)^2$ so wird $\left(\frac{HN}{HJ}\right)^2 = \frac{HM^2 + MJ^2 - 2MJ\,.\,JN + JN^2}{HM^2 + MJ^2}$ $= 1 - \frac{JN\,(2MJ - JN)}{HJ^2}; \left(\frac{HN}{HJ}\right) = 1 - \frac{MJ\,.\,JN}{HJ^2} + {}^1/_2\,\frac{JN^2}{HJ^2}$ und weil JN sehr klein ist $1 - \frac{HN}{HJ} = \frac{MJ\,.\,JN}{HJ^2}$ oder $HJ - HN = \frac{MJ\,.\,JN}{HJ}$.

No. 111. S. 253. Es ist beliebig $MJ = Q\xi + R\xi^2 + S\xi^3 \ldots.$ angenommen worden, hieraus folgt unmittelbar, weil $NJ = MJ - MN$ und $MN = Q\xi$ ist, $NJ = R\xi^2 + S\xi^3 + \text{etc.}$

Der Werth von MJ gilt allgemein für jeden Werth von ξ, mithin wird der entsprechende Werth in E für $\xi = 2\xi$ $2Q\xi + 4R\xi^2 + 8S\xi^3$ etc. in B für $E = -\xi$, $-Q\xi + R\xi^2 - S\xi^3$ und so $DJ = CH - MJ = P - Q\xi - R\xi^2 - S\xi^3$; $EK = CH - 2Q\xi - 4R\xi^2 - 8S\xi^3 - \text{etc.} = P - 2Q\xi - 4R\xi^2 - 8S\xi^3 - \text{etc.}$ $BG = P + Q\xi - R\xi^2 + S\xi^3 - \text{etc.}$

No. 112. S. 254. Nach Gl. 12. und 10. ist (Fig. 144) $\frac{t}{T}\,.\,GH =$

$$\left(1 + \frac{3S\xi}{2R}\right)\left(\xi\sqrt{1 + Q^2} - \frac{QR\xi^2}{\sqrt{1 + Q^2}}\right)$$

$$= \xi\sqrt{1 + Q^2} + \frac{3S\xi^2\sqrt{1 + Q^2}}{2R} - \frac{QR\xi^2}{\sqrt{1 + Q^2}} - \frac{3QS\xi^3}{2\sqrt{1 + Q^2}}$$

nach Gl. 10. — $HJ = -\xi\sqrt{1 + Q^2} - \frac{QR\xi^2}{\sqrt{1 + Q^2}}$ nach Gl. 8. 9. und 10.

$$+ \frac{2\,.\,MJ\,.\,NJ}{HJ} = \frac{2[Q\xi + R\xi^2 + S\xi^3 \ldots].[R\xi^2 + S\xi^3 \ldots]}{\xi\sqrt{1 + Q^2} + \frac{QR\xi^2}{\sqrt{1 + Q^2}}}$$

$$= \frac{2QR\xi^3 + 2QS\xi^4 + \ldots}{\xi\sqrt{1 + Q^2} + \frac{QR\xi^2}{\sqrt{1 + Q^2}}} = + \frac{2QR\xi^2}{\sqrt{1 + Q^2}} + \ldots.$$

mithin $\frac{t}{T}GH - HJ + \frac{2\,.\,MJ\,.\,NJ}{HJ} = \frac{3S\xi^2}{2R}\sqrt{1 + Q^2} \ldots.$ und nach 6. der Widerstand : Schwere $= \frac{3S\xi^2}{2R}\sqrt{1 + Q^2} : 2R\xi^2 = 3S\sqrt{1 + Q^2} : 4R^2$.

No. 113. S. 254. Für CH als Durchmesser ist nämlich $NJ = x$ die Abscisse, $HN = y$ die Ordinate, und da allgemein die Gleichung der Parabel $y^2 = px$ ist, $p = \frac{y^2}{x} = \frac{HN^2}{NJ} = \frac{\xi^2(1 + Q^2)}{R\,.\,\xi^2} = \frac{1 + Q^2}{R}$.

No. 114. S. 254. Im Anfang dieses Paragraphen haben wir gesehen, dass die Zeit, in welcher der Körper den Bogen $HJ = \xi\sqrt{1 + Q^2}$ beschreibt, im halben Verhältniss der Höhe NJ steht, welche der Körper

beim Falle von der Tangente HN in derselben Zeit beschreiben könnte. Nennt man jene kleine Zeit τ, so ist $\tau = \alpha \sqrt{NJ}$, wo α constant Die Geschwindigkeit, womit HJ beschrieben wird, ist daher

$$\frac{HJ}{\tau} = \frac{\xi \sqrt{1 + Q^2}}{\alpha \sqrt{NJ}} = \frac{\xi \sqrt{1+Q^2}}{\alpha \xi \sqrt{R}}, \text{ d. h. proportional } \frac{\sqrt{1+Q^2}}{\sqrt{R}}$$

und ihr Quadrat proportional $\frac{1 + Q^2}{R}$.

Bezeichnet man ξ durch Δx, so wird nach dem Taylor'schen Satze die obige Reihe allgemein:

$$y + \frac{dy}{dx} \Delta x + {}^1/_2 \frac{d^2y}{dx^2} \Delta x^2 + \frac{1}{2 \, . \, 3} \frac{d^3y}{dx^3} \Delta x^3 + \text{etc.}$$

also $Q = \frac{dy}{dx}$, $R = {}^1/_2 \frac{d^2y}{d^2x}$, $S = \frac{1}{2 \, . \, 3} \frac{d^3y}{dx^3}$ und die Dichtigkeit des Mittels proportional

$$\frac{\frac{d^3y}{dx^3}}{\frac{d^2y}{dx^2} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}} = \frac{d^3y}{d^2y \sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

No. **115**. S. **255** Die hier im Text erwähnte Methode besteht offenbar in der Anwendung des binomischen Lehrsatzes Es wird also

$$\sqrt{y^2 - 2x\xi - \xi^2} = (y^2 - 2x\xi - \xi^2)^{1/2}$$

$$= y - {}^1/_2 \frac{2x\xi}{y} - {}^1/_2 \frac{\xi^2}{y} + \frac{{}^1/_2 . (-{}^1/_2)}{1 \, . \, 2} \frac{1}{y^3} (2x\xi + \xi^2)^2 - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{y^5} (2x\xi + \xi^2)^3 \, . \, .$$

$$= y - \frac{x\xi}{y} - {}^1/_2 \frac{\xi^2}{y} - \frac{x^2\xi^2}{2y^3} - \frac{x\xi^3}{2y^3} - \frac{\xi^4}{8y^3} - \frac{x^3\xi^3}{2y^5} \dots$$

Fig. 217.

No. **116**. S. **257**. Setzt man $FA = X$, $AQ = Y$, $FG = x$, $GJ = y$, wo $JG \ddagger AQ$; so hat man $Y^2 = bX$, $y^2 = bx$ mithin $Y^2 - y^2 = (Y + y)(Y - y) = b(X - x)$ oder $PD \, . \, QD = b \, . \, JD$. Hierbei ist der Parameter b constant

No. **117**. S. **258**. Dieses Verhältniss ist nach der obigen Regel 13 §. 14. für den Punkt g, wo $\xi = o$, $3S \, . \sqrt{1 + Q^2} : 4R^2 =$

$$3 \frac{b^2}{a^4} \sqrt{1 + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{m}{n}\right)^2} : 4 \frac{b^4}{a^6}$$

$$3 \sqrt{a^2 + \frac{m^2}{n^2} a^2 - \frac{2mb^2}{n} + \frac{b^4}{a^2}} : 4 \frac{b^2}{a} = 3XY : 4VG = 3XY : 2YG.$$

No. **118**. S. **258**. Dieser Parameter ist nämlich nach § 14.

$$\frac{1 + Q^2}{R} = \frac{\frac{1}{a^2} \, . \, XY^2}{\frac{b^2}{a^3}} = \frac{XY^2}{VG}$$

No. **119**. S. **260**. Bei diesen letzten Formeln muss man sich aus §. 14. Aufgabe und Zusatz 1. erinnern, dass die Geschwindigkeit V proportional $\frac{\sqrt{1+Q^2}}{\sqrt{R}} = \frac{HT}{AC}$ ist.

No. **120**. S. **261**. Denkt man sich nämlich, in Bezug auf die Asymptoten XV und XT als coordinirte Axen, $XP = x$, $PG = y$ als Coordinaten des Punktes G und die Tangente GT gezogen; so ist die Subtangente $PT = x = PX$. Demnach wird, wenn man VG $\#$ XT zieht, erstere verlängert, bis VY = VG wird und hierauf XY zieht, im Viereck XYGT YG = XT und YG $\#$ XT, also auch XY $\#$ GT und XY = GT.

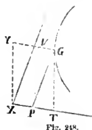


Fig. 218.

No. **121**. S. **262**. Bezeichnet man die Geschwindigkeit durch V, so ist V proportional $\sqrt{\frac{AH^2}{AJ}}$; also weil AH contant ist, AJ proportional $\frac{1}{V^2}$.

No. **122**. S. **262**. Die Dichtigkeit in A ist proportional $\frac{1}{AH}$, die in G proportional $\frac{1}{GT}$, die mittlere Dichtigkeit also proportional $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{AH} + \frac{1}{GT}\right] = \frac{\frac{1}{2}[AH + GT]}{AH \,.\, GT}$; und so die Dichtigkeit in A zur mittleren wie $\frac{1}{AH} : \frac{\frac{1}{2}(AH + GT)}{AH \,.\, GT} = GT : \frac{1}{2}(AH + GT)$.

No. **123**. S. **262**. Setzt man $XY = y$, $AJ = x$, so hat man die Gleichung der Hyperhel $xy^n =$ Constans; mithin wird $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{nx}$, die Subtangente $= +\, nx$ und $HX = x +$ Subtangente $= (n + 1)\,x = (n + 1)\,AJ$.

No. **124**. S. **264**. (Fig. 151.) Wird $AK = AE + EK = EK + KN = EN = c$, $AC = y$, $NK = AE = X$, $HN = Y$ gesetzt, so hat man $AC : AE = NH : EN$ d. h. $y : X = Y : x$ und $xy = XY =$ Constans. Es liegt demnach H auf dem conjugirten Zweige derjenigen Hyperhel, auf welcher C sich befindet.

No. **125**. S. **265**. Setzt man $JX = y$ und $AJ = x$, so ist die Gleichung der vorliegenden Parahel $\frac{x}{y^n} =$ Constans, während die Gleichung der vorhin erwähnten Hyperbel $x \,.\, y^n =$ Constans war. Offenbar hat man in der letzten Gleichung $-\, n$ statt $+\, n$ zu setzen, damit dieselbe in die vorhergehende Gleichung der Parabel übergehe. Durch eben diese Vertauschung erhält man den für den Parameter angegebenen Werth aus dem im Anfange dieses §. für die Hyperbel aufgestellten Werthe.

No. 126. S. 268. (Fig. 154.) Man kann hier 2AB . AP statt AP setzen, weil 2AB constant ist.

No. 127. S. 268. Es ist nämlich $DPQ = \frac{PQ \cdot DB}{2}$, also proportional PQ, weil $\frac{1}{2}DB$ constant ist.

No. 128. S. 269 Die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf ihren Mittelpunkt ist nämlich allgemein $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$. Im vorliegenden Falle ist aber $y = TG$, $x = DG$, $b = BD = DF = a$, $GT^2 = DG^2 - DF^2$.

No. 129. S. 273. (Fig. 160.) Offenbar ist V der mit dem Radius DA, aus D als Mittelpunkt beschriebene Bogen AG.

No. 130. S. 273. Eigentlich DET^2. Es ist aber $DET = \frac{1}{2}ET \cdot DE = \frac{1}{2}\frac{DE^2}{DA}V$, also, insofern DE = DB und auch DA constant sind, DET^2 proportional V^2.

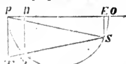


Fig. 249

No. 131. S. 276. Es ist unmittelbar TQ : PD = TS : PE. Fällt nun Q mit P zusammen, so geht gleichzeitig T in P über und man kann PS statt TS setzen; es entsteht daher

TQ : PD = PS : PE.

No. 132. S. 276. (Fig. 161.) OP und OQ stehen nach der Voraussetzung auf der Spirallinie perpendikulär, und wenn die Punkte P und Q einander unendlich nahe liegen, werden beide sich auf dem Kreise befinden, welcher aus O mit OP = OQ als Radius geschlagen ist. Indem man in diesem Falle den unendlich kleinen Bogen PQ statt seiner Sehne setzt, ergibt sich nach bekannter Weise PD : PQ = PQ : 2PO.

No. 133. S. 277. Bezeichnet man die gleichen Winkel durch α, so wird, in so fern man die kleinen Bogen PQ und Qr als gerade Linien behandeln darf, $PSQ = \frac{1}{2}PS \cdot PQ \sin\alpha$, $QSr = \frac{1}{2}QS \cdot Qr \sin\alpha$ und daher, weil PSQ = QSr, PQ : Qr = QS : PS.

No. 134. S. 277. (Fig. 161.) Es ist SV — SQ = VQ, also SP = SQ + VQ, wo VQ desto kleiner wird, je näher P und Q einander kommen. Demnach wird

$$SP - \sqrt{SP \cdot SQ} = SQ + VQ - \sqrt{SQ^2 + SQ \cdot VQ}$$
$$= SQ + VQ - \left[SQ + \frac{1}{2}\frac{SQ \cdot VQ}{SQ} - \frac{1}{8}\frac{SQ^2 \cdot VQ^2}{SQ^3}\right]$$
$$= \frac{1}{2}VQ + \frac{1}{8}\frac{VQ^2}{SQ}.$$

Je kleiner nun VQ wird, desto mehr wird man die folgenden, höhere Potenzen von VQ enthaltenden, Glieder gegen das erste vernachlässigen können, und wir erhalten daher den Grenzwerth von $SP - \sqrt{SP \cdot SQ} = \frac{1}{2}VQ$.

No. 135. S. 277. Diese Aehnlichkeit dürfte folgendermassen zu erläutern sein. Da SV = SP, so ist $\angle SVP = SPV$.

Je näher nun Q an P rückt, desto kleiner wird der Winkel PSQ, und im Fall dieser verschwindend klein geworden ist, wird

$\angle SVP = SPV = 90^0$, also 1. $\angle PVQ = PSO$.

Ferner ist im letztern Falle $\angle SPV = QPO = 90^0$, und zieht man hiervon ab $\angle SPQ = SPQ$, so bleibt 2. $\angle QPV = OPS$.

Es sind daher in den Dreiecken VPQ und OPS zwei Winkel einander gleich, mithin auch $\angle POS = PQV = SVQ$.

No. **136**. S. 277. Siehe erstes Buch, § 18, Zusatz 1.

No. **137**. S. 278. Es wird alsdann $\frac{1}{2}VQ = \frac{1}{2}PQ$ oder $VQ = PQ$. Der Körper nähert sich daher dem Centrum um eben so viel, als er sich fortbewegt. Die Bewegung erfolgt demnach längs PS.

No. **138**. S. 278. Dies Verhältniss ist mit dem $PQ : VQ$ identisch. (Gl. 8.)

No. **139**. S. 279. Das Verhältniss $PS : OS$ ist nach dem Lehrsatz $= PV : VQ$. In so fern nun $\angle PSV$ sehr klein ist, wird PV gleich dem aus S mit SP geschlagenen Bogen, und daher jenem Winkel proportional, während VQ die entsprechende Annäherung des Körpers zum Centrum S bezeichnet. Hieraus ergiebt sich, wenn der Winkel, welchen der Körper beschreiben muss, um von der einen Peripherie zur andern zu gelangen, durch α und der Abstand beider Peripherien durch a bezeichnet wird, $\alpha : PSV = a : VQ$ oder $\alpha = a \cdot \frac{PSV}{VQ} = a\,\frac{VP}{VQ} = a\,\frac{PS}{OS}$.

Das Verhältniss $OP : OS$ ergiebt sich als der Zeit proportional unmittelbar aus Zusatz 5.

No. **140**. S. 279. (Fig. 162.) Da nämlich

$AS : BS = BS : CS = CS : DS =$ etc. so wird auch

$AS^{3/2} : BS^{3/2} = BS^{3/2} : CS^{3/2} = CS^{3/2} : DS^{3/2} =$ etc. Setzt man nun etwa $\frac{AS^{3/2}}{BS^{3/2}} = q$, so wird $AS^{3/2} + BS^{3/2} + CS^{3/2} + DS^{3/2} + \ldots$ in inf. $=$

$$AS^{3/2}\left[1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \ldots \text{in inf.}\right]$$

und so $AS^{3/2} + BS^{3/2} + CS^{3/2} \ldots$ in inf.$: AS^{3/2} = q : q - 1 = AS^{3/2} : AS^{3/2} - BS^{3/2}$

$$= AS^{3/2} : AS^{3/2} - (AS - AB)^{3/2}$$

$= AS^{3/2} : AS^{3/2} - AS^{3/2} + \frac{3}{2}\sqrt{AS} \cdot AB \ldots = AS : \frac{3}{2}AB = \frac{2}{3}AS : AB$ um so näher, je kleiner AB ist, indem alsdann die höhern Potenzen von AB vernachlässigt werden können.

No. **141**. S. 280. Die Centripetalkraft ist proportional $\frac{1}{SP^{n+1}}$, ferner das Stück TQ proportional $\frac{1}{SP^{n+1}} \cdot t^2$ (wie in §. 22., wo t die Zeit bezeichnet), also t umgekehrt proportional $\sqrt{TQ \cdot SP^{n+1}} = \sqrt{PQ^2 SP^n}$ (§. 20.) $= PQ \cdot SP^{1/2 n}$. Ferner der Widerstand in P proportional $\frac{Rr}{PQ^2 \cdot SP^n}$. Da nun $PQ : QR = \frac{1}{SP^{1/2 n}} : \frac{1}{SQ^{1/2 n}} = QS : \sqrt{SP^n \cdot QS^{2-n}}$ und $PQ : Qr = QS : SP$, so wird $PQ : Rr = QS : SP - \sqrt{SP^n \cdot QS^{2-n}}$

Es ist aber $PS = QS + VQ$ und $\sqrt{PS^n . QS^{2-n}} = \sqrt{(QS + VQ)^n . QS^{2-n}}$ $= [QS^{\frac{1}{2}n} + \frac{1}{2}nQS^{\frac{1}{2}n-1} VQ + \ldots] QS^{1-\frac{1}{2}n} = QS + \frac{1}{2}nVQ + \text{etc.}$ Je kleiner nun VQ wird, desto eher wird man die folgenden höheren Potenzen gegen die erste vernachlässigen können. Es ergiebt sich also zuletzt $PS - \sqrt{PS^n . QS^{2-n}} = QS + VQ - QS - \frac{1}{2}nVQ = (1 - \frac{1}{2}n)VQ$

Der Widerstand wird hiernach proportional

$$\frac{(1 - \frac{1}{2}n)VQ}{PQ . SP^n . QS} = \frac{(1 - \frac{1}{2}n)OS}{OP . PS^n . QS} = \frac{(1 - \frac{1}{2}n)OS}{PO . PS^{n+1}},$$ indem man $QS = PS$ setzt. Da nun auch der Widerstand proportional $\frac{1}{SP^n} \times$ Dichtigkeit, so wird die Dichtigkeit proportional $SP^n \times$ Widerstand, also $\frac{1}{SP}$.

No. 142. S. 288. (Fig. 165.) AH drückt die Dichtigkeit, d. h. die Menge materieller Theile in A aus, deren jedes nach der Voraussetzung durch eine, $\frac{1}{AS}$ proportionale, Kraft gegen S hin gezogen wird; daher muss $AH . \frac{1}{AS}$ dasjenige ausdrücken, was man das specifische Gewicht nennt. Da ferner $SA : SB = SB : SC = SC : SD =$ etc., so ist auch

$$SB - SA : SB = SC - SB : SC = SD - SC : SD = \text{etc},$$

d. h. $AB : BC : CD : \text{etc.} = SB : SC : SD : \text{etc.}, = SA : SB : SC : \text{etc.}$ und so $\frac{1}{AS}$ proportional $\frac{1}{AB}$, $\frac{1}{BS}$ proportional $\frac{1}{BC}$, $\frac{1}{CS}$ proportional $\frac{1}{CD}$ u. s. w.

No. 143. S. 289. Ist $SQ : SE = SE : SA$, oder $\log SQ - \log SE = \log SE - \log SA$, so wird, weil $EeqQ = n [\log SQ - \log SE]$ und $EeaA = n [\log SE - \log SA]$, wo n eine beliebige Constante bezeichnet, Fläche $EeqQ = EeaA$.

No. 144. S. 291. (Fig. 167.) Eine harmonische Progression bilden die Glieder $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha + \beta}$ $\frac{1}{\alpha + 2\beta}$, $\frac{1}{\alpha + 3\beta}$, etc.; soll also $SA = \frac{1}{\alpha}$, $SD = \frac{1}{\alpha + \beta}$, $SF = \frac{1}{\alpha + 2\beta}$ sein, so wird $\frac{1}{SA} - \frac{1}{SD} = \frac{1}{SD} - \frac{1}{SF}$ oder 1. $\frac{SD - SA}{SA} = \frac{SF - SD}{SF}$. Da nun ferner $Aa : Dd = SD : SA$ und $Dd : Ff = SF : SD$, so wird 2. $Aa - Dd = \frac{SD - SA}{SA} \cdot Dd$ und $Dd - Ff = \frac{SF - SD}{SF} \cdot Dd$, also nach 1. $Aa - Dd = Dd - Ff$. Aus $thlx = xlnz$ folgt $St : Sx = Sx : Sz$ nach Bem. 143.

No. 145. S. 291. Wenn n, n^{I}, n^{II}, n^{III}, n^{IV} constante Zahlen bezeichnen, so hat man hier die Schwere $= \frac{n}{SA^2}$, $\frac{n}{SB^3}$, etc. die Dichtigkeit $= n^{I}AH$, $n^{I}BJ$, etc. das specif. Gewicht $= \frac{n^{II}AH}{SA^3}$, $\frac{n^{II}BJ}{SB^3}$, etc.

die Drucktheile $= \frac{n^{III}AH \,.\, AB}{SA^3}, \frac{n^{III}BJ \,.\, BC}{SB^3}$ etc. $= \frac{n^{IV}AH}{SA^2}, \frac{n^{IV}BJ}{SB^2}$ etc. weil $AB : BC$ etc, $= SA : SB$ etc. Hiernach $AH - BJ = tu = \frac{n^{IV}AH}{SA^2}$

$$BJ - CK = wu = \frac{n^{IV} \,.\, BJ}{SB^2} \text{ etc.}$$

und $tu : uw : wx$ etc. $= \frac{AH}{SA^2} : \frac{BJ}{SB^2} : \frac{CK}{SC^2}$: etc. Da nun für die Rechtecke tp, uq, wr die Verhältnisse $tp : nq : wr = th \,.\, tu : uw \,.\, iu : wx \,.\, rx = th \,.\, \frac{AH}{SA^2} : ui \,.\, \frac{BJ}{SB^2} : rx \,.\, \frac{CK}{SC^2} = \frac{Aa}{SA} : \frac{Bb}{SB} : \frac{Cc}{SC}$ (nach §. 30., Gl. 1.) stattfinden; so muss nach der Analogie mit §. 30., wie dort Gl. 2. hier die Gleichung $\frac{Aa}{SA} - \frac{Dd}{SD} = \frac{Dd}{SD} - \frac{Ff}{SF}$ als richtig erwiesen werden. Da nun aber allgemein $Aa \,.\, AS = Dd \,.\, DS = Ff \,.\, FS$ also $Aa = \frac{Dd \,.\, DS}{AS}$ $Ff = \frac{Dd \,.\, DS}{FS}$; so wird durch Substitution dieser Werthe von Aa und Ff die vorstehende Gleichung übergehen in $\frac{1}{SA^2} - \frac{1}{SD^2} = \frac{1}{SD^2} - \frac{1}{SF^2}$ welche hier vorausgesetzt wird.

No. **146.** S. **292.** Wir verfahren, wie in der vorhergehenden Bemerkung 145, vergrössern aber die Exponenten um 1; alsdann erhalten wir die Bedingung $\frac{1}{SA^3} - \frac{1}{SB^3} = \frac{1}{SB^3} - \frac{1}{SD^3}$ welche hier vorausgesetzt wird.

No. **147.** S. **292.** Wegen der constanten Schwere sind die Drucktheile nach der Reihe: $AH \,.\, AB$, $BJ \,.\, BC$, $CK \,.\, CD$, etc. oder, weil nach der Voraussetzung $SA - SB = SB - SC = SC - SD =$ etc. $= AB = BC = CD =$ etc. so werden sie $AH \,.\, AB$, $BJ \,.\, AB$, $CK \,.\, AB$ etc.

Die Dichtigkeit AH ist mithin proportional $[AH + BJ + CK + \text{etc.}]\,AB$
BJ „ „ „ $[BJ + CK + \text{etc.}]\,AB$
CK „ „ „ $[CK + \text{etc.}]\,AC$

und wenn n eine Constante bezeichnet $AH - BJ = n \,.\, AH \,.\, AB$ oder $BJ = AH\,(1 - n \,.\, AB)$; $BJ - CK = n \,.\, BJ \,.\, AB$ oder $BJ = CK : (1 - n \,.\, AB)$ also $BJ^2 = AH \,.\, CK$ oder $AH : BJ = BJ : CK$.

No. **148** S. **292**. Hier wird die Schwere $= nAS$, etc. die Dichtigkeit $= n^I \,.\, AH$, etc. das spec. Gewicht $= n^{II}AH \,.\, AS$, etc. der Drucktheil $= n^{III}AH \,.\, AS^2$, etc, $tu = AH - BS = n^{III}AH \,.\, AS^2$; $uw = BJ - CK = n^{III}BJ \,.\, BS^2$; $tu : uw = AH \,.\, AS^2 : BJ \,.\, BS^2$; $tp : nq = th \,.\, AH \,.\, AS^2 : ui \,.\, BJ \,.\, BS^2$; $tp : nq = Aa \,.\, AS^3 : Bb \,.\, BS^3$ (§. 30 Gl. 1.) Es muss mithin $Aa \,.\, AS^3 - Bb \,.\, BS^3 = Bb \,.\, BS^3 - Cc \,.\, CS^3$ d. h. $\frac{Bb \,.\, BS}{AS} AS^3 - Bb \,.\, BS^3 = Bb \,.\, BS^3 - \frac{Bb \,.\, BS}{CS} \,.\, CS^3$ oder $AS^2 - BS^2 = BS^2 - CS^2$ sein, wie vorausgesetzt.

No. **149**. S. **292**. Hier ist die Dichtigkeit $= n . AH$, die Schwere $= \frac{n^{I}}{AS^2}$ das spec. Gewicht $= \frac{n^{II}AH}{AS^2}$ die drückende Kraft $= \frac{n^{III}AH . AB}{AS^2}$ $= \frac{n^{IV}AH}{AS}$ also $n^{V} . \frac{AH^3}{AS^3} = n^{VI}AH^4$ und so $AH = \frac{n^{VII}}{AS^3}$; hier sind n, n^{I}, ... n^{VII} constant.

No. **150**. S. **292**. Hier ist $n^{V}\frac{AH^3}{AS^3} = n^{VI}AH^5$, also $AH = \frac{n^{VII}}{AS^{3/2}}$.

Aehnlich beim folgenden Beispiel $n^{V} . \frac{AH}{AS} = n^{VI}AH^2$, also $AH = \frac{n^{VII}}{AS}$.

No. **151**. S. **296**. Bezeichnen M, P, T, L die Menge der Materie, das Gewicht, die Zeit und die Länge bei einem Pendel, m, p, t, l dieselben Grössen bei einem zweiten; so ist nach dem Lehrsatz, §. 34. für $L = l$, $T^2 : t^2 = \frac{M}{P} : \frac{m}{p}$, für $M = m$ und $P = p$, $T^2 : t^2 = L : l$ daher überhaupt $T^2 ; t^2 = \frac{ML}{P} : \frac{ml}{p}$. Hieraus folgt $M : m = \frac{P . T^2}{L} : \frac{pt^2}{l}$, wie im Zusatz 5., ferner wird für $T = t$ und $M = m$, $L : l = P : p$, wie in Zusatz 4.

No. **152**. S. **302**. Ist x die Geschwindigkeit, c eine Constante, so hat man nach der Voraussetzung $R = cx^2$, mithin $dR = 2cxdx$, und da x der in einem gegebenen Zeittheilchen beschriebene Weg, und dx, das Increment der Geschwindigkeit der antreibenden Kraft proportional ist, wenn wir das Zeittheilchen durch dt bezeichnen dR proportional $x (V - R)$.

No. **153**. S. **302**. (Fig. 170.) Fällt RG auf QE, so wird $OR = OQ$ und $JGH = JEF$ und daher die Gleichung $\frac{OR}{OQ} \cdot JEF = JGH$ identisch.

Fällt RG auf CT, so wird $OR = OC$; $JGH = JLT$, also $\frac{OC}{OQ} \cdot JEF = JLT$, welche Gleichung nach 1. richtig ist.

No. **154**. S. **303**. Aus der Proportion dieses Zusatzes folgt $\frac{OR}{OQ} \cdot JEF = PJHR$, also $Y = \frac{OR}{OQ} \cdot JEF - JGH = PJHR - JGH = PJGR$ und das Differential des Widerstandes $= PJGR - Y = 0$.

No. **155**. S. **304**. (Fig. 171.) Setzt man $MC = x$, also $MN = dx$, so wird die Summe aller MN . CM

$$\int_{Ca}^{CA} xdx = \tfrac{1}{2}(CA^2 - Ca^2) = \tfrac{1}{2}(CA + Ca)(CA - Ca) = \tfrac{1}{2}aB . Aa.$$

Setzt man nun eben so $DK = y$, $BD = x$, $Dd = dx$, so wird die Summe aller $DK . Dd = \int_{a}^{Ba} ydx =$ d. h. gleich der Fläche BKVTa. Da nun jene Summen einander gleich, auch $BKVTa = \tfrac{1}{2}aB . Aa$.

No. 156. S. 305. Setzt man kurz die Geschwindigkeit DE im nicht widerstehenden Mittel = Y, die entsprechende Geschwindigkeit DK im widerstehenden Mittel = y; so hat man nahe bei y : Y = Ba : BA, oder $y = \frac{Ba}{BA} Y$ und so BKVTa gleich einer Ellipse.

No. 157. S. 305. Da die Fläche der halben Ellipse = $\frac{1}{2}$OV . BOπ, wo π die Ludolfsche Zahl, also genähert = $\frac{22}{7}$ ist; so wird

$$Aa . BO : OV . BO = \tfrac{1}{2}OV . BO . \pi : OV . BO$$

oder

$$Aa : OV = \tfrac{1}{2}\pi : 1 = 11 : 7.$$

No. 158. S. 305. Es wird nämlich $\frac{7}{11}$Aa : CB = OV : CB, wo CB der Pendellänge gleich ist und die Schwerkraft ausdrückt, während OV den Widerstand in O bezeichnet.

Fig. 250.

No. 159. S. 305. Setzt man nämlich VO = x, VL = x', OB = y, KL = y'; so ist nach der Voraussetzung DK = c . DE² = c . DB . Da wo c eine Constante bezeichnet. Da nun DK = VO — VL = x — x'; DB = BO — KL = y — y' und da = aO + OD = y + y', so wird $x - x' = c\,(y^2 - y'^2)$ die Gleichung einer Parabel, da für x' = o und y' = o $x = cy^2$ wird.

No. 160. S. 307. Setzen wir die im Texte erhaltenen mittleren Differenzen der beschriebenen Bogen $\frac{1}{656} = a$, $\frac{1}{242} = b$, $\frac{1}{69} = c$, $\frac{4}{71} = d$, $\frac{8}{37} = e$, $\frac{24}{29} = f$, so erhalten wir deren Verhältnisse, welche die Widerstände andeuten: $\frac{a}{a} = 1$, $\frac{b}{a} = 2{,}7107$, $\frac{c}{a} = 9{,}5072$

$$\frac{d}{a} = 36{,}9570,\ \frac{e}{a} = 141{,}8378,\ \frac{f}{a} = 542{,}8965.$$

Die auf einander folgenden Schwingungen seien $A = \frac{15}{4}$, $B = \frac{15}{2}$, C = 15, D = 30, E = 60, F = 120 und es wird offenbar $(A : A)^2 = 1$, $(B : A)^2 = 4$, $(C : A)^2 = 16$, $(D : A)^2 = 64$, $(E : A)^2 = 256$, $(F : A)^2 = 1024$. Während diese Zahlen nach einander im constanten Verhältniss 1 : 4 stehen, nähern sich die vorher aufgeführten Zahlen diesem Verhältniss, indem a : b = 1 : 2,7107, b : c = 1 : 3,5057, c : d = 1 : 3,8873 d : e = 1 : 3,8381, e : f = 1 : 3,8276.

No 161. S. 308. Betrachtet man den Widerstand der Kugel als aus drei Theilen bestehend, von denen der erste der Geschwindigkeit V selbst, der zweite ihrer $\frac{3}{2}$ten Potenz, der dritte ihrer 2ten Potenz proportional ist; so ist der Coëfficient des ersten nach §. 40., Zusatz = $\frac{7}{11}$,

„ „ „ „ dritten Theiles „ „ = $\frac{3}{4}$

und weil $V^{3/2} = \sqrt{V . V^2}$, der Coëfficient des zweiten Theiles = $\sqrt{\frac{7}{11} . \frac{3}{4}}$ = 0,69085, oder näherungsweise = $\frac{7}{10}$, wie im Texte.

No. **162**. S. **309**. Da die Radien dem Bogen proportional sind, haben wir $121 : 119^5/_{29} = 126 : x$, $x = 124 + {}^{2,5}/_{29} = 124^3/_{31}$ sehr nahe.

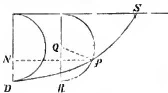


Fig. 251

No. **163**. S. **309**. Für den Umwälzungswinkel $PQN = z$ und den Radius des erzeugenden Kreises $PQ = r$, ist bei der Cycloïde DPS, $DN = x =$ sinus versus $z = 2r \sin {}^1/_2 z^2$, $DP = 4r \sin {}^1/_2 z$, $DS = 4r \sin {}^1/_2 \pi = 4r =$ der Pendellänge; also

$2r \sin {}^1/_2 z^2 : 4r \sin {}^1/_2 z = 4r \sin {}^1/_2 z : 2 \,.\, 4r$ wie im Text.

No. **164**. S. **309**. Wir nehmen an, dass der Verlust an Bewegung der Kugel ihrem zurückgelegten Wege proportional sei. Wir haben daher nach dem Vorhergehenden die Proportion $30{,}556 : 3{,}4375 = \frac{1}{376{,}02} : x$ und hieraus $x = \frac{1}{3342}$. In der ersten Ausgabe stand $\frac{1}{3261}$.

No. **165**. S. **311**. Wie aus dem Folgenden hervorgeht, kann Newton unter den 5 Schwingungen nur doppelte verstanden haben, welche aus zweimaligen Fallen und Steigen zusammengesetzt waren.

No. **166**. S. **319**. Ist die Geschwindigkeit $= c$, der Abstand der Theilchen $= r$, die Quantität der Materie $= q$, der Durchmesser $= d$, die Dichtigkeit $= \Delta$ und sind n, n', n'', n''' constante Zahlen; so ist der Widerstand $R = n \,\frac{c^2 q}{r}$. Da nun $r = n' \,.\, d$; $q = n''\Delta d^3$, so wird

$$R = n \,.\, \frac{c^2 n'' \Delta d^3}{n' d} = n''' \,.\, c^2 \,.\, d^2 \,.\, \Delta.$$

No. **167**. S. **320**. Bezeichnen d, e, f, g respective die Widerstände, welche die Körper D, E, F, G erleiden, so ist $d : e = T : V$; $f : g = T : V$, also $d : f = e : g$.

No. **168**. S. **322**. Drückt man die Intensität der Kraft, welche das Theilchen des Mittels längs FB ausübt, durch LB aus; so kann man diese in die Seitenkräfte LD und BD zerlegen. Die letztere wirkt längs der Tangente BD und wird die Kugel gar nicht bewegen, die erstere hingegen wirkt perpendikulär gegen die Kugel längs BC und sie verhält sich zur ursprünglichen, perpendikulär gegen den Cylinder wirkenden Kraft, wie $LD : BL = BE : BC$. Wenn man nun in der Figur des Textes Dm auf BL perpendikulär fällt, so kann man die eben gefundene Kraft DL in die beiden Seitenkräfte nD und mL zerlegen. Erstere wirkt längs $B\beta \mp Dm$ und wird, weil sie von B gegen β wirkt, durch eine ihr entsprechende, aus dem in β aufstossenden Theilchen hervorgehenden Kraft aufgehoben. Die andere Kraft mL allein wird das Bestreben haben, die Kugel längs FB zu bewegen und sie verhält sich zu DL, wie $mL : DL = BE : BC$; mithin wird $mL : BL = BE^2 : BC^2$.

No. 169. S. 323. Fällt man in der Figur des Textes das Perpendikel Hk auf CA und setzt man $Hk = bA = EC = y$, $Ck = x$, also $bH = Ak = AC - x$; so wird $BE^2 = BC^2 - CE^2 = AC^2 - y^2$ und die Gleichung $bH = \frac{BE^2}{BC}$ geht über in $AC - x = \frac{AC^2 - y^2}{AC}$, d. h. in $y^2 = AC \cdot x$, die Gleichung der Parabel. Ferner ist der Cubikinhalt des Paraboloïds $= \int_0^{AC} y^2 \pi dx = \int_0^{AC} AC\pi x dx = \frac{1}{2} AC^3 \cdot \pi$, dagegen der Inhalt des Cylinders $= AC^3 \cdot \pi$; also das Paraboloïd $= \frac{1}{2}$ Cylinder.

No. 170. S. 323. Setzt man den Widerstand, welchen das Mittel gegen einen, über CEB zur Höhe OS construirten Cylinder ausüben würde, $= p \cdot CEB$, wo p eine Constante ist; so hat man nach §. 45. den gegen den ganzen Kegel CBS ausgeübten Widerstand

$$1. \quad = p \cdot CEB \cdot \frac{CO^2}{CS^2},$$

den gegen den kleinen Kegel FGS ausgeübten

$$2. \quad = p \cdot FG \cdot \frac{CO^2}{CS^2},$$

endlich den gegen die Fläche FG ausgeübten Widerstand

$$3. \quad = p \cdot FG.$$

Hiernach wird der, gegen den abgekürzten Kegel ausgeübte Widerstand

$$4. \quad = p \cdot \left[\frac{CO^2}{CS^2}(CEB - FG) + FG\right]$$

Setzt man nun $CO = b$, $OD = a$, $DS = x$, so wird $CEB : FG = (a + x)^2 : x^2$, also

$$5. \quad \text{die Fläche } FG = \frac{x^2}{(a + x)^2} \cdot CEB$$

und ausserdem $\quad 6. \quad CS^2 = b^2 + (a + x)^2.$

Nach §. 4. ist daher der Widerstand

$$= p \cdot CEB \left[\frac{b^2}{b^2 + (a + x)^2}\left(1 - \frac{x^2}{(a + x)^2}\right) + \frac{x^2}{(a + x)^2}\right],$$

und da p und CEB beide constant, so muss x so bestimmt werden, dass nach gehöriger Reduction

$$7. \quad F(x) = \frac{b^2 (b^2 + x^2)}{b^2 + (a + x)^2}$$

ein Minimum werde. Wir erhalten demnach durch Differentiation

$$8. \quad F'(x) = \frac{2b^2 a\,[ax + x^2 - b^2]}{[b^2 + (a + x)^2]^2} = \frac{Z}{N},$$

Aus $F'(x) = 0$ oder $Z = 0$ folgt

$$9. \quad x = -\tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} a^2 + b^2}$$

also $QS = QD + DS = \frac{1}{2} a + x = \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + b^2} = CQ$. Ferner wird aus 8., weil $Z = 0$,

$$10. \quad F''(x) = \frac{dZ}{N} = \frac{2b^2 a\,(a + 2\,x)}{[b^2 + (a + x)^2]^2} = \frac{4b^2 a \sqrt{\tfrac{1}{4} a^2 + b^2}}{[b^2 + (\tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} a^2 + b^2})^2]^2}$$

also $F^{II}(x)$ positiv und für den in 9. gefundenen Werth von x, $F(x)$ ein Minimum. Nimmt die Höhe OD mehr und mehr ab, so wird $CQ = QS$ mehr und mehr OC gleich werden und wenn die Höhe a verschwindend klein geworden ist, wird $QS = OC$, $\angle OCS = OSC = 45^0$ und $\angle CSB = 90^0$.

No. 171. S. 324. Stellt $GO \mp BR$ den Widerstand dar, welchen das Mittel gegen GH ansüben würde, so drückt, wenn man OK auf GR und KL auf OG perpendicnlär zicht, OL den gegen GB ausgeübten Widerstand des Mittels aus. Da nun GR parallel der Tangente in N ist, so wird MN . LO den MN entsprechenden Widerstand darstellen und es ist Bedingung, dass derselbe ein Minimum werde, oder da MN gegeben ist, muss

$$1.\quad LO = \text{Minimum}$$

werden. Nun ist $\quad 2.\ LO : OK = OK : OG$

also $\quad LO^2 : OK^2 = OK^2 : OG^2,\ LO^2 : LO\,.\,OG = OK^2 : OG^2$

$3.\ LO : OG = OK^2 : OG^2$. Da aber $\triangle\, GOK \sim GBR$, so ist

$$OK : OG = GB : GR$$

also $\quad 4.\ LO : OG = GB^2 : GR^2$.

Die Linien OG und GB sind gegeben, daher muss, wenn LO ein Minimnm sein soll, GR^2 ein Maximum, oder weil

$$5.\quad GR^2 = GB^2 + BR^2$$

BR ein Maximnm werden. Bezeichnet nun a eine später zu bestimmende Constante, so muss $MN\,.\,LO - a\,.\,BR$ ein Minimum werden. Hieraus ergiebt sich durch Differentiation, weil MN und a constant sind,

$6.\ \frac{d\,.\,LO}{d\,.\,BR} = \frac{a}{MN}$, aus 4. oder $OL\,.\,GR^2 = OG\,.\,GB^2$, weil OG und GB constant sind,

$$7.\quad \frac{d\,.\,GR}{d\,.\,OL} = -\frac{GR}{2\,.\,LO}$$

nnd aus 5. $\quad 8.\ \frac{d\,.\,BR}{d\,.\,GR} = \frac{GR}{BR}$.

Multiplicirt man nun die drei Gleichungen 6., 7. und 8. in einander, so erhält man $\quad 9.\ a\,.\,GR^2 = -2\,MN\,.\,LO\,.\,BR$.

Denkt man sich nun N nach G verlegt, so wird nach dem Schluss der vorbergehenden Bemerkung $GR^2 = GP^2 = GB^2 + BP^2 = 2\,.\,GB^2$; $MN = GB$, $BR = BP = BG$, $LO = \frac{1}{2}GO$, also nach 9. $2a\,.\,GB^2 = -GB^2\,.\,GO$ oder $a = -\frac{1}{2}GO$ nnd es geht Gl. 9. mittelst dieses Werthes von a über in $\quad 10.\ GO\,.\,GR^2 = 4MN\,.\,LO\,.\,BR$.

Da aber nach 4. $GO = \frac{LO\,.\,GR^2}{GB^2}$, so wird aus 10. $GR^4 = 4MN\,.\,BR\,.\,GB^2$

oder $\quad 11.\ MN : GR = GR^3 : 4\,.\,BR\,.\,GB^2$.

No. 172. S. 325. (Fig. 174.) Drückt CB die Bewegung aus, welche in der Zeit AB durch den Widerstand verloren geht, so wird der ganze Weg, nach §. 7., Zusatz 1., durch CBEF ausgedrückt. Die dann stattfindende Bewegung wird durch EF bezeichnet, also ist FG verloren ge-

gangen. Soll BC den Widerstand im Anfange der Zeit BE, BH den Widerstand am Ende derselben ausdrücken; so muss, weil der Widerstand dem Quadrate der Bewegung proportional ist, wenn $BH = \alpha . EF^2$ ist, auch $BC = \alpha . BC^2$ sein, wo α constant. Nun ist $BH : EF = AB : AE = EF : BC$, also $BH = \frac{1}{BC} . EF^2$ und auch $BC = \frac{1}{BC} . BC^2$. Im ersteren Falle hat also der Widerstand den Theil CH verloren.

No. 173. S. 826. Nach Zusatz 6. ist $AB = T$, $BE = t$, $BC = M$, mithin $EF = \frac{AB}{AE} BC = \frac{T}{T+t} M$, $GF = BC - EF = \frac{t}{T+t}.M$. Ferner ist $BCGE = BC . BE = Mt$, $BCFE = \int_{AB}^{AE} EF . dAE = \int_{T}^{t+T} MT \frac{dt}{t} = \log \left(\frac{T+t}{T}\right)$ also $BCFE : BCGE = \log\left(\frac{T+}{T}\right) : \frac{t}{T}$. Dieser Logarithme ist ein hyperbolischer, daher muss der Briggsche Logarithme $\log\left(\frac{T+t}{T}\right)$ durch die im Texte angeführte Zahl, d. h. das Reciproke des Modulus der Briggschen Logarithmen multiplicirt werden, um denselben in einen hyperbolischen zu verwandeln.

No. 174. S. 827. Bezeichnet t die Zeit, c und c' die Geschwindigkeiten, h und h' die Wege, $g = 15^5/_8$ Fuss die bekannte constante Fallhöhe; so ist $h = gt^2$, $c = \frac{dh}{dt} = 2gt$, also auch $c = 2\sqrt{gh}$ und eben so $c' = 2\sqrt{gh'}$, mithin $c : c' = \sqrt{h} : \sqrt{h'}$ oder $h : h' = c^2 : c^2$.

Entspricht nun der Geschwindigkeit c der Querschnitt s

„ „ c' „ „ s',

so ist bei gleicher Zeit t im ersten Falle die Wassermenge $m = cst$, im zweiten Falle $m' = c's't$ und wenn $m = m'$, $cs = c's'$ oder $c : c' = s' : s$.

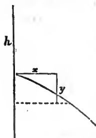


Fig. 252.

No. 175. S. 830. Bei einer Fallhöhe $= h$ ist die Geschwindigkeit, nach der vorhergehenden Bemerkung, weil die Oeffnung sehr klein ist, $c = 2\sqrt{gh}$. Diese hat man hier horizontal anzunehmen, und es wird in einer kleinen Zeit t ein Weg

1. $x = ct = 2t\sqrt{gh}$

beschrieben. Während derselben Zeit fällt aber der Wasserkörper, vermöge der Schwere, um eine Länge

2. $y = gt^2$.

Eliminirt man t aus 1. und 2., so wird

3. $x^2 = 4hy$,

die Gleichung einer Parabel, deren Parameter $= 4h$ ist. In vorliegendem Falle hat man $h = 20''$, mithin den Parameter $= 80''$ und für $y = 20''$, $= 40''$.

No. 176. S. 832 (Fig. 176.) Aus $JO^2 = JH . JG$, oder $JH : JO$

$= JO : JG$ folgt $JH : JO - JH = JO : JG - JO$ oder $JH : HO = JO : OG$; hierauf $HO + OG : 2HO = JH + JO : 2JH$ und auch $JH + JO : 2JH = JO + JG : 2JO = AB + EF : 2EF$.

No. **177**. S. **335**. (Fig. 178.) Das neben dem Kreise vorüberfliessende Wasser habe die nach unten gerichtete Geschwindigkeit h^1, und dabei ist der Querschnitt des Raumes, wodurch es fliesst $= (EF^2 - PQ^2)\,\pi$. Die nach oben gerichtete Geschwindigkeit des Kreises sei **h**, wobei sein Querschnitt $= PQ^2 . \pi$ ist. Bei gleicher Dauer beider Bewegungen haben wir daher $(EF^2 - PQ^2)\,\pi h^1 = PQ^2 \pi h$, also $h : h^1 = EF^2 - PQ^2 : PQ^2$ und hieraus $h : h + h^1 = EF^2 - PQ^2 : EF^2$.

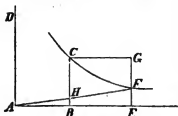


Fig. 258.

No. **178**. S. **341**. Es bezeichne d den Durchmesser der Kugel, s den Weg, welchen sie zurücklegt, während sie die Hälfte ihrer Bewegung verliert. Alsdann ist $EF = \frac{1}{2}BC$, und weil $AB . AC = AE . EF$, $AB = \frac{1}{2}AE$.

Da nun a. a. O. $AB = T$, $BE = t$ war, $AE = 2AB = 2T = T + t$, oder $t = T$. Ist die anfängliche Bewegung $BB = M$, so hat man nach §. 47, Zusatz 7.

$$s : Mt = 2{,}30258 \ldots . \times \log 2 : 1.$$

In diesem Falle wird $AB . BB = BCGE = Mt$, und da allgemein $BCGE : AB . BC$, wie der Weg, welchen die Kugel mit ihrer anfänglichen Bewegung BC in der Zeit $t = BE$ zurückgelegt hätte, zu dem Wege, welchen sie in der Zeit T zurücklegen würde, während welcher ihre ganze Bewegung durch den Widerstand des Mittels aufgehoben werden könnte; so sind beide Wege in diesem Falle einander gleich, also nach diesem Paragraphen $= \frac{8}{3}d$. Demnach geht vorstehende Proportion über in $s : \frac{8}{3}d = 2{,}30258 \ldots . \times 0{,}30103 : 1$, woraus $s = 1{,}84d$, d. h. $s \angle 2d$ folgt.

No. **179**. S. **342**. (Fig. 143.) Es bezeichne V die Geschwindigkeit, welche die Kugel bei ihrem Falle in zusammengedrückter Flüssigkeit während der Zeit P erlangt haben würde. Es sei nun

$$1. \quad AP : AC = V : H,$$

und man ziehe durch den Punkt T der Hyperbel AVZ, $\pi\tau \mp AC$, bis die erstere die Hyperbel in τ und die Asymptote DC in π schneidet. Da nun aus $TX^2 = DX^2 - DA^2$ (§. 13.) $= \pi X^2 - AC^2$ folgt

$$\pi X^2 - TX^2 = AC^2 = (\pi X + TX)\,(\pi X - TX) = \pi\tau . \pi T$$

also $\quad$ 2. $\pi\tau : AC = AC : \pi T$;

so wird $\quad$ 3. $\pi\tau : \pi T = \pi\tau^2 : AC^2$

und auch $\quad$ 4. $\pi\tau : \pi\tau - \pi T = \pi\tau^2 : \pi\tau^2 - AC^2$

so wie $\quad$ 5. $\pi\tau : T\tau = \pi\tau^2 . : \pi\tau^2 - AC^2$

Es ist aber $Tr : rX = 2 : 1$ also $\pi r : rX = 2\pi r^2 : \pi r^2 - AC^2$ und hieraus, weil $rX = TX$ 6. $\pi X : TX = \pi r^2 + AC^2 : \pi r^2 - AC^2$

Da nun ferner $\pi X \mp CA$, so ist $\pi X : TX = AC : AP = H : V$ (Gl. 1.) und so (nach Gl. 6.)

7. $H : V = \pi r^2 + AC^2 : \pi r^2 - AC^2$, und indem man $\frac{\pi^2 r}{AC^2} = N$ setzt,

$$H : W = N + 1 : N - 1 \text{ oder } V = \frac{N-1}{N+1} H.$$

Setzt man $DX = x$, $rX = TX = y$, $DA = AC = a$, so wird $\triangle ADC$

$$= \tfrac{1}{2}a^2, \text{ Sector } ADT = \tfrac{1}{2}xy - \int_a^x ydx = \tfrac{1}{2}xy - xy + \int_a^y xdy.$$

Ferner folgt aus $y^2 = x^2 - a^2$, $dy = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ und so

$$ADT = -\tfrac{1}{2}xy + \int_a^x \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = -\tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{2}a^2\ln(x+y) - \tfrac{1}{2}a^2\ln a$$

$$= ADC \,.\, \ln\frac{x+y}{a} = ADC \,.\, \ln\frac{\pi\ r}{AC}$$

endlich 8. $2 \,.\, ADT = ADC \,.\, \ln\frac{\pi\ r^2}{AC^2} = ADC \,.\, \ln N.$

Hier bezeichnet ln einen natürlichen Logarithmen, hingegen soll log einen Briggischen bezeichnen. Setzt man nämlich $\beta = 0{,}4342944819$ gleich dem Modulus der Briggischen Logarithmen, so folgt aus Gl. 8.

$$2\beta \,.\, ADT = ADC \,.\, \log\ N.$$

Ferner ist $ADT = ADC \,.\, \frac{P}{G}$ (nach §. 13., Zusatz 5.) also $2\beta \,.\, \frac{P}{G} = \log\ N$

und 9. $N = \text{Numerus}\ \log\left(0{,}4342944818 \,.\, \frac{2P}{G}\right).$

Der während der Zeit P beschriebene Weg werde durch A, dagegen der von einem beliebigen Körper, in derselben Zeit P mit der Geschwindigkeit H beschriebene, Weg durch S bezeichnet. Alsdann ist in der Figur $AB = \tfrac{1}{4}AC$

also 10. $AB \,.\, AC = \tfrac{1}{4}AC^2 = \tfrac{1}{4}AC \,.\, AD = \tfrac{1}{2}ADC.$

Ferner wird, wenn man $NK = y$, $CK = x$, $\tfrac{1}{4}AC^2 = \alpha^2$ setzt, $yx = \alpha^2$

und 11. $ABNK = \int_{CK}^{CA} ydx = \alpha^2 (\ln AC - \ln CK) = \tfrac{1}{2}ADC\ln\left(\frac{AC}{CK}\right)$

Nach §. 13. ist $AC : AP := AP : AK$, also $AC : AK = AC^2 : AP^2$, und daher $AC : CK = AC^2 : AC^2 - AP^2 = H^2 : H^2 - V^2$ (Gl. 1.)

$$= H^2 : H^2 - \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2 . H^2$$

12. $AC : CK = (N+1)^2 : 4N.$

Aus Gl. 11. und 12. folgt $2 . ABNK = ADC . \ln \left(\frac{(N+1)^2}{4N}\right) = \frac{ADC}{\beta} \log \left(\frac{(N+1)^2}{4N}\right)$. Oben war $ADC . \log N = 2\beta . ADT$;

also wird 13. $ABNK : ADT = \log \left[\frac{(N+1)^2}{4N}\right] : \log N$.

Nach §. 13., Zusatz 1. ist $ABNK : ADT = A : S$, mithin

$$A : S = \log \left[\frac{(N+1)^2}{4N}\right] : \log N$$

oder 14. $A \log N = S . \log \left[\frac{(N+1)^2}{4N}\right]$.

Da nun S und 2F die Wege sind, welche die mit der Geschwindigkeit H gleichförmig fortschreitenden Körper in den Zeiten P und G zurücklegen würden; so ist $S : 2F = P : G$

und 15. $S = \frac{2PF}{G}$.

Aus Gl. 14. und 15. folgt demnach $A \log N = \frac{2PF}{G} \log \left[\frac{(N+1)^2}{4N}\right] = \frac{2PF}{G} \log \left[\frac{(N+1)^2 N}{4N^2}\right] = \frac{2PF}{G} [2L + \log N - \log 4]$ d. h. weil oben

$$\log N = \frac{2P}{G} \beta \text{ war.}$$

$$16. \quad A = \frac{2PF}{G} + \frac{F . 2L}{\beta} - \frac{F . \log 4}{\beta}.$$

Mittelst des Werthes von $\beta = 0,4342944819$ und $\log 4 = 0,6020599913$ wird $\frac{2}{\beta} = 4,60517086$, $\frac{\log 4}{\beta} = 1,3862943611$, also A, oder die in der Zeit P zurückgelegte Höhe

$$17. \quad A = \frac{2PF}{G} - 1,3862943611 . F + 4,60517086 . LF.$$

Ist A sehr gross, so dass AP in §. 13. der Linie AC sehr nahe gleich wird, so fällt nach Gl. 7. πr^2 sehr gross im Vergleich mit AC^2 aus, d. h. es wird nach Gl. 8. N sehr gross und $\frac{N+1}{N}$ kaum grösser als 1. Hiernach wird ferner $L = \log \frac{N+1}{N}$ sehr nahe $= o$ und man kann daher in Gl. 17. das Glied 4,60517086 LF vernachlässigen.

No. **180.** S. **343.** Ein Körper verliert, wie wir oben in Abschnitt V. gesehen haben, wenn er in Wasser eingetaucht wird, so viel von seinem Gewicht, als ein Wasserkörper von gleicher Grösse wiegt. Hiernach wird das Gewicht einer beliebigen Wasserkugel dem Unterschiede des Gewichtes einer gleich grossen Kugel im leeren Raume und im Wasser gleich sein.

No. **181.** S. **343.** Ist dieser Durchmesser d, so wird

$$d = 1''. \sqrt[3]{79^{13}/_{38} : 132,8} = 0,84224 \text{ Zoll.}$$

No. 182. S. 344. Zur Frläuterung der im Texte aufgeführten einzelnen Rechnungen, diene Folgendes. Aus $2{,}24597 : 2F = 79^{13}/_{38} : 156^{13}/_{38}$ folgt $2F = 4{,}4256$ Zoll. Für den Fall der $156^{13}/_{38}$ Gran im leeren Raume wiegenden Kugel, ist das beim Falle der Körper vorkommende $g = 193^{1}/_{3}$ Zoll. Im Wasser wiegt die Kugel nur 77 Gran, und daher wird die 1 Secunde entsprechende Fallhöhe $= \frac{77}{156^{13}/_{38}} \cdot 193^{1}/_{3} = 95{,}219$ Zoll. Setzt man nun $s = 95{,}219 = g^{r}t^{2} = g^{1}.\ 1$ Sec., $F = 2{,}2128 = g^{1}.\ G^{2}$, so wird $G : 1 = \sqrt{F} : \sqrt{s}$, oder $G = 0{,}15244$ Secunde. Ferner wird $\frac{dF}{dG} = H = 2g^{1}G$, mithin $H.\ G = 2g^{1}G^{2} = 2F$. Aus der Proportion $0{,}15244 : 4 = 2F : S$, folgt der 4 Secunden entsprechende Weg $S = 116{,}1245$ Zoll. Hiervon muss nach §. 60, $1{,}3862944\ F = 3{,}0676$ Zoll subtrahirt werden. Endlich ergieht sich aus dem im Texte gegebenen Durchmesser $= 0'',84224$ oder Halbmesser $= 0{,}42112$ Zoll der grösste Kreis der Kugel $= 0{,}55715$ Quadratzoll, der horizontale Querschnitt des Kastens $= 81$, mithin die zwei einzelnen Verhältnisse $\sqrt{81} : \sqrt{80{,}72142}$ und $81 : 80{,}44285$ und hieraus das zusammengesetzte Verhältniss $1 : 0{,}9914$. Der im Text aufgeführte Weg $113{,}0569$ Zoll muss daher in diesem Verhältnisse vermindert oder mit $\frac{9914}{10000} = 1 - \frac{1}{116}$ multiplicirt werden und geht so in $112{,}08$ Zoll über.

No. 183. S. 357. Diess lässt sich noch deutlicher aus einer graphischen Darstellung ersehen. Bezeichnen a, b, c, d, e, f u. s. w. einzelne Theilchen, geben die Pfeile die Richtung der Bewegung an, wobei a, c, e einerlei, b, d, f die entgegengesetzte Richtung haben; so findet im oberen Falle eine Verdichtung, im untern Falle eine Verdünnung der zunächst auf einander folgenden Theile statt.

a b c d e f

a b c d e f

No. 184. S. 362. (Fig. 184., 185.) Im ersten Falle ist
$LN = PL - PN = EG + G\varepsilon - G\varepsilon - \varepsilon\gamma$ oder $\varepsilon\gamma = GE - LN$.

Im zweiten Falle ist
$G\gamma - E\varepsilon = (G\varepsilon + \varepsilon\gamma) - (EG + G\varepsilon) = \varepsilon\gamma - GE = Pn - Pl = ln$ oder $\varepsilon\gamma = GE + ln$.

No. 185. S. 362. Denkt man sich aus K eine Linie $Kn \mathrel{\#} LN$ und $= LN$, so wird $\triangle KHn \sim JMO$, weil die Seiten beider Dreiecke auf einander perpendikulär stehen, mithin $Kn : KH = JM : JO$ oder $LN : KH = JM : OP$.

No. 186. S. 365. (Fig. 184.) Es ist nämlich $HL = \sin PH$ und $KN = \sin PK$. Fällt nun K mit P zusammen, so wird $KN = \sin O = 0$ und es kann $HL = \sin PH$ alsdann $= PH$ oder $= KH$ gesetzt werden, weil wegen der Kleinheit der Linie EG der Bogen $KH = PH$ nothwendig sehr klein ist.

No. 187. S. 365. Setzt man die eine Kraft $= 2g$, die andere $= 2g'$, die

entsprechenden Zeiten = t und t' und den von beiden beschriebenen gleichen Weg = s, so hat man $s = gt^2$ und $s = g't'^2$ also $gt^2 = g't'^2$ und $t : t' = \sqrt{g'} : \sqrt{g} = \sqrt{2g'} : \sqrt{2g}$.

No. 188. S. 366. Wir haben nämlich die Proportion

$$\sqrt{39{,}2} : \sqrt{356700} = 2 : 190{,}78.$$

No. 189. S. 367. Nach der im Texte aufgestellten Hypothese kann man die Wasser- und Lufttheilchen einander gleich und = 1 annehmen. Im Wasser liegen sie unmittelbar nebeneinander, nimmt man dagegen den Abstand ihrer Mittelpunkte von einander in der Luft = 9 oder = 10 an, so wird dasselbe Volumen Luft $\left(\frac{1}{9}\right)^3$ oder $\left(\frac{1}{10}\right)^3$, d. h. $\frac{1}{729}$ oder $\frac{1}{1000}$ der Menge fester Theilchen enthalten, welche sich im Wasserkörper befinden. Beide Verhältnisse schliessen das im Text angenommene $\frac{1}{870}$ ein.

No. 190. S. 369. (Fig. 186.) Setzt man nämlich SD = x, Dd = y; so wird, weil SQ = ∞ und nach der Construction $y = \frac{C}{x^2}$ anzunehmen ist, die Fläche $DdQ = \int_x^\infty y dx = + \frac{C}{x}$. Es ist also DdQ umgekehrt proportional x oder SD.

No. 191. S. 371. Setzt man allgemein SD = x, Dd = y, C = Constans, so hat man $y = \frac{C}{x^3}$ und für SQ = ∞, die Fläche

$$DdQ = \int_x^\infty \frac{C}{x^3} dx = + \frac{C}{2SD^2}$$ also DdQ umgekehrt proportional SD^2 und die Umlaufszeit direct proportional SD^2.

No. 192. S. 374. Im Fall Kugel, Flüssigkeit und Gefäss sich nach Zusatz 7. um eine gemeinschaftliche Axe drehten, sei

	die Winkelbewegung	die Umlaufszeit	der Radius
für die Kugel	G	γ	g
für einen Punkt der Flüssigkeit	K	$\varkappa$	k
für das Gefäss	E	ε	e;

alsdann ist nach Zusatz 7.

1. $G : K = k^2 : g^2$
2. $K : E = e^2 : k^2$

also auch 3. $G : E = e^2 : y^2$.

Da hier das Gefäss ruhen soll, so muss später E — E für die Winkelbewegung des Gefässes gesetzt werden, und man hat zugleich die Winkelbewegung der Kugel = G — E, die Winkelbewegung des flüssigen Punktes = K — E zu setzen. Setzt man nun die entgegengesetzte Winkelbewegung der Ebene = P, ihre Umlaufszeit = π; so ist nach der Voraussetzung

4. $\pi + \gamma : \gamma = e^2 : g^2$
ferner 5. $G - E : P = \pi : \gamma$
also aus 4. und 5. $G - E + P : P = \pi + \gamma : \gamma = e^2 : g^2$
oder 6. $G - E : P = e^2 - g^2 : g^2$.
Aus 3. folgt 7. $G - E : E = e^2 - g^2 : g^2$,
nach 6. u. 7. ist daher $E = P$.
Nach 2 ist $K - E : E = e^2 - k^2 : k^2$
also 8. $K - P : P = e^2 - k^2 : k^2$.

Hier bezeichnet $K - P$ die Winkelbewegung der Kugel bei ruhendem Gefässe, also $K - P + P = K$ dieselbe in Bezug auf die entgegengesetzt bewegte Ebene. Es folgt aus 8. oder aus 2. für $E = P$, $K : P = e^2 : k^2$ und was von dem beliebigen Punkte der Flüssigkeit gilt, gilt auch von jedem andern.

No. 193. S. 377. Statt „Hypothese von Copernicus, müsste hier nach meiner unmassgeblichen Meinung zu lesen sein: „Keplers Gesetzen".

No. 194. S. 378. Im Berliner astronomischen Jahrbuche für 1871 Pag. 166 folg, findet man beiläufig

		log r(♀)	log r′(♂)		
für die Fische	oder die Länge 330°	9,8621	0,1404	r = 0,728	r′ = 1,382
„ „ Jungfrau	„ „ „ 150	9,8566	0,2216	= 0,719	= 1,666

mithin für 330° $r' - r = 0{,}654$
150 $r' - r = 0{,}947$

also diese Abstände für die Zeichen der Jungfrau und der Fische nahe im Verhältniss 3 : 2.

No. 195. S. 378. A. a. O. Pag. 9 und Pag. 45 finden wir
für Länge ⊙ = 330°, Δ⊙ = 60′
„ „ „ = 150 Δ⊙ = 58
also umgekehrt für Länge ♂ = 150° Δ♂ = 60′
„ „ „ = 330 Δ♂ = 58.

No. 196. S. 382. Nach den neuern Angaben von Hansen in Schumacher's Jahrbuch für 1837. sind die

Umlaufszeit der vier Trabanten	1d 18h 28m,	3d 13h 14m,	7d 3h 43m,	16d 16h 42m
deren gegenwärtiges Verhältniss	1	2,007	4,044	9,432
ihr doppeltes	1	4,028	16,351	88,958
die Abstände	6,049	9,623	15,350	26,998
ihr gegenwärtiges Verhältniss	1	1,591	2,538	4,463
„ dreifaches „	1	4,026	16,341	88,910
Die zweite Angabe Cassini's im Text giebt das doppelte Verhältniss der Zeiten	1	4,028	16,353	88,983
das dreifache Verhältniss der Abstände	1	4,006	16,354	88,991

No. 197, S. 382. Hansen giebt a. a. O. die Zahlen:
6,049; 9,623; 15,350; 26,998.

No. 198. S. 383. Die im Texte aufgeführten siderischen Umlaufszeiten sind, in Secnnden ausgedrückt:

	163107,	236482,	390312,	1377672,	6853620
ihr einfaches Verhältniss . . .	1	1,450	2,393	8,446	42,02
ihr doppeltes Verhaltniss . .	1	2,102	5,726	71,33	1765,6
die Abstände der Trabanten nach Cassini	1,95	2,6	3,5	8	24
ihr einfaches Verhältniss . . .	1	1,2820	1,7950	4,1025	12,307
ihr dreifaches Verhältniss . .	1	2,107	5,783	69,05	1864,0

No. 199. S. 383. Hansen giebt a. a. O. für diesen Werth 17″,1 an.

No. 200. S. 384. Nach Hansen hat man, mit Einschluss der ♀ und des ♅

	☿	♀	♁	♂	⚳	♃	♄	♅
D. sider. Umlaufszeit. i. T.	87,96928	224,70078	365,25637	686,97964	1684,735	4332,5848	10759,21981	30686,82055
ihr einfaches Verhältniss	1	2,5543	4,1521	7,8093	19,1514	49,2511	122,3066	348,8356
ihr doppeltes Verhältniss	1	6,5245	17,2398	60,9854	366,7761	2425,672	14958,89	121686,3
mittl. Abstde. von d. Sonne	3870,938	7233,317	10000	15236,91	27709,1	52027,67	95388,5	191823,9
ihr einfaches Verhältniss	1	1,8686	2,5834	3,9362	7,1582	13,4406	24,6422	49,5549
ihr dreifaches Verhältniss	1	6,5247	17,2405	60,9876	366,7909	2428,029	14963,7	121691,2

No. 201. S. 385. Der Exponent $2 + \frac{4}{243}$ ist von 2 nm $\frac{4}{243}$, von 3 um $\frac{239}{243}$ entfernt, also dem ersteren Werfhe näher als dem zweiten im Verhältnisse $4 : 239 = \frac{1}{59^3/_4}$.

No. 202. S. 386. Da der siderische Monat $= 27^d\ 7^{st.} 43^m$ ist, so wird $1^m = \frac{1}{39343}$ der ganzen Umlaufszeit in einem Kreise, dessen Durchmesser = 120 Erdhalbmessern ist. Im Text ist der Umfang der Erde = 123249600 Fuss angenommen worden, woraus der Log seines Halbmesser = [7,2926056] folgt. Betrachtet man nnn den kleinen, in 1 Minute durchlaufenen Bogen als mit seiner Sehne identisch, so erhält man den gesuchten Sinus versus = x aus der Proportion

$$x : \frac{1}{39343} . 2r\pi = \frac{1}{39343} 2r\pi : 2r$$

wo log r = 7,2926056; also wird x = 15,009 Fuss.

Diesen Weg legt der Mond vermöge der Kraft zurück, welche ihn in seiner Bahn erhält; dieselbe ist der Unterschied der beiden, nach dem Mittelpunkt der Erde und nach dem Centrum der Sonne gerichteten,

Kräfte; sie ist daher kleiner, als jene nach dem Centrum der Erde gerichtete und zwar im Verhältniss 17775 : 17875. Vergrössert man daher den für x gefundenen Werth in eben diesem Verhältniss, so erhält man 15,093 Fuss = 15 Fuss 1 Zoll $1^7/_{17}$ Linien Par. Mass.

No. 208. S. 387. Den Radius der Kreisbahn, welchen der Mond um die im Centrum der Bahn unbewegliche Erde beschreiben würde, ist nämlich kleiner, als der Abstand des Mondes vom Mittelpunkte der Erde, wenn ersterer sich um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt beider Körper bewegte (§. 101. des ersten Buches). Aus diesem Grunde setzt Newton den Radius jener Bahn nur = 60 Halbmessern, obgleich das arithmetische Mittel der grössten und kleinsten Entfernung nicht kleiner als $60^1/_2$ Halbmesser ist. Dass er in dieser Sache richtig geschlossen habe, hiervon überzeugte er sich dadurch, dass wenn man jenen Abstand von 60 Halbmessern in demjenigen Verhältnisse vergrösserte, in welchem bei unverändertem Gesetze der Schwere der Abstand des Mondes von der beweglichen Erde jenen Radius übertreffen muss, offenbar eine Länge von $60^1/_2$ Erdhalbmessern herauskommen muss, wie die Astronomen für diese Entfernung gefunden haben.

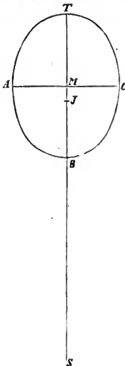


Fig. 254.

Aus den bisherigen Angaben Newton's sind die in dieser Bemerkung angeführten Grössen nicht klar zu ersehen, eber aus §§. 10 und 11. des nachgelassenen Werkes vom Weltsystem. Indem man, nach Hansen a. a. O. für die Masse der Erde = S = 1, die Masse des Mondes = P = $\frac{1}{87,75}$ annimmt, erhält man nach §. 101. des ersten Buches $a : a^1 = \sqrt[3]{S + P} : \sqrt[3]{S}$ also $a^1 = a \sqrt[3]{\frac{88,75}{87,75}} = 60 . \sqrt[3]{\frac{88,75}{87,75}} = 60,22$. Setzt man für a = 60 und $a^1 = 60,5$; $P = \frac{1}{x}$; so folgt x = 39,52, also hat Newton nahe $P = \frac{1}{40}$ angewandt. Ferner ist nach Hansen der mittlere Abstand des Mondes von der Erde L = 52000 g. Meilen, der mittlere Abstand der Erde von der Sonne T = 20,666800 g. M. = 12027 D, wo D der Durchmesser der Erde und wenn R deren Halbmesser ist, 1 g. M. = $\frac{24054}{20666800}$ R

$$L = \frac{52000 . 24054}{20666800} R = 60,592 \text{ R.}$$

No. 204. S. 390. Es befinden sich der Jnpiter in J, einer seiner Trabanten im Punkte T seiner Bahn, der Mittelpunkt der letzteren in M, die Sonne in S. Die Schwere des Trabanten gegen die Sonne sei $g^{(t)}$, die Schwere des Jupiters gegen dieselbe sei $g^{(l)}$; alsdann ist in gleichen Abständen von ihr

$$1.\quad g^{(t)} : g^{(l)} = d : e \text{ oder } g^{(t)} = \frac{d}{e}\, g^{(l)}.$$

Reduciren wir $g^{(t)}$ und $g^{(l)}$ anf den Punkt M, so erhalten wir für erstere $\frac{g^{(t)}}{(\Delta + a)^2}$ und für letztere $\frac{g^{(l)}}{(\Delta - ax)^2}$ indem wir $SM = \Delta$, $MT = a$ und $MJ = ax$ gesetzt haben. Wenn wenn wir daher nach 1. $g^{(t)} = \frac{d}{e}\, g^{(l)}$ setzen, erhalten wir

$$\frac{\frac{d}{e}\, g^{(l)}}{(\Delta + a)^2} = \frac{g^l}{(\Delta - ax)^2}$$

oder

$$2.\quad \frac{\sqrt{d}}{\Delta + a} = \frac{\sqrt{e}}{\Delta - ax}$$

nnd hieraus

$$3.\quad \Delta + a : \Delta - ax = \sqrt{d} : \sqrt{e}.$$

Vernachlässigen wir a gegen Δ, so folgt hieraus

$$4.\quad \Delta : \Delta - ax = \sqrt{d} : \sqrt{e}$$

oder genähert

$$5.\quad SM : SJ = \sqrt{d} : \sqrt{e}.$$

No. 205. S. 393. Bei der folgendermassen ausgeführten Rechnung habe ich Resultate erhalten, welche von den im Texte angegebenen etwas abweichen.

Bezeichnet r den Abstand vom Centralkörper nnd t die Umlanfszeit, so ist nach der 4. Erscheinung nnd §. 10.

für die Sonne und Venus	r =	72333	t = 224,698 (d)
den Jupiter „ 4. Trabanten		520096 sin 8' 16''	„ = 16,689
„ Saturn „ 6. „		954006 sin 3' 4''	„ = 15,944
die Erde „ der Mond		100000 sin 10' 33''	„ = 27,322.

Nach §. 18. Zusatz 2. des ersten Bnches wird das Gewicht allgemein ausgedrückt durch $\frac{r}{t^2}$. Mithin ist das Gewicht der Venus gegen die Sonne im Abstande $72333 = \frac{72333}{224{,}698^2}$; das Gewicht des 4. Trabanten gegen den Jupiter im Abstande $520096 \sin 8'\,16'' = \frac{520096 \sin 8'16''}{16{,}689^2}$, dasselbe im Abstande $72333 = \frac{520096 \,.\, \sin 8'\,16''}{16{,}689^2} \cdot \frac{520096^2 .\sin 8'\,16''^2}{72333^2}$ oder $= \frac{520096^3 .\sin 8'16''^3}{7283^2 \,.\, 16{,}639^2}$; eben so das Gewicht des 6. Trabanten gegen den Saturn im Abstande $72333 = \frac{954006^3 .\sin 3'4''^3}{72333^2 .\, 15{,}944^2}$; das Gewicht des Mondes

gegen die Erde im Abstande $72333 = \frac{10000^3 . \sin 10' 33''^3}{72333^2 . 27,322^2}$. In so fern wir das Gewicht der Venus gegen die Sonne, oder $\frac{72333}{224,698^2}$ als Einheit annehmen, erhalten wir die Gewichte

des 4. Trabanten gegen den Jupiter $= \frac{520096^3 . \sin 8' 16''^3}{72333^3 . 16,289^2} . 224,698^2$

„ 6. „ „ „ Saturn $= \frac{954006^3 \sin 3' 4''}{72333^3 . 15,944^2} . 224,698^2$

„ Mondes „ die Erde $= \frac{100000^3 \sin 10' 35''^3}{72333^3 . 27,322^2} . 224,698^2$.

Nach der ausgeführten Rechnung haben sich statt der im Texte aufgeführten Werthe, die folgenden ergeben:

$$1, \frac{1}{1067}, \frac{1}{3091}, \frac{1}{193594}.$$

No. 206. S. 393. Die eben gefundenen Werthe der Gewichte gegen die verschiedenen Himmelskörper gelten für die gleiche Entfernung von ihren Mittelpunkten = 72333. Will man dieselben auf die im Texte angegebenen Abstände reduciren, so erhalten wir respective die Werthe

$$\frac{72333^2}{10000^2} . 1, \frac{72333^2}{997^2} . \frac{1}{1067}, \frac{72333^2}{791^2} . \frac{1}{3091}, \frac{72333^2}{109^2} . \frac{1}{193594}.$$

Sie verhalten sich also zu einander wie

$$1 : \frac{10000^2}{997^2} . \frac{1}{1067} : \frac{10000^2}{791^2} . \frac{1}{3091} : \frac{10000^2}{109^2} . \frac{1}{193594}.$$

oder wie 10000 : 943 : 517 : 435.

Setzt man statt 3091 wie im Original 3021
„ 193594 „ „ „ 169282,
so ergeben sich in der fortlaufenden Proportion respective die Werthe 529 : 496.

No. 207. S. 394. Die Parallaxe der Sonne ist nach Encke = 8,"5776; mithin muss das Gewicht oder die Masse der Erde mit $\left(\frac{8,5776}{10,5}\right)^3$ multiplicirt werden. Das im Text gefundene $\frac{1}{169282}$ wird in diesem Falle $= \frac{1}{312666}$; hingegen der in der Bemerkung 205) gefundene Werth $\frac{1}{193594} = \frac{1}{357580}$. Hansen hat a. a. O. die bezüglichen Werthe:

$$1, \frac{1}{1054}, \frac{1}{3500}, \frac{1}{354936}.$$

No. 208. S. 395. Der Inhalt dieses §. und seiner Zusätze muss in der neuesten Zeit bedeutend modificirt werden. Namentlich hat Encke in einer akademischen Abhandlung über die Massen und Dichtigkeiten sämmtlicher grösseren Planeten bemerkt, dass die der Sonne näheren Planeten Mercur, Venus, Erde und Mars nahebei dieselbe Dichtigkeit und

zwar eine grössere = 1. die drei entfernteren Jupiter, Saturn und Uranus wieder nahe einerlei und eine kleinere Dichtigkeit = $^1/_4$ besitzen.

Was die, durch die Sonne auf den einzelnen Planeten hervorgebrachte Erwärmung betrifft, so dürfte deren Grad auch von der chemischen Beschaffenheit dieser Weltkörper abhängen. Die in Zusatz 4. hierüber gemachten Bemerkungen können daher nur unter der Voraussetzung gelten, dass alle Planeten identische Bestandtheile haben.

No. 209. S. 395. Bis vor einigen Jahren erklärte man allgemein die Erscheinung der Sonnenflecken durch die Hypothese von Oeffnungen, welche sich in der, den dunkeln Sonnenkörper umgebenden Photosphäre befänden. Hiernach konnte von einem Schwimmen der Sonnenflecken, wie im Text, nicht die Rede sein. Nach den neuen spectroscopischen Untersuchungen der Sonne wird ein solches Schwimmen nicht nur möglich, sondern selbst wahrscheinlich.

No. 210. S. 395. Nach §. 47., Zusatz 7. des zweiten Buches ist der Verlust der Bewegung, welcher bei einem ungleichförmigen Widerstande stattfinden würde, während der Zeit t proportional $\frac{t}{T+t}$ wenn T die Zeit bezeichnet, in welcher die ganze Bewegung durch einen gleichförmigen Widerstand verloren gehen würde.

Bezeichnet man nun den ersteren Widerstand durch R', den letzteren durch R, so ist ferner nach §. 57. des erwähnten Buches R' : R = Dichtigkeit des Jupiters: Dichtigkeit des Mittels = 860 : 1, nach dem Obigen R' : R = t : T + t; also t : T + t = 860 : 1. Während der Zeit T lege der Jupiter wirklich einen Bogen A zurück, ferner werde der von der Sonne aus gesehene Durchmesser des Jupiters = 37'' = D gesetzt; alsdann wird nach §. 57. R' : R = A : $^8/_3$D = 860 : 1, woraus A = 23° 34' 13'' folgt, zu dessen Durchlaufung der Jupiter 283 Tage braucht. Es ist also T = 283, t = 30 und daher $\frac{t}{T+t} = \frac{30}{313}$

$$\text{nahe} = \frac{1}{10}.$$

No. 211. S. 396. Statt der Proportion A : $^8/_3$D = 860 : 1 in der vorhergehenden Bemerkung, woraus A = 23° 34' 13'' und T = 283 Tagen folgte, haben wir jetzt die folgende A : $^8/_3$D = 860 . 75 Billionen : 1; daher T = 75 Billionen mal 283 Tage = 58200000000000 Jahre und wenn t = 1000000 Jahren gesetzt wird, $\frac{t}{T+t} = \frac{1}{58200001}$, weit kleiner

$$\text{als } \frac{1}{1000000}.$$

No. 212. S. 396. Nach Hansen ist a. a. O. der Halbmesser der Sonne
= 112,06 Halbm. ♁,
= 112,06, 858 g. M.
= 96147,5 g. M. = R

Entfernung ♃ von ☉ = 107500000 g. M = Δ mithin $\frac{\Delta}{R} = \frac{1118}{1}$.

Entfernung ♄ von ☉ = 197000000 g. M. = Δ' mithin $\frac{\Delta'}{R} = \frac{2049}{1}$.

Ist der Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunktes der Sonne und des Jupiters vom Mittelpunkte der Sonne = x; so haben wir zur Bestimmung von x, die Gleichung

		Nach Hansen
	$1067 \,.\, x = 1.\,(\Delta - x)$	[$1054 \,.\, x = \Delta - x$
also	$x = 100678$	$x = 101896$ g. M.
und	$x - R = 4530{,}5$ g. M.	$x - R = 5749{,}2$ g M.]

Ebenso ergiebt sich der Abstand x^1 des gemeinschaftlichen Schwerpunktes von ☉ und ♄, vom Mittelpunkte der Sonne aus

		Nach Hansen
	$3021 \,.\, x' = \Delta' - x'$	[$3500 \,.\, x^1 = \Delta^1 - x^1$;
also	$x^1 = 65159$	$x^1 = 56285{,}7$ g. M.
und	$R - x^1 = 30988{,}5.$	$R - x^1 = 39861{,}8$ g. M.]

Für ☿ ist, nach Astr. Nachr. Nr. 488. die Masse der Sonne = 4865751, wenn die Masse des ☿ = 1 gesetzt wird, ferner $\Delta^{II} = 8000000$ g. M.

$4865751 \,.\, x^{II} = \Delta^{II} - x^{II}$

$x^{II} = 16$ g. M. und $R - x^{II} = 96145{,}9$ g. M.

Für ♀ Masse der Sonne = 401847 $\Delta^{III} = 15000000$ g. M.

„ „ Venus = 1

$401857 \,.\, x^{III} = \Delta^{III} - x^{III}$

$x^{III} = 37{,}3$ g. M. $R - x^{III} = 96110{,}2$ g. M.

Für ♁ Masse der Sonne = 354936 $\Delta^{IV} = 20{,}666800$ g. M.

„ „ Erde = 1

$354936 \,.\, x^{IV} = \Delta^{IV} - x^{IV}$

$x^{IV} = 58{,}2$ g. M. $R - x^{IV} = 96089{,}3$ g. M.

Für ♂ Masse der Sonne = 2680337 $\Delta^{V} = 31500000$ g. M.

„ „ Mars = 1

$2680337 \,.\, x^{V} = \Delta^{V} - x^{V}$

$x^{V} = 11{,}8$ g. M. $R - x^{V} = 96135{,}7$ g. M.

Für ♅ ist Masse der Sonne = 17918 $\Delta^{VI} = 396{,}500000$ g. M.

„ des Uranus = 1

$17918 \,.\, x^{VI} = \Delta^{VI} - x^{VI}$

$x^{VI} = 22127{,}3$ g. M. $R - x^{VI} = 74020{,}2$ g. M.

Für ♆ ist Masse der Sonne = 20570 (Astr. Nachr. Nr. 921)

„ des Neptun = 1 $\Delta^{VII} = 621{,}700000$

$20570 \,.\, x^{VII} = \Delta^{VII} - x^{VII}$

$x^{VII} = 30222{,}2$ g. M. $R - x^{VII} = 65925{,}3$ g. M.

No. 213. S. 397. Statt „der Welt“ muss hier wohl „des Sonnensystems“ gelesen werden.

No. 214. S. 398. Nach §. 15. ist die Masse des Jupiters = $\frac{1}{1067}$, für die Masse der Sonne = 1; nach Hansen am angeführten Orte wird

dieser Bruch $\frac{1}{1054}$. Eben so gross ist die Schwere gegen beide Körper, bei gleichen Abständen, bei ungleichen Abständen ist die Schwere den Quadraten der Abstände umgekehrt proportional. In der Conjunction von ♃ und ♄ wird ihr gegenseitiger Abstand = 197000000 — 107500000 = 89500000 und daher dieser Abstand des ♄ vom ♃, zum Abstande des ♄ von ☉ wie 895 : 1970 sehr nahe = 4 : 9. Das zusammengesetzte Verhältniss, in welchem die Schwere des Saturns gegen den Jupiter zu seiner Schwere gegen die Sonne steht, ist mithin

		Nach Hansen
	$\frac{1}{1067 . 16} : \frac{1}{81}$	
oder	81 : 16 . 1067	81 : 16 . 1054
nahe	1 : 211	1 : 208

No. 215. S. 398. Unmittelbar erhalten wir dieses Verhältniss, unter Anwendung des Werthes 3500 nach Hansen, statt des im Texte gebrauchten 3021, $\frac{1}{3500 . 81} : \frac{1}{3500 . 16} : \frac{1}{25} = 16 : 81 : \frac{16 . 81 . 3500}{25}$ = 16 : 81 : 181440. Das folgende Verhältniss wird in diesem Falle 65 : 181410 = 1 : 2791.

No. 216. S. 399. Von einer absoluten Ruhe der Fixsterne kann jetzt füglich nicht mehr die Rede sein, seitdem man bei einer grossen Anzahl derselben die sogenannte eigene Bewegung aufgefunden hat.

No. 217. S. 399. Nach dem Vorgange Bessel's und W. Struwe's, denen es gelungen ist, an zwei Sternen eine wenn auch geringe jährliche Parallaxe nachzuweisen, ist eine ähnliche Untersuchung bei anderen Sternen gelungen. Bei der Berechnung der Bahnen von Doppelsternen hat man ferner die Anziehung derselben auf einander mit Erfolg in Anwendung gebracht, woraus man mit Wahrscheinlichkeit schliessen darf, dass die einzelnen Fixsterne auch auf unser Sonnensystem im ganzen eine Wirkung ausüben dürften. Hieraus folgt aber noch nicht, dass sie auch auf die einzelnen Planeten eine gesonderte und daher wahrnehmbare Wirkung ausüben werden.

No. 218. S. 399. Setzt man die halbe grosse Axe der Marsbahn = a, die halben grossen Axen der ♁, ♀ und des ☿ = a', a'', a''', die rückläufige, hundertjährige Bewegung des Aphels von ♂, wie im Text, =33' 20''; so hat man nach Hansen a. a. O.

		100j. r. Bew. d. Aph.
log a = 0,18290	log(33'20'') = 3,30103	
log a' = 0,00000	$^3/_2 \log \frac{a'}{a}$ = 9,72565	♁ 17' 46'' nahe wie im Texte.
log a'' = 9,85934	$^3/_2 \log \frac{a''}{a}$ = 9,51466	♀ 10 54
log a''' = 9,58781	$^3/_2 \log \frac{a'''}{a}$ = 9,10737	☿ 4 16

Hausen giebt a. a. O.

	jährl. Bew. d. Aph.	100jähr. B. d. Aph.	
für ♂	15,"46	25' 46".	von W. n. O. rechtläufig,
„ ♂	11, 25	18 45	„ W. n. O. „
„ ♀	3, 24	5 24	„ O. n. W. rückläufig,
„ ☿	5, 81	9 41	„ W. n. O. rechtläufig.

No. 219. S. 399. Nach Hansen a. a. O. sind diese Werthe: für den Jupiter 9^h 55^m, für den Mars 24^h 37^m, für die Venus 23^h 21^m, für die Erde 23^h 56^m, für die Sonne $25\frac{1}{2}$ Tage, für den Mond 27 Tage 7^h 43^m.

No. 220. S. 400. $27\frac{1}{2}$ Tage machen ungefähr $\frac{10}{133}$ vom Jahre aus, und die Erde bewegt sich daher in jenem Zeitraume um $\frac{10}{133}$ ihrer Bahn fort. Den gleichvielten Theil ihrer Umdrehungszeit x, in Bezug auf die Fixsterne, braucht die Sonne mehr, um in Bezug auf die Erde ihre Drehung zu vollenden. Aus $x\left(1+\frac{10}{133}\right)=27{,}5$ folgt $x = 25{,}6$ Tagen.

No. 221. S. 401. Da nach der Tabelle in Schumacher's Jahrbuch für 1837, pag. 261 7000 engl. Fuss = 1094,67507 Toisen, so werden 367196 engl. Fuss = 57300 Toisen.

No. 222. S. 401. Nimmt man aus den drei im Texte für 1^0 aufgeführten Werthen das arithmetische Mittel = 57140,3 Toisen, und führt hiermit die Rechnung durch, so ergiebt sich die Peripherie = 123423048 par. Fuss, der Halbmesser = 19643390 par. Fuss.

No. 223. S. 401. Beim Nachrechnen fand ich die hier im Text aufgeführten Zahlen etwas verschieden, jedoch ist der Unterschied so gering, dass das Endresultat unverändert bleibt. Ich finde, wenn ich den gesuchten, in eine Secunde zurückgelegten Bogen durch x bezeichne und den Erdradius r = 19615800 Fuss setze, aus $2r\pi : x = 86164 : 1$, $x = 1430{,}41$ Fuss. Ferner wird sin versus $x = \frac{x^2}{2r} = 0{,}0521536$ Fuss = 7,51012 Linien. Unter dem Aequator in A sei e die Centrifugalkraft, alsdann ist dieselbe dem Radius CA = r proportional. Unter der Breite φ in P wird die c parallele Centrifugalkraft e' dem Radius DP = r cosφ proportional. Zerlegt man nun e' in zwei Seitenkräfte, die eine längs P, die andere auf CP senkrecht, so wird erstere = e' cosφ = e cosφ^2, und da cosφ^2 = 0,43325, c cosφ^2 = 7,510 . 0,43325 = 3,254. Das Verhältniss 2177,254 : 7,510 wird, wie im Text, gleich 289 : 1.

Fig. 255.

Fig. 256.

No. 224. S. 402. Nach der in der Bemerkung 74 zu S. 217,

ausgeführten Rechnung findet sich die Anziehung des Punktes Q gegen das Sphäroïd durch das Integral $\int_0^{2b}\left(1-\frac{x}{z}\right)dx$, wo QT = x, QR = z, QC = PC = b, TR = y ist. Es ist nun im vorliegenden Falle $z^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{a^2}{b^2}(2bx - x^2) = \frac{2a^2bx - (a^2 - b^2)x^2}{b^2}$,

$$\text{mithin} \int_0^{2b}\left(1-\frac{x}{z}\right)dx$$

$$= 2b + \frac{b}{a^2-b^2}\sqrt{4a^2b^2 - 4b^2(a^2-b^2)} - \frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\int_0^{2b}\frac{dx}{\sqrt{2a^2bx-(a^2-b^2)x^2}}$$

$$= \frac{2a2b}{a^2-b^2} - \frac{a^2b^2}{(a^2-b^2)^{3/2}}\left[\text{Arc. sin.}\left(1-\frac{2b^2}{a^2}\right) + \text{Arc. sin. } 1\right]$$

oder 1. $\int_0^{2b}\left(1-\frac{x}{z}\right)dx = \frac{2a^2b}{a^2-b^2} - \frac{2Q^2b}{(a^2-b^2)^{3/2}}\text{ Arc. sin. }\frac{2b}{a^2}\sqrt{a^2-b^2}.$

Für die entsprechende Kugel ist $z = \sqrt{2bx}$ und so $\int_0^{2b}\left(1-\frac{x}{z}\right)dx$

$$= 2b - \frac{1}{\sqrt{2b}}\cdot {}^2/_3\cdot(2b)^{3/2}$$

oder 2. $\int_0^{2b}\left(1-\frac{x}{z}\right)dx = {}^2/_3\, b$, und nach Gleichung 1. und 2. das gesuchte Verhältniss

3. $\left[\frac{2a^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2b}{(a^2-b^2)^{3/2}}\cdot\text{Arc. sin. }\frac{2b}{a^2}\sqrt{a^2-b^2}\right] : {}^2/_3$. Nach der Voraussetzung ist a : b = 101 : 100, also $\frac{a^2-b^2}{b^2} = \frac{201}{100^2}$; $\frac{2b}{a^2}\cdot\sqrt{a^2-b^2}$ $= 2\,\frac{b^2}{a^2}\cdot\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}} = \frac{200}{101^2}\cdot\sqrt{201}$; Arc. sin. $\frac{2b}{a^2}\sqrt{a^2-b^2} = 16^0\,8'\,18,''9$ = 58098,''9. Führt man die numerische Rechnung weiter, so wird $\frac{2a^2}{a^2-b^2} = 101{,}50251$; $\frac{a^2b}{(a^2-b^2)^{3/2}}\cdot\text{Arc. sin. }\frac{2b}{a^2}\sqrt{a^2-b^2} = 100{,}83038$, das Verhältniss 3. 0,67213 : $^2/_3$ = 201639 : 200000 = 126,02 : 125.

No. 225. S. 402. In diesem Falle geht nach der obigen Figur, indem wir AP = x', VW = y', AW = z' setzen, das Integral über in

$$\int_0^{2a}\left(1-\frac{x'}{z'}dx'\right) = \int_0^{2a}\left[1-\frac{ax'}{\sqrt{2a\,b^2x' + (a^2-b^2)x'^2}}\right]dx'$$

$$= 2a - \frac{a\sqrt{2ab^2 . 2a + (a^2 - b^2) 4a^2}}{a^2 - b^2} + \frac{2a^2 b^2}{2(a^2-b^2)} \int_0^{2a} \frac{dx'}{\sqrt{2ab^2 x' + (a^2-b^2)x'^2}}$$

$$= -\frac{2a b^2}{a^2 - b^2} + \frac{a^2 b^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\left\{ \log \left[\frac{2ab^2 + 2(a^2-b^2) 2a}{2\sqrt{a^2-b^2}} + \sqrt{2ab^2 . 2a + (a^2-b^2) 4a^2} \right] - \log \frac{2ab^2}{2\sqrt{a^2-b^2}} \right\}$$

oder 4. $\int_0^{2a} \left(1 - \frac{x'}{z'}\right) dx'$

$$= -\frac{2ab^2}{a^2-b^2} + \frac{a^2 b^2}{(a^2-b^2)^{3/2}} \log \frac{2a^2 - b^2 + 2a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2}$$

Die log. sind hier hyperbolische, und für die entsprechende Kugel wird hier 5. $\int_0^{2a} \left(1 - \frac{x'}{z'}\right) dx' = {}^2/_3\, a$; also nach Gl. 4. und 5. das gesuchte Verhältniss

$$6. \left(-\frac{2b^2}{a^2 - b^2} + \frac{a^2 b}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \log \frac{2a^2 - b^2 + 2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}\right) : {}^2/_3.$$

Da ferner $\frac{2b^2}{a^2-b^2} = 99{,}502488$, $\log \frac{2a^2-b^2+2a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2} = 0{,}2826078$, so wird das Verhältniss 6. $[-99{,}502488 + 100{,}163650] : {}^2/_3$
$= 198348 : 200000 = 125 : 126{,}02.$

No. 226. S. 402. Setzt man die durch die Kugel, die Erde und das Sphäroïd auf A ausgeübte Schwerkraft respective gleich K, E, S; so hat man K : E = 101 : 100, E : S = 101 : 100, also K : E = E : S, oder $E = \sqrt{K . S} = \sqrt{126 . 125} = 125{,}5\ldots$

No. 22. S. 403. Bezeichnet man die Schwere in einem unbestimmten Orte X auf der Erde durch F(X), auf der Kugel durch $\varphi(X)$, auf dem Sphäroïd durch $\psi(X)$; so hat man $F(Q) : \varphi(Q) = 126 : 125$, $\varphi(A) : F(A) = 126 : 125{,}5$, $\varphi(Q) : \varphi(A) = 100 : 101$; mithin $F(Q) : F(A) = 126 . 126 . 100 : 125 . 125{,}5 . 101 = 501 : 500$.

No. 228. S. 404. Nach Hansen a. a. O. ist 2a = 38,"4, 2b = 35",6, a : b = 14 : 13.

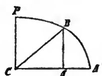


Fig. 257.

No. 229. S. 405. Stellt die nebenstehende Figur $^1/_4$ des Sphäroïds vor, ist A'C = a die halbe grosse, PC = b die halbe kleine Axe; so verhält sich die Schwere unter dem Aequator in A' zu der unter dem Pole in P, wie b : a, und zu der in B wie b : r, wo CB = r. Mithin ist, wenn α die Schwere in A', β die Schwere in B

bezeichnet, α proportional $\frac{1}{a}$, β proportional $\frac{1}{r}$ nnd so die Zunahme der Schwere von A' bis B, oder β bis α proportional $\frac{1}{r} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a}\left(\frac{a}{r} - 1\right)$. Ist nun CA = x, AB = y, die Breite BCA' = φ, so haben wir $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ und weil $y = r \sin\varphi$, $x = r \cos\varphi$, $\frac{r^2 \sin\varphi^2}{b^2} + \frac{r^2 \cos\varphi^2}{a^2} = 1$. Setzt man nnn $b^2 = a^2 (1 - e^2)$, wo e^2 nothwendig sehr klein ist, so wird $r^2 = \frac{a^2 (1 - e^2)}{1 - e^2 + e^2 \sin\varphi^2} = a^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \sin\varphi^2}$,

oder $\frac{a}{r} = \sqrt{1 + \frac{e^2}{1 - e^2} \sin\varphi^2} = 1 + {}^1/_2 \frac{e^2}{1 - e^2} \sin\varphi^2 \ldots$ oder mit grosser Annäherung $\frac{1}{a}\left(\frac{a}{r} - 1\right) = \frac{1}{2a} \cdot \frac{e^2}{1 - e^2} \sin\varphi^2$, d. h. proportional $\sin\varphi^2$.

No. 230. S. 405. Vernachlässigt man die höheren unbedeutenden Glieder, so wird der Ausdruck des Meridiangrades $m = \alpha - \beta \cos 2\varphi$, wo α und β constant sind, mithin für $\varphi = o$ $m' = \alpha - \beta$ und $m - m = \beta (1 - \cos 2\varphi) = \beta \sin . \text{ver} . 2\varphi = 2\beta \sin\varphi^2$.

No. 231. S. 405. Da für Paris die Länge des Pendels l = 3 Fnss $8^5/_9$ Linien = 440,555 Linien, so wird die Länge des synchronischen Pendels nnter dem Aequator: $l' = \frac{2290000}{2295667} \cdot 440{,}555 = 439{,}468$, also $l - l' = 1{,}087$ Linien.

No. 232. S. 409. Bezeichnet a und b bezüglich den Halbmesser am Aequator und am Pole, so ist nach §. 23. a : b = 230 : 229, welche Proportion der Berechnnng der Tabelle im gegenwärtigen §. zum Grunde liegt und womit Richer's Resultat nahe übereinstimmt. Es wird also $a - b = \frac{1}{230}$ a und da $\frac{a + b}{2} = 3928{,}16$ Meilen (§. 23.) a = 3932 M. $a - b = 17^1/_{10}$ M. wie §. 23.

No. 233. S. 409. Bekanntlich wird gegenwärtig bei allen astronomischen Rechnnngen die Nutation gehörig berücksichtigt.

No. 234. S. 409. Nach Hansen a. a. O. beträgt die tägliche Bewegung des Perigeums 6' 41,"0 von Westen nach Osten, die tägliche Bewegung der Knotenlinie 3' 10,"64 von Osten gegen Westen.

No. 235. S. 410. Nach Hansen a. a. O. beträgt die rückläufige Bewegung der Knotenlinie des Mondes in 100 Jahren 5 Umläufe 134° 9' 57,"5 = 1934,°41, die siderische Umlaufszeit der Erde nm die Sonne 365,^{d}25, die des Jupiters um die Sonne 4332,6, die Umlaufszeit des Mondes um die Erde 27,32 Tage, des vierten Trabanten um ♃ 16,7 Tage. Wir haben daher, wenn wir die Bewegung der Knoten des 4. Trabanten in 100 Jahren dnrch x bezeichnen:

$$x : 1934,''41 = \begin{cases} 365{,}25^2 : 4332{,}6^2 \\ 16{,}7 \quad : \quad 27{,}32 \end{cases}$$

log (16,7 . 365,25²) 6,34790
log 1934,41 3,28659
Compl. log (27,32 . 4332,6²) . 1,29122
log x 0,92571
$x = 8^0\ 26'$

No. 236. S. 411. Man kann auch so sagen: Die Variation x des 4. Trabanten verhält sich zur Variation V unseres Mondes, wie die jährliche Bewegung der Mondsknoten zur jährlichen Bewegung der Knoten des Trabanten, und wie die Umlaufszeit des Mondes zur Umlaufszeit des Trabanten. Nun ist die Bewegung der Mondsknoten in 100 Jahren = 1934⁰,41, also in 1 Jahre = 19⁰,3441 = 69639″, die Bewegung der Knoten des Trabanten in 100 Jahren = 8⁰ 26′ = 30360″, mithin die einjährige = 303″,6. Die Variation

	nach Newton	nach Hansen
V	33′ 14″ = 1994″	39′ 30″ = 2370″

mithin $x : V = \begin{cases} 303{,}6 \\ 27{,}32 \end{cases} : \begin{matrix} 69639 \\ 16{,}7 \end{matrix}$

$x = 5'',31$ $\qquad$ $x = 6'',3.$

No. 237. S. 416. Nach den Werthen von Hansen a. a. O. wird dieses Verhältniss $(27{,}321661)^2 : (365{,}25637)^2 = 1000 : 178312 = 1 : 178^{12}/_{40}$.

No. 238. S. 417. Bringt man hier den in der vorstehenden Bemerkung anfgeführten Werth 178,312 in Anwendung, so erhält man das Verhältniss 1 : 636619,3.

No. 239. S. 418. (Fig. 191.) Es ist $\triangle\, Ppq \sim PKT$, und weil $pq = Kk$, so wird $Kk = \frac{Pp \,.\, PK}{PT}$. Ferner $FK \,.\, Kk = \frac{FK \,.\, PK}{PT} \,.\, Pp$, d. h. weil Pp constant ist, FK . Kk proportional $\frac{3PK \,.\, TK}{PT}$.

No. 240. S. 418. EL ist proportional $PK \,.\, TK = PT \sin PC \,.\, PT \cos PC$, und wird daher ein Maximum für $PC = 45^0$. Ferner wird in diesem Falle $FK \,.\, Kk = {}^1/_2 \frac{PT^2 \sin 90^0}{PT} \,.\, Pp = {}^1/_2 TP \,.\, Pp$.

No. 241 S. 419. Die Geschwindigkeit des Mondes ist dem Increment (Moment) der Fläche proportional, also im Mittel = 11915 . a, wo a irgend eine Constante bezeichnet. Mithin wird die Geschwindigkeit im Texte, welche $^{100}/_{11915}$ von der des Mondes gleich ist, nun 100 . a und so die in den Syzygien und den Quadraturen stattfindende Geschwindigkeit respective 11965 . a und 11865 . a.

No. 242. S. 419. Es ist nämlich $FKCG : GCF = (GC + FK)CK : GC \,.\, CT = CT^2 - KT^2 : CT^2 = PK^2 : PT^2 = PT \,.\, Pd : PT^2 = Pd : PT$.

No. 243. S. 419. Nach dem Vorhergehenden ist nämlich das Moment dieser Fläche proportional

109,73 + Pd, für den Radius PT = 100, oder
109,73 + Pd „ „ „ = 1 „
219,46 + 2Pd „ „ „ = 1.

Nun ist Pd = sinus versus PC und 2 Pd = Pd' = sinus versus PCP' = sinus versus 2 . PC. .

No. 244. S. 420. Setzt man die stündliche Bewegung = dv, den Abstand = r und die beschriebene Fläche = f; so wird $f = \frac{1}{2} r^2 dv$ und $r = \frac{\sqrt{2} . \sqrt{f}}{\sqrt{dv}}$.

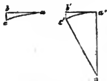


Fig. 258.

No. 245. S. 420. Setzt man die Geschwindigkeit a' c' = v, den Radius des osculirenden Kreises a'd = r und die Anziehung b'c' = k; so ist offenbar sehr nahe $2kr = v^2$ und $\frac{1}{r} = \frac{2k}{v^2}$, und $\frac{1}{r}$ offenbar der Krümmung proportional. Für ab = a'b' oder ac = a'c' und beide unendlich klein, kann man bc = sin bac oder = tang bac und b'c' = sin b'a'c' oder = tang b'a'c' setzen.

No. 246. S. 420. In der Entfernung N ist die Schwere des Mondes gegen die Erde = 178725, mithin in der Entfernung $AT = \frac{178725 . N^2}{AT^2}$. Die Kraft der Sonne wirkt in den Syzygien derjenigen der Erde entgegen und ist im Abstande N von der Erde = 2000; daher im Abstande $AT = \frac{2000 . AT}{N}$. Mithin wird die ganze erziehende Kraft proportional $\frac{17872 5. N^2}{AT^2} - \frac{2000 . AT}{N}$ oder auch, indem man durch N^2 dividirt, proportional $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000 . AT}{N . N^2}$. Weil aber sehr nahe AT = CT, wird $\frac{AT + CT}{2} = N = \sqrt{AT . CT}$ und $\frac{AT}{N . N^2} = \frac{AT}{N . AT . CT} = \frac{1}{N . CT}$; mithin obige Kraft sehr nahe proportional $\frac{178725}{AT^2} - \frac{2000}{CT . N}$; oder $178725 CT^2 . N - 2000 AT^2 . CT$. Aehnlich für die Quadraturen.

No. 247. S. 422. (Fig. 193.) Wir wollen der Kürze wegen
die Krümmung der Ellipse in A und C durch E^A, E^C
„ „ „ Figur Tpa „ a „ C „ B^a B^C
„ „ des ersten Kreises „ K^A
„ „ „ zweiten „ „ K^C
bezeichnen. Denkt man sich nun aus T mit TA einen Kreisbogen geschlagen, welcher durch A und a gehen wird und hierauf von A und a aus auf der Ellipse und Bahn gleichzeitig beschriebene kleine Stücke v und v' abgetragen, so dass in beiden Fällen der Körper durch die anziehende Kraft der Erde ihr um gleiche Stücke e näher gebracht sein

würde; so ist $-\frac{e}{v^2}$ dem Unterschiede der Krümmungen der Bahn in a und des Kreises in a, oder $B^a - K^a$ proportional (Bem. 245.) Ferner ist $-\frac{e}{v^2}$ dem Unterschiede der Krümmung der Ellipse in A und desselben Kreises, oder $E^A - K^A$ proportional. Wir haben daher

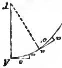


Fig. 259.

$$1.\ B^a - K^A : E^A - K^A = \frac{e}{v'^2} : \frac{e}{v^2} = v^2 : v'^2 = CTP^2 : CTp^2.$$

Auf ähnliche Weise ergiebt sich das letzte Verhältniss im Texte

$$1a.\ E^C - K^C : B^C - K^C = \angle\ CTp^2 : CTP^2.$$

Ferner ist K^A proportional $\frac{1}{TA}$, K^C proportional $\frac{1}{TC}$. E^A ist dem Radius des osculirenden Kreises in A und E^C den Radius des osculirenden Kreises in C umgekehrt proportional. Der erste Radius ist aber $= \frac{TC^2}{TA}$, der letztere $= \frac{TA^2}{TC}$, also

$$2.\ E^A : K^A = \frac{TA}{TC^2} : \frac{1}{TA} = TA^2 : TC^2.$$

$$3.\ K^A : K^C = \frac{1}{TA} : \frac{1}{TC} = TC : TA.$$

$$4.\ K^C : E^C = \frac{1}{TC} : \frac{TC}{TA^2} = TA^2 : TC^2.$$

No. 248. S. 422. Aus Proportion 2. folgt nämlich

$$5.\ E^A - K^A : K^A = TA^2 - TC^2, \text{ aus 1. und 5.}$$

$$6.\ B^a - K^A : K^A = (TA^2 - TC^2)CTP^2 : TC^2 . CTp^2.$$

hieraus $7.\ B^a : K^A - TA^2 . CTP^2 + TC^2(CTp^2 - CTP^2) : TC^2 . CTp^2.$

Ferner aus Proportion 4.

$$8.\ K^C : E^C - K^C = TA^2 : TC^2 - TA^2,$$

hieraus und aus 1a.

$$9.\ K^C : B^C - K^C = TA^2 . CTp^2 : (TC^2 - TA^2)CTP^2$$

oder $10.\ K^C : B^C = TA^2 . CTp^2 : TC^2 . CTP^2 + TA^2(CTp^2 - CTP^2),$
hieraus und aus 3.

$11.\ K^A : B^C = TA^2 . TC . CTp^2 : TA . TC^2 . CTP^2 + TA^2(CTp^2 - CTP^2).$

Durch die Verbindung der Proportionen 7. und 11. erhalten wir endlich

$12.\ B^a : B^C = TA^4 . TC : CTp^2 . CTP^2 + TA^2 . TC^3 . CTp^2(CTp^2 - CTP^2) : TA . TC^4, CTp^2 . CTP^2 + TA^3 . TC^2, CTp^2(CTp^2 - CTP^2)B^a : B^C = TA^3 + TA . TC^2 \frac{CTp^2 - CTP^2}{CTP^2} : TC^3 + TA^2 . TC \frac{CTp^2 - CTP^2}{CTP^2}.$

Man hätte übrigens auch die Verhältnisse $E^A : B^a$ und $E^C : B^C$ un-

mittelbar nach §. 84, Zusatz 3 des ersten Buches auf folgende Weise finden können. Setzte man statt des dortigen A hier TA

T „ TC

R „ $\frac{TA^2}{TC}$

F „ CTP

G „ CTp;

so würde das Verhältniss der Kräfte für E und B in den Punkten A und a $\frac{TA \cdot CTP^2}{TC^3} : \frac{TA \cdot CTP^2}{TC^3} + \frac{TA^2}{TC} \cdot \frac{CTp^2 - CTP^2}{TA^3}$ und das Verhältniss der Geschwindigkeiten CTP : CTp; mithin $E^A : B^a$

$= \frac{TA \cdot CTP^2}{TC^3 \cdot CTP^2} : \frac{TA \cdot CTP^2}{TC^3 \cdot CTp^2} + \frac{1}{TC \cdot TA} \cdot \frac{CTp^2 - CTP^2}{CTp^2}$ oder auch

$$13. \quad E^A : B^a = TA^2 \cdot \frac{CTp^2}{CTP^2} : TA^2 + TC^2 \cdot \frac{CTp^2 - CTP^2}{CTP^2}.$$

Vertauscht man hier TA mit TC,

A „ C und umgekehrt, so erhält man unmittelbar

$$14. \quad E^C : B^C = TC^2 \cdot \frac{CTp^2}{CTP^2} : TC^2 + TA^2 \cdot \frac{CTp^2 - CTP^2}{CTP^2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen 13 und 14 würde man leicht, durch Benutzung der Proportionen 2. 3 und 4, die Proportion 12 wieder herleiten können.

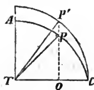


Fig. 259.

No. 249. S. 423. Dem Winkel CTP in der Ellipse entspricht die mittlere Bewegung CTP' im Kreise, und es ist daher tang CTP : tang CTP' = PQ : P'Q = AT : TC = 69 : 70.

No. 250. S. 423. Bestimmt man einen Winkel CTP'' so, dass tang CTP'' $= \frac{68,6877}{69}$ tang CTP so wird, weil tang CTP $= \frac{69}{70}$ tang CTP', tang CTP'' $= \frac{68,6877}{70}$ tang CTP'.

No. 251. S. 429. (Fig. 196.) Aus $fg = \frac{ce \cdot fY}{cY}$ in 5. folgt nach 4. $\frac{fg}{fT} = \frac{FG}{FT}$, d. h. T, G und g liegen in gerader Linie und es ist $\angle$ fTg = FTG. Allgemein ist aber sin fTg = sin FTG $= \frac{fg}{fT}$ sin fgT : $\frac{FG}{FT}$ sin FGT näherungsweise $= \frac{fg}{fT} : \frac{FG}{FT}$, weil genähert $\angle$ fgT = FGT. Es ist aber wirklich (nach 6.) $fg = \frac{ce \cdot fp}{cp} = \frac{ce \cdot fY}{cY} \cdot \frac{fp}{cp} \cdot \frac{cY}{fY}$, d. h. das fg in 5.

muss durch $\frac{fp}{ep} \cdot \frac{eY}{fY}$ multiplicirt werden. Demnach wird statt $\frac{fg}{fT} = \frac{FG}{FT}$

$$\text{jetzt } \frac{fg}{fT} = \frac{FG}{FT} \cdot \frac{fp}{ep} \cdot \frac{eY}{fY}$$

$$\text{und } \frac{fg}{fT} : \frac{FG}{FT} = \sin fTg : \sin FTG = fp \,.\, eY : fY \,.\, ep.$$

No. 252. S. 430. Man setze die Radienvectoren in den Quadraturen, Octanten und Syzygien respective gleich q, o, s, die Winkelgeschwindigkeit allgemein $= dv$, die jenen entsprechenden Zeitelemente gleich $t^{(q)}, t^{(o)}, t^{(s)}$; alsdann haben wir nach dem Frühern (§.30) $q^2dv : s^2dv = 10973 : 11073$; also weil $o^2dv = \frac{1}{2}(q^2 + s^2)dv$, $o^2dv : \begin{pmatrix}(s^2 - o^2)dv \\ (o^2 - q^2)dv\end{pmatrix} = 11023 : 50.$ Jene Verhältnisse der Flächenelemente würden für gleiche Zeitelemente gelten, wogegen bei verschiedenen Zeitelementen diese den ersteren umgekehrt proportional sind; demnach $t^{(o)} : \begin{pmatrix}t^{(o)} - t^{(s)} \\ t^{(q)} - t^{(o)}\end{pmatrix} = 11023 : 50.$

No. 253. S. 431. In derselben Zeit, wo der Mond in seiner Bahn den Weg PM zurücklegt, beschreibt er, vermöge der während dieser kurzen Zeit als constant zu betrachtenden Sonnenkraft 3. JT den Weg SM und dieser ist alsdann $3.JT \,.\, Q^2$, wenn t jene kleine Zeit bezeichnet.

No. 254. S. 431. Es verhält sich die übrigbleibende Bewegung zur ganzen Bewegung, wie $11023^2 : 11073^2$, d. h. wie $(11073 - 50)^2 : 11073^2$ und wenn man 50^2 gegen 11073^2 vernachlässigt, beiläufig

$$11073^2 - 100 \,.\, 11073 : 11073^2,\ 11073 - 100 : 11073,\ 10973 : 11073,$$

worans die Verhältnisse 100 : 10973 und 100 : 11073 im Text unmittelbar hervorgehen.

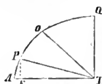


Fig. 261.

No. 255. S. 431. Man setze den Winkel, welchen der Mond im Octanten O in einer gegebenen Zeit zurücklegt $= L$, den derselben Zeit im Punkte P entsprechenden Winkel $= L + x$, endlich den der Syzygie A entsprechenden $L + l$. Ferner sei die, derselben Zeit entsprechende Bewegung des Knotens in $O = N - d$ und in $P = N$. Da nun die letzteren Bewegungen dem Quadrat der Zeiten proportional sind, so wird $N - d : N = L^2 : (L + x)^2 = L^2 : L^2 + 2Lx + x^2$ oder, weil x in Vergleichung mit L sehr klein ist, genähert

$$1.\quad N - d : N = L : L + 2x$$

und hieraus $N : d = L + 2x : 2x$ oder wieder genähert

$$2.\quad N : d = L : 2x.$$

Bezeichnet nun A die Bewegung des Knotens in der Syzygie A, und a deren Increment, so ist nach 2.

$$3.\quad a : A = 2l : L$$

und nach 2. und 3. $aN : d \,.\, A = l : x$ oder auch

$$4.\quad d : a = xN : l \,.\, A.$$

Nach der Stelle im Texte (§. 30) ist $x : l = TE^2 - \frac{1}{2}AT^2 : \frac{1}{2}AT^2$ und so $xN : lA = N(TE^2 - \frac{1}{2}AT^2) : \frac{1}{2}A \,.\, AT^2$, also nach 4.

$$5. \quad d : a = N(TE^2 - \tfrac{1}{2}AT^2) : \tfrac{1}{2}A \,.\, AT^2.$$

Nun ist $TE = AT \,.\, \sin PTQ = AT \,.\, \cos AP$, also $TE^2 - \frac{1}{2}AT^2 = AT^2 \cos AP^2 - \frac{1}{2}AT^2 = \frac{1}{2}AT^2 \cos 2 \,.\, AP)$, und nach 5.

$$6. \quad d : a = N \,.\, AT \,.\, \cos 2AP : A \,.\, AT.$$

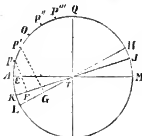


Fig. 262.

No. 256. S. 431. Es sei die Syzygia in A, die Quadranten in Q und der Octant in O. Ferner sei $AP = OP' = OP'' = QP''' = AK$, PE auf AT, PF' auf KT perpendiculär, $AL = AP'$ und P'G auf LT perpendiculär. Je nachdem der Mond sich in A, P, P', P'', P''' befindet, mögen die stündlichen Bewegungen der Knoten Q und q durch jene Buchstaben selbst, die Decremente dieser Bewegungen in A, P, P' durch a, p, p', die Incremente in P'' und P''' durch p'', p''' bezeichnet werden.

Nach der vorhergehenden Bemerkung (255) ist nun

$$1. \quad p : a = P \,.\, TF : A \,.\, TA,$$

ferner weil $PQJ = 2 \,.\, PQ$, nach §. 30 $P : A = JF : 2AT$ und so,

$$2. \quad p : a = JF \,.\, TF : 2 \,.\, AT^2,$$

ebenso $\quad 3. \quad p''' : a = KF \,.\, TF : 2 \,.\, AT^2,$

indem $KF = TA \sin vers. PK = TA \sin vers. 2 \,.\, AP = TA \sin vers. 2 \,.\, P'''Q$ und $TF = TA \cos 2 \,.\, AP = TA \cos 2 \,.\, P'''Q$. Aus 2. und 3. folgt $p - p''' : a = (JF - KF)TF : 2AT^2 = 2TF^2 : 2 \,.\, AT^2$ oder

$$4. \quad p - p''' : a = TF^2 : AT^2,$$

ähnlich $\quad 5. \quad p' - p'' : a = TG^2 : AT^2$

und aus 4. und 5.

$$6. \quad p + p' - p'' - p''' : = TF^2 + JG^2 : AT^2.$$

Da nun $TF = TA \,.\, \cos 2 \,.\, AP$, $TG = TA \cos 2 \,.\, AP' = TA \cos 2\,(AO - OP') = TA \cos 2(45^0 - AP) = TA \sin 2. AP$, also $TF^2 + TG^2 = TA^2$, so wird aus 6. $p + p' - p'' - p''' = a$.

No 257. S. 432. Es ist nämlich $Aa : ZY = AT : AZ$, wo Aa und AT gegebene Grössen sind.

No. 258. S. 433. Setzt man die mittlere Bewegung des Knotens im Orte $N = m^{(n)}$, in der Quadratur, wo sie am grössten und $= 39^0{,}6355$ ist, $= m^{(g)}$, endlich die Bewegung der Sonne $= 360^0 = m^{(s)}$; so ist $m^{(s)} : m^{(g)} = 360 : 39{,}6355$, $m^{(g)} : m^{(n)} = AT^2 : AZ^2$, mithin $m^{(s)} : m^{(n)} = 360 \,.\, AT^2 : 39{,}6355 AZ^2 = 9{,}0827666 AT^2 : AZ^2 = \alpha \,.\, AT^2 : AZ^2$, wo der Kürze wegen $9{,}0827666 = \alpha$ gesetzt ist. Ferner wird $m^{(s)} : n^{(s)} + m^{(n)} = \alpha \,.\, AT^2 : \alpha \,.\, AT^2 + AZ^2$ und daher, wenn $t^{(s)}$, $t^{(n)}$ die, den Bewegungen

$m^{(s)}$, $m^{(n)}$ respective entsprechenden Zeiten bezeichnen, weil $m^{(n)}$ der $m^{(s)}$ entgegengesetzt ist und daher $t^{(s)}$ durch $t^{(n)}$ verkürzt wird, $t^{(s)} : t^{(s)} - t^{(n)} = \alpha \,.\, AT^2 + AZ^2 : \alpha \,.\, AT^2$.

No. **259**. S. **433**. Es ist

$$1.\ dZ \,.\, ZY : ATa = AZ^2 : \alpha \,.\, AT^2 + AZ^2 = t^{(n)} : t^{(s)},$$

da aber $ATa = {}^1/_2 Aa \,.\, AT$ und $Aa : YZ = AT : AZ$, also $Aa = \frac{YZ \,.\, AT}{AZ}$; so wird $dZ \,.\, ZY : ATa = dZ \,.\, ZY : {}^1/_2 \frac{YZ \,.\, AT^2}{AZ} = dZ \,.\, BZ : {}^1/_2 AT^2$ und es geht die Proportion 1. über in

$$2.\ dZ : {}^1/_2 AZ = AT^2 : \alpha\ ,\ AT^2 + AZ^2.$$

$dZ \,.\, ZY$ entspricht $t^{(n)}$, d. h. den durch die Knotenbewegung hervorgebrachte Decrement der Zeit, während der durch ATa dargestellten Zeit; NdZ stellt das, dem Sector ATN entsprechende Decrement dar und da NATN die ganze unverkürzte Zeit darstellte, so wird NATN — NdZ die ganze, vermöge der Knotenbewegung verkürzte Zeit darstellen.

No. **260**. S. **434**. Wir haben im Text $aZ : AZ = AZ^2 : \alpha \,.\, AT^2 + AZ^2 = t^{(n)}\, t^{(s)}$, also auch $aZ \,.\, ZY : AZ \,.\, ZY = t^{(n)} : t^{(s)}$ oder $aZN : AZN = T^{(n)} : T^{(s)}$, wo $T^{(n)}$ nnd $T^{(s)}$ die Summen aller $t^{(n)}$ und $t^{(s)}$ bezeichnen. Es wird auch $aZN \,.\, AZN - aZN = aZN : NAa = T^{(n)} : T^{(s)} - T^{(n)}$.

No. **261**. S. **434**. (Fig. 197.) Setzt man $TZ = x$, $ZA = y$, $Za = y : TA = r\alpha$ wie vorhin, $\alpha' = \alpha + 1$; so ist nach der frühern Proportion. (Bem. 260.) $y' = \frac{y^3}{\alpha r^2 + y^2}$ aber $y^2 = r^2 - x^2$, also $y' = \frac{(r^2 - x^2)^{3/2}}{\alpha' r^2 - x^2}$

$$= \Big[r^3 - {}^3/_2 r x^2 + {}^3/_8 \cdot \frac{x^4}{r} + {}^1/_{16} \frac{x^6}{r^3} + {}^1/_{128} \cdot \frac{x^8}{r^5} + {}^3/_{256} \frac{x^{10}}{r^7}$$

$$+ {}^7/_{1024} \cdot \frac{x^{12}}{r^7} + {}^9/_{2048} \cdot \frac{x^{14}}{r^{11}} \cdots\cdots \Big]$$

$$\times \Big[\frac{1}{\alpha' r^2} + \frac{x^2}{\alpha'^2 r^4} + \frac{x^4}{\alpha'^3 r^6} + \frac{x^6}{\alpha'^4 r^8} + \frac{x^8}{\alpha'^5 r^{10}} + \frac{x^{10}}{\alpha'^6 r^{12}} + \frac{x^{12}}{\alpha'^7 r^{14}} + \frac{x^{14}}{\alpha'^8 r^{18}} \cdot\cdot \Big]$$

$$= \begin{array}{l|l|l|l|l} \frac{r}{\alpha'} - \frac{3}{2\alpha'} & \frac{x^2}{r} + \frac{3}{8\alpha'} & \frac{x^4}{r^3} + \frac{1}{16\alpha'} & \frac{x^6}{r^5} + \frac{3}{128\alpha'} & \frac{x^8}{r^7} \\ \quad + \frac{1}{\alpha^2} & \quad - \frac{3}{2\alpha'^2} & \quad + \frac{3}{8\alpha'^2} & \quad + \frac{1}{16\alpha'^2} & \\ & \quad + \frac{1}{\alpha'^3} & \quad - \frac{3}{2\alpha'^3} & \quad + \frac{3}{8\alpha'^3} & \\ & & \quad + \frac{1}{\alpha'^4} & \quad - \frac{3}{2\alpha'^4} & \\ & & & \quad + \frac{1}{\alpha'^5} & \end{array}$$

$$
\begin{array}{rl|l rl|l rl|l}
+ & \frac{3}{256\alpha'} & \frac{x^{1}_{1}}{r^{9}} & + & \frac{7}{1024\alpha'} & \frac{x^{12}}{r^{11}} & + & \frac{\text{ö}}{2048\alpha'} & \frac{x^{14}}{r^{13}} \\
+ & \frac{3}{128\alpha'^{2}} & & + & \frac{3}{256\alpha'^{2}} & & + & \frac{7}{1024\alpha'} & \\
+ & \frac{1}{16\alpha'^{3}} & & + & \frac{3}{128\alpha'^{4}} & & + & \frac{3}{256\alpha'^{2}} & \\
+ & \frac{3}{8\alpha'^{4}} & & + & \frac{1}{16\alpha'^{4}} & & + & \frac{3}{128\alpha'^{4}} & \\
+ & \frac{3}{2\alpha'^{5}} & & + & \frac{3}{8\alpha'^{5}} & & + & \frac{1}{16\alpha'^{5}} & \\
- & \frac{3}{\alpha'^{6}} & & - & \frac{3}{2\alpha'^{6}} & & - & \frac{3}{8\alpha'^{8}} & \\
 & & & \div & \frac{1}{\alpha'^{7}} & & - & \frac{3}{2\alpha'^{7}} & \\
 & & & & & & + & \frac{1}{\alpha'^{8}} & \\
\end{array}
$$

Hiernach wird $\int\limits_{-r}^{+r} y' dx = r^2 \Big\{ \frac{1}{\alpha'}[2 - 1 + {}^3/_{20} + {}^1/_{56} + {}^1/_{192} + {}^3/_{1408} + {}^7/_{6656} + {}^3/_{5120}]$

$$+ \frac{1}{\alpha'^2}[{}^2/_3 - {}^3/_5 + {}^3/_{28} + {}^1/_{72} + {}^3/_{704} \cdots] + \frac{1}{\alpha'^3}[{}^2/_5 - {}^3/_7 + {}^1/_{12} \cdots]$$

$$+ \frac{1}{\alpha'^4}[{}^2/_7 - {}^1/_3 + {}^3/_{44} \cdots] \Big\} \text{ etc.}$$

$$= r^2 \left[\frac{1{,}17711}{\alpha'} + \frac{0{,}1917}{\alpha'^2} + \frac{0{,}054}{\alpha'^3}\right] = 0{,}11869 r^2.$$

Der Halbkreis ist $= {}^1/_2 r^2 \pi$, mithin verhält sich NAn : NeFn $= 1{,}57090 : 0{,}11869 = 794{,}1 : 60$.

No. 262. S. 437. (Fig. 199.) Weil $TH^2 = TS \,.\, TK$ ist, wird $SK : ST = SK : \frac{TH^2}{TK} = TK \,.\, TK : TH^2 = (TK - TS)TK : TH^2 = TK^2 - TH^2 : TH^2 = (TK + TK)(TK - TH) : TH^2$ endlich $TK : ST = MH \,.\, HK : TH^2$.

No. 263. S. 437. (Fig. 199.) Setzt man nämlich $FG = Y$, $BG = y$, $GT = x$, $HT = h$, $KT = a$; so ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, $Y^2 = a^2 - x^2$, mithin $\frac{FG^2 - BG^2}{BG^2} = \frac{FB \,.\, Bf}{BG^2} = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\left(\frac{a^2 - x^2}{y^2}\right) = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} = \frac{KH \,.\, HM}{HT^2}$.

No. 264. S. 438. (Fig. 199.) Nach 1. wird nämlich $TH : TK = \sqrt{TS} : \sqrt{TK}$.

No. 265. S. 428. (Fig. 199.) Setzt man, wie in Bem. 264. $BG = y$, $FG = Y$, $TG = x$, ferner $\angle FTG = \beta$ und $\angle FTB = \alpha - \beta = \gamma$; so ist allgemein $\tang \alpha = \frac{Y}{x}$, $\tang \beta = \frac{y}{x}$, $\tang \gamma = \frac{Yx - yx}{x^2 + Yy}$. Wenn aber

HT = b und KT = a gesetzt wird, ist $Y = \frac{a}{b} y$ und $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$,

also $\text{tang}\,\gamma = b(a - b) \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2b^2 + b(a - b)x^2}$. Bezeichnet man nun die, dem grössten Werthe von γ entsprechenden Werthe durch einen Accent, so folgt aus d . tang γ = o, $a^2b - (a + b)\,x'^2 = o$, also $x' = a\sqrt{\frac{b}{a + b}}$,

$y' = b\sqrt{\frac{b}{a+b}}$, $Y' = a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$, $\text{tang}\,\alpha' = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\text{tang}\,\beta' = \sqrt{\frac{b}{a}}$, $\text{tang}\,\gamma' = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$.

Ferner tang α' . tang β' = 1, also $\alpha' = 90^0 - \beta'$, $\frac{\alpha' + \beta'}{2} = 45^0$ endlich

$\text{tang}\,\gamma' = \frac{(a-b)x'y'}{ba'^2 + ay'^2}$, $\sin(\alpha' - \beta') = \frac{a - b}{ab} \cdot \frac{x'y'}{\sqrt{x_,^2 + y'^2}}$. Ebensoans

$\text{tang}(\alpha+\beta) = \frac{(a+b)xy}{ba^2 - ay^2}$, $\sin(\alpha'+\beta') = \frac{a + b}{ab} \cdot \frac{x'y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ und so

$\sin(\alpha' - \beta') : \sin(\alpha' + \beta') = a - b : a + b = \frac{a - b}{a + b} : 1 = \sin\gamma' : 1.$

No. 266. S. 438. Die mittlere tägliche Bewegung der Sonne ist = 59′8,″3, daher ihre mittlere stündliche Bewegung $\triangle \odot$ = 147″,8. Setzen wir ferner die mittlere stündliche Bewegung der Knoten in den Quadraturen = $\triangle\,☊^{(q)}$; so haben wir nach Anmerkung 1. Erster Fall.

TS : SK = $\triangle \odot : \triangle\,☊^{(q)}$. Aus der Proportion TH : TK $= \sqrt{8,0827646} : \sqrt{10,0827646}$ folgt aber mittelst Gl. 1. TS : TK = 9,0827646 : 40,0827646, TS : SK = 9,0827646 : 1. also $\triangle\,☊^{(g)}$

$= \frac{\triangle \odot}{9,0827646}$ = 16″3. Nach der vorhergehenden Bem. 265. haben wir

$\sin\gamma_, = \frac{a - b}{a - b}$ und da a = KT, b = HT und TK : TH

= 19,6524761 : 18,6524761 sin $\gamma' = {}^1/_{38,3049522}$, γ' bedeutet aber nach der vorigen Bemerkung die grösste Bewegung des Knotens in den Octanten, und bezeichnen wir diese stündliche Bewegung durch $\triangle\,☊^{\circ}$, so haben wir $\triangle\,☊^{(o)}$ = 1° 29′ 45″ ein wenig von dem Werthe im Texte abweichend.

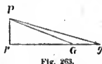


Fig. 263.

No. 267. S. 439. (Fig. 200.) Es ist GT sin GTg

$= Gg = \frac{PG \,.\, \sin GPg}{\sin GgP} = \frac{PG}{Pp} \cdot \sin GPg \,.\, gP$

und sin GPG : sin GTg = $\begin{cases} GT : PG \\ Pp : Pg \end{cases}$

= GT . Pp : Pg^2, indem Pg = PG gesetzt worden ist

No. 268. S. 440. (Fig. 200.) Setzt man der Kürze wegen die im Zusatz 2 gefundene Veränderung der Neigung während eines Monats = V, so ist V : 33″,2 = AZ . TZ $\frac{Pp}{PG}$ · QAqa : 2Mp . AT^2 oder $\frac{V \,.\, Mp}{QAqa}$: 33″,2

$= AZ \,.\, TZ \cdot \frac{Pp}{PG} : 2 \,.\, AT^2$ und weil Mp die stündliche Bewegung des Mondes auf der Peripherie QAqa ist, $\frac{V \,.\, Mp}{QAqa}$ die mittlere stündliche Veränderung der Neigung.

Ferner ist unmittelbar $\frac{Pp}{PG} = \sin PGp$, für den Radius $= 1$

$= \frac{\sin PGp}{AT}$ „ „ „ $= AT$

$\frac{AZ}{AT} = \sin ATn$, $\frac{TZ}{AT} = \cos ATn$, mithin $\frac{AZ \,.\, TZ}{2AT^2} = {}^1/_2 \sin ATn \,.\, \cos ATn$ $= {}^1/_4 \sin 2 \,.\, ATn$.

No. 269. S. 440. (Fig. 200.) In diesem Falle trifft N mit Q zusammen, es geht daher AZ in AT, TG in TK über und wir erhalten $JT \,.\, TG = AT \,.\, \sin pTQ \,.\, AT \,.\, \cos pTQ = {}^1/_2 AT^2 \sin 2pTQ$, so wie $\frac{JT \,.\, TG}{{}^1/_2 AT} = AT \,.\, \sin 2pTQ$.

No. 270. S. 441. Um die Summe der im Text aufgeführten Sinusse zu finden, wollen wir uns den Quadranten $^1/_2\pi$ in n gleiche Theile getheilt denken, wo n eine grosse Zahl, hier $177^1/_6$ bezeichnet; alsdann haben wir die Reihe

$\sin\left(2 \cdot \frac{^1/_2\pi}{n}\right), \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{n}\right), \sin\left(2 \cdot \frac{^3/_2\pi}{n}\right), \sin\left(2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) \ldots\ldots\ldots$ bis $\sin\left(2 \cdot \frac{n-1}{n}\pi\right)$ zu summiren. Setzen wir nun $\frac{1}{n} = x$, so wird die gesuchte Summe $S = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + . + \ldots\ldots + \sin \nu x$, wo $\nu x = \frac{n-1}{n}\pi = \pi - \frac{1}{n}\pi$, $(\nu - 1)x = \frac{n-2}{n}\pi = \pi - \frac{2}{n}\pi$.

Setzen wir statt der Sinusse die ihnen entsprechenden Exponentialfunctionen, so wird für $i = \sqrt{-1}$,

$$S = \frac{1}{2i}\left\{\left[e^{ix} + e^{2ix} + e^{3ix} + \ldots + e^{\nu ix}\right] - \left[e^{-ix} + e^{-2ix} + e^{-3ix} + \ldots e^{-\nu ix}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2i}\left\{e^{ix}\frac{e^{(\nu-1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} - e^{-ix}\frac{e^{-(\nu-1)ix} - 1}{e^{-ix} - 1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2i}\,\frac{e^{(\nu-1)ix} - e^{-(\nu-1)ix} + e^{ix} - e^{-ix} - \left[e^{\nu ix} - e^{-\nu ix}\right]}{2 - \left[e^{ix} + e^{-ix}\right]}$$

$$S = \frac{1}{2i}\,\frac{2i\sin(\nu-1)x + 2i\sin x - 2i\sin \nu x}{2 - 2\cos x} = {}^1/_2\,\frac{\sin(\nu-1)x + \sin x - \sin \nu x}{1 - \cos x}$$

Da aber $\sin(\nu - 1)x = \sin\left(\pi - \frac{2}{n}\pi\right) = \sin\frac{2\pi}{n}$; $\sin \nu x = \sin\frac{\pi}{n}$

$\sin x = \sin\frac{\pi}{n}$; $\cos x = \cos\frac{\pi}{n}$, so wird $S = {}^1/_2 \cdot \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{1 - \cos\frac{\pi}{n}}$ und $\frac{S}{2n}$

$= {}^1/_4 \frac{\frac{1}{n}\sin\frac{2\pi}{n}}{1 - \cos\frac{\pi}{n}}$. Da nun n sehr gross, also $\frac{1}{n}$ sehr nahe $= o$ vorausgesetzt sind, so kommt der vorstehende Quotient der Form $\frac{o}{o}$ nahe. Um den Grenzwerth desselben für $n = \infty$ zu finden, setzen wir $\frac{1}{n} = k$; alsdann geht jener Quotient über in $S = {}^1/_4 \frac{k \sin 2k\pi}{1 - \cos k\pi} = {}^1/_4 \frac{2k^2\pi - {}^8/_6 k^4\pi^3 \ldots}{{}^1/_2 k^2\pi^2 - {}^1/_{24} k^4\pi^2 \ldots}$

$\frac{\frac{1}{\pi} - {}^4/_6 k^2\pi^2}{1 - {}^1/_{12} k^2\pi^2}$ d. h. für $k = o$ oder $n = \infty$, $S = \frac{1}{\pi} = {}^7/_{22}$ wie im Text.

Ferner wird $\frac{Pp}{pG} = \sin 5^0\ 1' = {}^{874}/_{10000}$ und ${}^{278}/_{10000} \cdot 5878'' = 163''$.

No. 271. S. 442. Setzt man in §. 38., Zusatz 3. die stündliche Aenderung der Neigung $= \nu$, dort wie hier die Neigung selbst $= i$, den Winkelabstand der Knoten $= \triangle$; so ist

dort hier

$$\nu = \frac{\sin i \sin 2\triangle}{4r^2} \cdot 33'',2 \qquad Hh = C \sin i \sin 2\triangle$$

wo r und C constant sind. Mithin sind ν und Hh derselben Grösse $\sin i \sin 2\triangle$, und wenn $\sin 2\triangle$ als constant vorausgesetzt wird, $\sin i$ proportional: Hh wird daher in gleichem Sinne wie $\sin i$ zunehmen.

No. 272. S. 444. Der Werth der grössten Mittelpunktsgleichung der Sonne, für den mittlern Abstand der Erde $= a$, ist im Text $= 1^0\ 56'\ 20'' = M$ angesetzt, wobei wir bemerken, dass Hansen a. a. O. $M = 1^0\ 55'\ 27,''6$ hat. Für den Abstand $a + x$, wird $M' = M + \triangle' M = M \cdot \frac{a^2}{(a \pm x)^2} = M \mp \frac{2xM}{a}$; $M'' = M + \triangle'' M = M \cdot \frac{a^3}{(a \pm x)^3} = M \mp \frac{3xM}{a}$ also $\triangle' M : \triangle'' M = 2 : 3$ und $\triangle'' M = {}^3/_2 \triangle' M$. Wenn nun $\triangle' M$ die wahre Aenderung von M und $\triangle'' M$ die hypothetische Aenderung desselben ist, so können wir $M + \triangle' M = 1^0\ 56'\ 20''$ oder für $M = o$, $\triangle' M = 1^0\ 56'\ 20''$ setzen und erhalten dann $M'' = \triangle'' M = {}^3/_2 (1^0\ 56'\ 20'') = 2^0\ 54'\ 30''$.

No. 273. S. 444. Setzt man die grösste Gleichung der mittlern täglichen Bewegung des Apogeums $= \triangle Ap.$, die des Knotens $= \Omega$, so hat man, auch Hansen a. a. O. $\left.\begin{matrix}\triangle Ap.\\ \triangle\Omega\end{matrix}\right\} : 2^0\ 54'\ 30'' = \left.\begin{matrix}6'41,''0 \text{ rechtl.}\\ 3'10,64 \text{ rückl.}\end{matrix}\right\} : 59'\ 8,''3$ und hieraus $\triangle Ap. = 19'\ 43''$ rechtl., $\triangle\,\Omega = 9'\ 22'',5$ rückl.

No. 274. S. 444. Es sei ACDB die Mondbahn, T die Erde, A das Apogeum des Mondes, S die Sonne und deren Abstand von T im Mittel ST $= a$. Die halbe grosse Axe der Mondbahn sei AM $= \alpha$, ihre halbe kleine MB $= \beta$, die Excentricität MT $= \alpha\varepsilon$, also AT $= \alpha(1 + \varepsilon)$ und SA $= a - \alpha(1+\varepsilon)$. Ferner wird die Ordinate TG $= \alpha(1 - \varepsilon^2)$ und SG $= a - \alpha(1-\varepsilon^2)$, also TG $<$ AT, SG $>$ AS. Wenn daher der Mond sich im Punkte A befindet, wird die Wirkung der Sonne auf ihn grösser sein, wenn die Sonne sich in der Richtung AD befindet, als die von S ausgehende Wirkung auf den in G befindlichen Mond, wenn die Sonne sich in der auf AD senkrechten Richtung TG befindet und zwar verhält sich die erste Anziehung zur zweiten wie $\frac{1}{AT^2} : \frac{1}{GS^2}$.

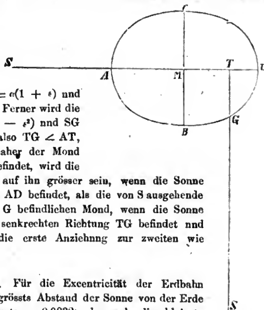


Fig. 264.

No. 275. S. 445. Für die Excentricität der Erdbahn $= 0{,}0168$ wird der grössts Abstand der Sonne von der Erde $= 1{,}0168$, der kleinste $= 0{,}9832$; demnach die kleinste Gleichung $= \frac{3' \, 45''}{1{,}0168^3} = 3' \, 34{,}''0$, die grösste Gleichung $= \frac{3' \, 45''}{0{,}9832^3} = 3' \, 56{,}''7$.

No. 276. S. 445. Der für den mittlern Abstand a geltende Werth von 47" ändert sich in demselben Verhältniss, wie in der vorhergehenden Bemerkung und da die in dieser gefundene Aenderung 11" bei 3' 45" $= 225''$ des mittlern Werthes, also etwa $^1/_{20}$ des letztern beträgt, so muss hier 45" um 2" steigen und sinken.

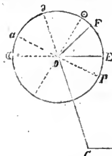


Fig 265

No. 277. S. 446. Man schlage aus D mit dem Radius DF einen Kreis, alsdann ist E das Apogeum des Mondes und ☾ sein Perigeum. Es sei α das Apogeum der Sonne, P das Perigeum, ⊙ der Ort der Sonne.

Nach der Voraussetzung ist dDE $=$ DCB $= 2 \, . \, \odot$E, EDC $= 180^0 - 2 \, . \, \odot$E, FDE $= \odot$E $-$ PE. (Voraussetzung im Text), also addirt EDC $+$ FDE $=$ CDF $180^0 - \odot$E $=$ PE. Es ist aber PE⊙α $= 180^0$, mithin $180^0 = \odot$E $-$ PE $=$ CDF

$= \alpha\odot = 360'' - \alpha☾$ PEF⊙ und $\alpha☾$PEF⊙ = Winkelabstand ⊙ von ihrem Apogeum $\alpha = v$ (wahr. Anomalie ⊙), mithin $\angle$ CDF $= 360^0 - v$.

No. 278. S. 446. Nach Hansen a. a. O. ist die mittlere tägliche Bewegung der Sonne von ihrem Perigeum $= 59' \, 8,''3$, die mittlere tägliche Bewegung des Perigeums des Mondes $= 6' \, 41,''0$, daher die tägliche mittlere Bewegung der Sonne vom Perigium (Apogeum) des Mondes $= 52' \, 27,''3$. Es wird $\log \left(\frac{33,875 \, . \, 52' \, 27,''3}{3}\right) = 4,55070$ und $\log \left(\frac{1000 \, . \, 59' \, 8'''3}{100}\right) = 4,55002$.

No. 279. S. 447. Es wird hier TC $= 5505 \, . \sin 12^0 \, 18' = 1172,73$ und FD $= {}^3/_{100} \, . \, 1172,3 = 35,2$.

No. 280. S. 448. Am grössten wird die, durch die Bewegung des Mittelpunktes der Mondbahn in dem kleinen, zu DF gehörigen Kreise hervorgebrachte Veränderung des Mondortes erscheinen, wenn man die diametral entgegengesetzten Punkte F, F' des Mittelpunktes



Fig. 266.

betrachtet, wo also FDF' diese von T aus gesehene Veränderung unterspannt. Dieselbe wird $=$ Arc. $\sin \frac{FF'}{TD}$ und da FF' $= 70,4$; TD $= 100000$ ist, so ist diese Veränderung $= 2' \, 25''$.

No. 281. S. 447. Aus diesem Grunde hat wohl Tobias Mayer die noch heute in Anwendung kommende Regel aufgestellt, bei der Berechnung der Mondfinsternisse den Durchmesser des Schattens in der Gegend des Mondes um ${}^1/_{60}$ zu vergrössern.

No. 282. S. 449. Es sei TH der Horizont eines Ortes T auf der Erde, S der Ort der Sonne, deren Höhe über dem Horizont STH $=$ h sei, Z das Zenith. Befände sich die Sonne in Z, so würde ihre Kraft P zur Erhebung des Wassers in T nach dem Obigen zu bestimmen sein. Hieraus ergibt sich die längs TS wirkende Seitenkraft, nach dem Parallegramme der Kräfte, TM $=$ P sin TZM $=$ P sin h und hieraus die längs TZ, d. h. nach dem Zenith hinwirkende Seitenkraft TN $=$ TM sin TMN $=$ P sin h². Diese Kraft ist die gesuchte, wenn S nicht im Zenith Z, sondern in der Höhe h über dem Horizont steht. Sie ist daher proportional $\sin h^2 = {}^1/_2(1 - \cos 2h) = {}^1/_2$ sinus versus 2h.

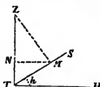


Fig. 267.

No. 283. S. 450. Ein Theil dieses Satzes ist nicht recht klar dargestellt. Die dritte Fluth nach der Syzygie tritt etwa 36 Stunden

später ein, in welcher der Mond sich rechtläufig im Mittel um $19^0\ 35'$ und die Sonne nur $1^0\ 28'$ bewegt, so dass ihr gegenseitiger Abstand $18^0\ 7'$ beträgt. Legt man zu den vorstehenden 36 Stunden die sogenannte Hafenzeit in Bristol von 7 Stunden, so kommen die im Text aufgeführten 43 heraus.

No. 284. S. 450. Befindet sich die Sonne in S, d. h. im Widderpunkte, ist L ein Solstitialpunkt, also $SL = 90^0$, $LL' = 18,^05$, also der Mond um $18,^05$ von der Quadratur entfernt; so ist $\sin L'a = \sin 108^0,5 \sin 23^0\ 27' = 22^0\ 14'$. Einmal ist die Kraft des Mondes in L' im Verhältniss $\cos L'a : 1$ kleiner, als wenn jener sich im Aequator befände. Ferner in demselben Verhältniss die Centripetalkraft und

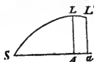


Fig. 268.

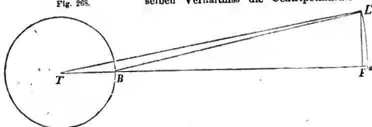


Fig. 269.

daher auch die Centrifugalkraft in L kleiner als in a; mithin durch Zusammensetzung die Kraft des Mondes in L' im Verhältniss $(\cos L'a)^2 : 1 = (\cos 22^0\ 14')^2 : 1$ kleiner als im Aequator.

No. 285. S. 451. Ist A der Ort des Mondes in der Syzygie, C der in der Quadratur, so hat man nach den Angaben im Texte, wenn die Erde sich in T befindet, die halbe grosse Axe $TA = a = 70$, die halbe kleine $CT = b = 69$. Wenn nun der Winkel $ATa = CTc = 18,^05$, $aT = z$, $cT = a$ gesetzt wird, so wird unmittelbar nach den Formeln der Ellipse $z^2 \sin^2 18,^05 = \frac{h^2}{a^2}(a^2 - z^2 \cos^2 18,^05)$ und

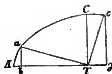


Fig. 270.

$$z^2 = \frac{a^2 \sin^2 18,^05 + b^2 \cos^2 18^0,5}{a^2 b^2}.$$ Substituirt man hier die Werthe von a und b, so ergiebt sich $z = aT = 69,897530$ nahe mit dem Text übereinstimmend. Mutatis mutandis, wird $u^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 18,5 + b^2 \sin^2 18^0,5}$ und $u = 69,098740$.

No. 286. S. 451. Ich erhalte aus den Werthen im Texte die Verhältnisse 0,9827797 : 1 und 1,0172410 : 1.

No. **287**. S. **452**. Nach Hansen a. a. O. ist, wenn $D^{(s)}$, $D^{(e)}$, $D^{(m)}$ bezüglich die Dichtigkeit der Sonne, der Erde und des Mondes bezeichnet, $D^{(m)} : D^{(s)} = 0{,}619 : 0{,}252 = 2679 : 1000$, $D^{(s)} : D^{(e)} = 0{,}252 : 1{,}000$, also $D^{(m)} : D^{(e)} = 0{,}619 : 1{,}000 = 1000 : 1615$ nnd im Gegensatz zum Text der Mond weniger dicht als die Erde. Vermittelst des Verhältnisses von $D^{(m)} : D^{(s)}$ nnd der bezüglichen Werthe der scheinbaren Durchmesser 31′ 7,″0 nnd 32′ 1,″8 erhalten wir nach der Vorschrift im Texte die Kraft des Mondes znr Bewegung des Meeres zur Kraft der Sonne wie $\left\{\begin{matrix} 2679 : 1000 \\ (31' \, 7,''0)^3 : (32' \, 1,''8)^3 \end{matrix}\right\} = 2{,}456 : 1.$

No. **288**. S. **252**. Nach den Werthen im Text wird die Masse des Mondes zu derjenigen der Erde, wie $\left\{\begin{matrix} 100^3 : 365^3 \\ 4891 : 4000 \end{matrix}\right\} = 1 : 39{,}76$, während nach Hansen $1 : 87{,}73$ sich ergiht.

No. **289**. S. **453**. Nach den im Text anfgeführten Werthen ist die Schwerkraft des Mondes $= l$, wenn die der Erde zukommende Schwerkraft dnrch t bezeichnet wird, $l : t = \left\{\begin{matrix} 365^2 : 100^2 \\ 1 \;\; : 39{,}788 \end{matrix}\right\}$; $l = {}^{13329}/_{39788}\, t$ nahe $= {}^1/_3 t$. Nach den neuern Werthen (Hansen a. a. O.) wird $l : t = \left\{\begin{matrix} 400^2 : 109^{2''} \\ 1 \;\; : 87{,}75 \end{matrix}\right\}$; $l = {}^1/_{6{,}518}\, t$.

No. **290**. S. **453**. Ans der Gleichheit der statischen Momente

$$1. \quad (1 - x) = 39{,}788 \,.\, x \text{ folgt } x = {}^1/_{40{,}7888}$$

und daher $\quad 1 : 1 - x = 40{,}788 : 39{,}788.$

Nach den nenern Werthen wird $1 : 1 - x = 88{,}73 : 87{,}78.$

No. **291**. S. **454**. Wir haben in den Syzygien den Abstand $= 59^{29}/_{30} = {}^{1799}/_{30}$, in den Quadraturen den Abstand $= 60^5/_6 = {}^{1825}/_{30}$ und daher in den Octanten den Abstand $= {}^{1812}/_{30}$. Dahei ist log 1825 — log 1812 = 0,00310 log 1812 — log 1799 = 3,00314, log 70 — log 69,5 = 0,00312 log 69,5 — log 29 = 0,00313.

No. **292**. S. **454**. Ich finde $39{,}788 \,.\, 100 : 1 \,.\, 365 = 1090 : 100$ nnd daher statt 93 Fnss deren 24.

Nach den früher angeführten neuern Werthen hätten wir das Verhältniss $87{,}73 \,.\, 109 : 1 \,.\, 400 = 2391 : 100$, nnd daher statt 93 Fnss deren 205,6 nnd den Unterschied der grossen nnd kleinen Axe 411 Fuss. Wohl verstanden, wenn der Mond flüssig wäre.

No. **293**. S. **455**. (Fig. 205.) Die Wahrheit dieser Behauptung würde sich leicht dnrch Raisonnement darthun lassen; man kann sie aber anch folgendermassen dnrch Rechnnng beweisen. Es werde SNJ in n gleiche Theile getheilt, so dass jeder derselben $= \frac{1}{n}\pi = x$ sei, alsdann haben wir, für den Radins $= 1$, die beiden Summen:

$$S = \sin^2 \frac{1}{n}\pi + \sin^2 \frac{2}{n}\pi + \ldots + \sin^2 \frac{n-1}{n}\pi$$

$$S' = \cos^2 \frac{1}{n}\pi + \cos^2 \frac{2}{n}\pi + \ldots + \cos^2 \frac{n}{n}\pi.$$

Durch Einführung der bekannten Exponential-Fnnctionen wird

$$S = \frac{e^{i.2x} + e^{i.4x} + \ldots + e^{i.2(n-1)x}}{-4} + \frac{e^{-i2x} + e^{-i4x} + \ldots + e^{-i2(n-1)x}}{-4} + (n-1).\frac{-2}{-4}$$

$$= -\,{}^1/_4 e^{i2x} . \frac{e^{i(n-1)2x} - 1}{e^{i2x} - 1} - {}^1/_4 e^{-i2x} . \frac{e^{-i(n-1)2x} - 1}{e^{-i2x} - 1} + {}^1/_2(n-1)$$

$$= -\,{}^1/_4 \frac{e^{i(n-1)2x} + e^{-i(n-1)2x} - e^{in2x} - e^{-in2x} + e^{i2x} + e^{-i2x} - 2}{2 - e^{i2x} - e^{-i2x}} + {}^1/_2(n-1),$$

$$8 = {}^1/_4 \frac{1 - \cos(n-1)2x + \cos 2nx - \cos 2x}{1 - \cos 2x} + {}^1/_2(n-1).$$

Hier ist, wie bekannt, $i = \sqrt{-1}$, ferner folgt aus $x = \frac{1}{n}\pi$, $2nx = 2\pi$, $(n-1)2x = 2\pi - 2x$, $\cos(n-1)2x = \cos 2x$, $\cos 2nx = 1$; mithin $S = {}^1/_4 \frac{1 - \cos 2x + 1 - \cos 2x}{1 - \cos 2x} + {}^1/_2(n-1) = {}^1/_2 n$. Was die Summe S' betrifft, so wird zunächst

$$S' = {}^1/_4 \left[e^{i2x} + e^{i4x} + \ldots + e^{i2nx}\right] + {}^1/_4 \left[e^{-i2x} + e^{-i4x} + \ldots e^{-i2nx}\right] + n . {}^2/_4$$

$$= {}^1/_4 \left[e^{i2x} \frac{e^{in2x} - 1}{e^{i2x} - 1} + e^{-i2x} \frac{e^{-in2x} - 1}{e^{-i2x} - 1}\right] + {}^1/_2 n$$

$$= {}^1/_4 \frac{-1 + \cos 2nx - \cos(n+1)2x + \cos 2x}{1 - \cos 2x} + {}^1/_2 n = {}^1/_2 n,$$ weil $\cos 2nx = 1$ nnd $\cos(n+1)2x = \cos(2\pi + 2x) = \cos 2x$.

No. 294. S. 477. Bezeichnet Σ die Snmme der Theilchen, so haben wir $\Sigma(LX^2) : \Sigma(JX_2) = 1 : 2$ (§. 44.) $\Sigma(JX^2) : \Sigma(AC^2) = JX^2 : AC^2$ (weil JX und AC constant sind), also $\Sigma\,(LX^2) : \Sigma(AC^2) = JX^2 : AC^2$.

No. 169. S. 823. Bezeichnet $\Sigma(JK)$ die Summe aller auf der Peripherie, $\Sigma(A)$ die Snmme aller in A befindlicher Theilchen, so hat man $\Sigma(JK) : \Sigma(A) = JK^2 - 2 . CX^2 : 2 . AC^2$ (Verh. 7.) $\Sigma(A) : \Sigma(AC) = 2 : 1$ (§. 44.), also $(JK) : \Sigma(AC) = JK^2 - 2 . CX^2 : AC^2$.

No. 296. S. 458. Zur Verdentlichung des Inhalts dieses §. mögen folgende Sätze hier hinzugefügt werden.

I. Satz. Die Grösse der Bewegung eines Kreises, welcher mit constanter Geschwindigkeit um seinen Mittelpunkt getrieben wird, ist dem Cnbns des Radins proportional.

Setzt man Ca = r, so ist die Menge der kleinen Körper eines, die Peripherie umgebenden sehr schmalen Ringes proportional 2rdr.

Ist die Winkelgeschwindigkeit constant, so wird die Geschwindigkeit in a proportional r; also das Differential der Grösse der Bewegung in a proportional $2r^2dr \cdot r = 2r^3dr$ und die Bewegung des Kreises proportional

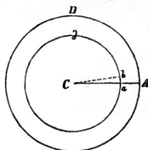


Fig. 271.

$$1.\ \int_0^r 2r^2dr = {}^2/_3 r^3,$$

d. h. dem Cubus des Radius.

Zusatz 1. Würde alle Materie auf dem äussern Kreise AD vereinigt, wo CA = R; so wäre das Differential der Masse wie vorhin proportional 2rdr, die Geschwindigkeit in A proportional R, mithin das Differential der Grösse der Bewegung selbst proportional R . 2rdr und in diesem Falle die Grösse der Bewegung selbst proportional

$$2.\ \int_0^R R \,.\, rdr = R\int_0^R 2rdr = R^3.$$

Aus Gleichung 1. folgt für r = R die Grösse der Bewegung $= {}^2/_3 R^3$.

Demnach verhält sich die Bewegung im letzten Falle zu der im erstern Falle stattfindenden Bewegung, wie

$$3.\ \ 3:2.$$

Zusatz 2. Die Bewegung eines Kreises verhält sich zur Bewegung eines sehr dünnen kreisförmigen Ringes, welcher mit gleicher Winkelgeschwindigkeit wie jener um den Mittelpunkt getrieben wird, wie die zweifache Materie des Kreises zur dreifachen des Ringes.

Für $Aa = \alpha$ ist nämlich dieses Verhältniss ${}^2/_3 R^3 : R\int_R^{R+\alpha} 2rdr$

$$= {}^2/_3 R^3 : R\,[(R+\alpha)^2 - R^2]$$

$$4.\ = 2R^2 : 3[(R+\alpha)^2 - R^2] = 2 \times \text{Kreis} : 3 \times \text{Ring}.$$

Zusatz 3. Werden Cylinder von gleicher Höhe um ihre Axen mit gleicher Winkelgeschwindigkeit gedreht, so verhalten sich die Grössen ihrer Bewegungen wie die Cuben der Radien ihrer Grundflächen.

Jeder dieser Cylinder ist nämlich als ein Aggregat gleich vieler, ihrer Grundfläche gleicher, Kreise anzusehen.

Zusatz 4. Wäre die ganze Materie des Cylinders auf dem Mantel vereinigt, so würde bei gleicher Geschwindigkeit die Grösse der Be-

wegung in diesem Falle sich zu der im vorigen Falle verhalten, wie 3 : 2. Dies folgt aus Zusatz 1.

Zusatz 5. Wenn bei unveränderter geringer Dicke der Wand, wie auch unveränderter Breite des innern Raumes, durch allmählige Abnahme der Höhe, die Wand selbst sich zusammenzieht und zuletzt in einen Ring oder eine Zone übergeht; so wird, wenn auf der in einen Ring zusammengezogenen Wand dieselbe Materie bleibt, welche früher innerhalb des ganzen Cylinders befindlich war, auch die Bewegung des Ringes unverändert bleiben und sich zur ursprünglichen Bewegung des Cylinders verhalten, wie 3 : 2.

Zusatz 6. Die Bewegung eines um die Axe herumgetriebenen Cylinders verhält sich zur Bewegung eines sehr dünnen, den Cylinder umgehenden Ringes, wie die doppelte Materie des Cylinders zur dreifachen Materie des Ringes.

Denkt man sich einen Cylinder C, dessen Radius $= r$ und Materie $= m$,
einen andern C', „ „ $= r$ „ „ $= \mu$
und einen Ring R, „ „ $= r$ „ „ $= \mu$,
so hat man, wenn C, C', R zugleich die Bewegung dieser drei Körper bezeichnen, $C : C' = m : \mu$, $C' : R = 2 : 3$ (Zusatz 5.), also $C : R = 2m : 3\mu$.

II. Satz-Aufgabe. Um den Kreis GBJL ist das Quadrat ACMK und innerhalb des erstern die Figur GBEJL so beschrieben, dass für jede Ordinate DE

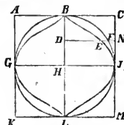


Fig. 272.

1. $DE : DF = DF^2 : HJ^2$

sei; man soll den Flächeninhalt dieser Figur mit dem des Kreises vergleichen.

Man setze $DE = y'$, $DF = y$, $HD = x$, $HJ = r$, alsdann ist nach Proportion 1. $y' : y = y^2 : r^2$,

also 2. $y' = \frac{y^3}{r^2}$.

Es ist aber $y^2 = r^2 - x^2$, mithin $y' = \frac{(r^2 - x^2)^{3/2}}{r^2}$ und so jener Flächeninhalt von HBEJ.

$$3. \int_0^r \frac{(r^2 - x^2)^{3/2} dx}{r^2} = {}^1/_4 \left[\frac{x(r^2 - x^2)^{3/2}}{r^2}\right]_0^r + {}^3/_4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,.\,dx.$$

Der erste Ausdruck auf der rechten Seite verschwindet für beide Grenzen $x = o$ und $x = r$, das Integral auf derselben Seite ist gleich dem Flächeninhalt des Quadranten HBFJ. Setzt man daher den Flächeninhalt des ganzen Kreises $= A$, so wird der Flächeninhalt von

4. $GBEJL = {}^3/_4 A$.

III. Satz. Wenn der eine Ring ACD gleichförmig um sein Cen-

trum B, der andere EFKJ mit derselben Winkelgeschwindigkeit um den Durchmesser EK bewegt wird; so verhält sich die Grösse der Bewegung des ersten Ringes zu derjenigen des ihm gleichen zweiten Ringes, wie

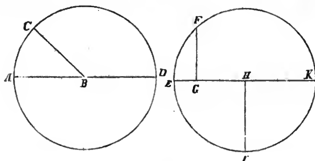


Fig. 273.

$\pi : 2$. Ist der Radius beider Kreise $= r$, $AC = EF$, das Element der Winkelbewegung in beiden Fällen $= dv$; so wird das Element der Geschwindigkeit des Punktes C im ersten Ringe $= rdv$, im zweiten hingegen $= FG \,.\, dv = ydv$. Die Geschwindigkeit des Punktes C kommt allen Punkten desselben Ringes zu, und wenn wir daher dieselbe, mit der ihnen allen zusammen entsprechenden Materie $= 2r\pi$ multipliciren;

so wird $$1.\ 2r\pi \,.\, r\int_0^{2\pi} dv = 4r^2\pi^2$$

die Grösse der Bewegung dieses Ringes, wenn derselbe einen ganzen Umlauf zurückgelegt hat.

Setzen wir im zweiten Ringe EFKJ das Element der Peripherie in $F = ds$, so ist $ds \,.\, ydv$ das Element der Bewegung dieses Ringes, und es muss das Integral von dv, wie auch das von yds über die ganze Peripherie erstreckt werden. Eür $HG = x$ haben wir aber $r^2 = x^2 + y^2$ und $ds^2 = dx^2 + dy^2$ d. h. $o = xdx + ydx$ und so $ds^2 = dx^2 + \frac{x^2dx^2}{y^2} = \frac{r^2dx^2}{y^2}$

also $$2.\ \ yds = rdx.$$

Statt yds über die ganze Peripherie haben wir jetzt rdx von $x = -r$ bis $x = +r$ zu integriren, wodurch wir den Halbkreis ETK berücksichtigen. Damit auch die andere Hälfte KJE beachtet werde, haben wir das bestimmte Integral noch mit 2 zu multipliciren. Die Grösse der Bewegung des zweiten Ringes ist demnach

$$3.\ \ 2r\int_{-r}^{+r} dx\int_0^{2\pi} dv = 8\pi r^2.$$

Nach 1. und 3. verhält sich daher die Bewegung des ersten Ringes zu der des zweiten, wie

$$4.\quad \pi : 2.$$

Aus den bisherigen 3 Sätzen folgt nun leicht die Wahrheit der in §. 46. ausgesprochenen Behauptung.

Denkt man sich nämlich in obiger Figur zum II. Satz den Cylinder und die Kugel mit gleichförmiger Bewegung um die Axe BL gedreht, so wird für den DN entsprechenden Kreis, nach II. Satz, die Grösse der Bewegung proportional $DN^3 = r^3$ und für den DF entsprechenden Kreis proportional $DF^3 = y^3$; mithin, wenn wir die Grösse der Bewegung des Cylinders durch (C), und die der Kugel entsprechende durch (K) bezeichnen,

$$1.\quad d(C) : d(K) = r^3 : y^3 = ry : yy' = r : y' \quad \text{(II. Satz, Gl. 2.)}$$

$$\frac{d(C)}{r} = \frac{d(K)}{y'} = \text{Constans}, \; d(C) = \text{Const.}\, r dx$$

und durch Integration

$$2.\quad (C) = \text{Const.} \int_0^r r dx = \text{Const.}\; r^2$$

oder, um es über das ganze Quadrat ACMK zu erstrecken,

$$3.\quad (C) = \text{Const.}\; 4r^2\,.$$

Ferner $$4.\quad (K) = 4\,\text{Const.} \int_0^r y' dx = \text{Const.}\; {}^3/_4 r^2\pi \quad \text{(II. Satz)}$$

und $$5.\quad (K) : (C) = {}^3/_4 r^2\pi : 4r^2 = 3r^2\pi : 4\,.\,(2r)^2\,.$$

Die Kugel verhält sich zum umschriebenen Cylinder wie

$$6.\quad {}^4/_3 r^3\pi : 2r^3\pi = 2 : 3.$$

Da nun im I. Satz, Zusatz 6. die Masse des Cylinders durch m bezeichnet wurde, so wird jetzt (nach Gleichung 6.) die Masse der Kugel $m' = {}^2/_3 m$.

Ferner wollen wir die Bewegung des Ringes ACD um seinen Mittelpunkt durch (R) und die Bewegung des Ringes EFKJ um seinen Durchmesser EK durch (R') bezeichnen; alsdann ist nach III. Satz, 4. $(R) : (R') = \pi : 2$. Verbinden wir nun die folgenden Proportionen mit einander: $(K):(C) = 3r^2\pi : 4(2r)^2$, $(C) : (R) = 2m : 3\mu = 3m' : 3\mu = m' : \mu$, $(R) : (R') = \pi : 2$; so ergibt sich

$$7.\quad (K) : (R') = m'\,.\,3r^2\pi^2 : 8\mu(2r)^2$$

oder kürzer $(K) : (R') = m'\,.\,\frac{3\pi^2}{32} : \mu$; $(K) : (R') = 925275m' : 1000000\mu$.

Diese hier aufgeführten Sätze sind im Wesentlichen der Angabe von Newton's Werken: Isaaci Newtoni Opera quae extant omnia. Commentarius illustrabat Samuel Horsley. L. L. D. R. S. S. Londini MDCCLXXXII. entlehnt. Nur die Führung der Beweise weicht von der dortigen etwas ab.

No. 297. S. 458. Im ursprünglichen Texte hat Newton die stündliche mittlere Bewegung der Knoten $= 16^{II}\ 35^{III}\ 16^{IV}\ 36^{V}$ angegeben, deren Hälfte $= 8^{II}\ 17^{III}\ 38^{IV}\ 18^{V}$ den im Text aufgeführten Werth für das siderische Jahr ergibt. Aus dem von mir benutzten abgekürzten, etwas zu grossem Werthe 8,"3 hat sich der in Klammern aufgeführte Werth für das Jahr ergeben.

No. 298. S. 459. Aus 100 : 292369 und 2 : 5, folgt durch Zusammensetzung 10 : 73092.

No. 299. S. 463. Setzt man den Glanz des Kometen und des Planeten G und g, ihren Abstand A und a, ihre Durchmesser D und d; so hat man $G : g = \frac{D^2}{A^2} : \frac{d^2}{a^2}$, also $A : a = \frac{D}{\sqrt{G}} : \frac{d}{\sqrt{g}}$.

No. 300. S. 464. Bei diesen Betrachtungen hätte wohl auch erwogen werden müssen, ob die Kometen dieselbe Fähigkeit, das Licht zu reflectiren, wie die Planeten besitzen. Dieser Punkt scheint auch heutigen Tages noch nicht entschieden zu sein.

No, 301. S. 466. Es möge hier daran erinnert werden, dass Encke bei dem nach ihm benannten Kometen von kurzer Umlaufszeit den Widerstand eines Mittels angenommen hat, um eine beschleunigte Rückkehr des Kometen zum Perihel zu erklären. Bis jetzt hat man bei keinem andern Kometen einen ähnlichen Widerstand anzunehmen nöthig gehabt, während, wenn man dies künftig bei mehrern Kometen annehmen müsste, dieser Umstand gegen die im gegenwärtigen Zusatz ausgesprochene Behauptung, dass der Weltraum von jedem widerstandsfähigen Mittel frei sei, sprechen würde.

No. 302. S. 467. Die mittlere tägliche Bewegung der Erde wird $t = \frac{2\pi a}{365,2563582}$, d. h. für $a = 100000000$ $t = 1720213$ und hieraus stündlich 71675,5. Ferner wird $t \,.\, \sqrt{2} = 2432748$ und stündlich 101364,5.

No. 303 S. 469. Die hier gefundenen Ausdrücke stimmen offenbar mit denjenigen überein, welche heutigen Tages in der Lehre der Interpolation dargestellt werden. Hiervon kann man sich leicht überzeugen, wenn man hier dieselbe Bezeichnung einführt, welche in der Abhandlung über Interpolation von Encke im astronomischen Jahrbuche für 1830 angenommen ist.

No. 304. S. 470. Setzt man nämlich (Figur im Text) $J\mu = a$, $AJ = JC = b$, $\angle AJO = \alpha$, so ist $ACXA = {}^2/_3 \times 2ab \sin\alpha$, $AEX\mu A = AJ\mu + \mu JEX = {}^2/_3 ab \sin\alpha + {}^1/_2(EJ + \mu X)a \sin\alpha$ oder weil $\mu X \mathbin{\#} JE$ und $\mu X = {}^1/_3 JE$, $AEX\mu A = a \sin\alpha\, [{}^2/_3 b + {}^1/_2 . {}^4/_3 EJ] = {}^2/_3 a \sin\alpha\ b + FJ] = {}^2/_3 a \,.\, AE \,.\, \sin\alpha$ und so $ACXA : AEX\mu A = 2b : AE = AC : AE$. Indem wie vorhin $\mu X \mathbin{\#} AC$ und daher $O\mu : OJ = 1 : 3$.

No. 305. S. 471. Setzt man den Winkel, welchen die im neuen Scheitelpunkte μ, an der Parabel gezogene Tangente mit der Hauptaxe

bildet, $= \alpha$, den Parameter $= p$, so ist die Gleichung der Parabel, in Bezug auf μ als Scheitel und μJ als Durchmesser, allgemein: $x^2 = \frac{p}{\sin \alpha^2} x$.

Im vorliegenden Falle entspricht μ der, im Brennpunkte S errichteten Ordinate und es ist daher $S\mu = SF = {}^1/_2 p$, $\alpha = 45^0$, also $JC^2 = JA^2 = JA \,.\, JC = \frac{p}{{}^1/_2} \,.\, JM = 2p \,.\, JM = 4 \,.\, {}^1/_2 p \,.\, x = 4 \,.\, S\mu \,.\, x$ und der nene Parameter $= 4S\mu$. Ferner wird, weil $\alpha = MJ\mu = JM\mu = 45^0$, $x = J\mu = M\mu = \frac{JA \,.\, JC}{4S\mu}$.

Fig. 274.

No. 306. S. 471. Denken wir nns auf der Tangente gleiche Stücke $\mu\mu'$, $\mu'\mu''$, etc. $\mu\mu^I$, $\mu^I\mu^{II}$ etc. dies- nnd jenseits μ abgetragen, nnd ans jedem der so erhaltenen Pnnkte Parallelen $\mu'\nu'$, $\mu''\nu''$, etc. mit $S\mu$ gezogen, so wird $S\mu\mu' = S\mu\nu'$, $S\mu'\mu'' = S\nu'\nu''$ etc. und so endlich die ganze dreieckige Fläche gleich der parabolischen. Denken wir uns ferner ans C die Ordinate CD gefällt, so wird, weil (Fig. 209.) $\angle SAC = 45^0$, $CD = DA = 2 \,.\, S\mu = 4AS$ nnd $SD = 3 \,.\, AS$; mithin jetzt $ASC\mu A = {}^2/_3 AD \,.\, DC - {}^1/_2 SD \,.\, DC = {}^2/_3 \,.\, 4AS \,.\, DC - {}^1/_2 \,.\, 3AS \,.\, DC$; $ASC\mu A = {}^7/_6 AS \,.\, DC$; $ASC = {}^1/_2 AS \,.\, DC$ und $ASC\mu A : ASC = {}^7/_3 AS : AS = 2AS + {}^1/_3 AS : AS = S\mu + {}^1/_3 JM : SM = SN : SM$. Setzt man nnn den beschriebenen Theil der Tangente $= T$, so wird $T \,.\, S\mu : AC \,.\, SM = SN : SM$ nnd $T : AC = SN : S\mu$.

No. 307. S. 471. Es ist nämlich $SP = \frac{SN^2}{S\mu} = \frac{(S\mu + {}^1/_3 J\mu)^2}{S\mu} = S\mu + {}^2/_3 J\mu \ldots$

No. 308. S. 472. Setzt man den kleinen Bogen im Kreise $= b$, Höhe $SP = r$, die Zeit $= t$ nnd die der letztern entsprechende Fallhöhe $= a$; so ist $a = \frac{b^2}{2r} t^2$ nnd eben so die, der Zeit ${}^1/_2 t$ entsprechende Fallhöhe $a' = {}^1/_4 \frac{b^2}{2r} t^2$. Es ist aber $b : AC = 1 : \sqrt{2}$, also $b^2 = {}^1/_2 AC^2$, also $a' = {}^1/_4 \,.\, \frac{{}^1/_4 AC^2}{r} t^2 = \frac{AJ^2}{4SP} \,.\, t^2$ nnd für $t = 1$, $a' = \frac{AJ^2}{4SP}$.

No. 309. S. 478. Es ist an der bezeichneten Stelle X = 8528,4 aufgeführt; da X in dieser Aufgabe nur als ein Punkt aufgeführt ist, muss vielleicht hier XZ statt X gelesen werden.

No. 310. S. 479. Es sei P☊K die Bahn des Kometen, ω☊E die Ebene der Ekliptik, ☊ der aufsteigende Knoten, P das Perihel, Pω ein Perpendikel von P auf die Ekliptik; alsdann ist P☊ = 8° 38′, $\angle$ P☊ω

$= 61^0\ 20^1/_3'$, mithin $\tang \varpi\Omega = \tang P\Omega\ .\ \cos P\Omega\varpi$; $\varpi\Omega = 4^0\ 10'$; $\sin \varpi P = \sin P\Omega\ .\ \sin P\Omega\varpi$, $\varpi P = -7^0\ 34'$ Länge des Perihels $\Upsilon\varpi = \Upsilon\Omega - \varpi\Omega = 271^0\ 53' - 4^0\ 10' = 267^0\ 43$, $=$ ♐ $27^0\ 43'$.

Fig. 275.

No. 311. S. 480. Sind σ und τ die beiden im Text erwähnten Sterne, ist τE parallel der Ekliptik, so hat man, wenn σE auf τE senkrecht ist, $\sigma E = 2^0\ 15'$, $\tau E = 2^0\ 48'5$ $\tang \sigma\tau E = \frac{\sigma E}{\tau E} = \tang 38^0\ 42'$ und wenn $KM = 10'$ bis $12'$, der Unterschied des Kometen und mittlern Punktes M beider Sterne

$$\text{in Länge} = \begin{matrix}10\\12\end{matrix}\Big\}\ \sin 38^0\ 42' = \begin{matrix}6{,}3\\7{,}5\end{matrix}\Big\} = 6,'9,$$

$$\text{„ Breite} = \begin{matrix}10\\12\end{matrix}\Big\}\ \cos 38^0\ 42' = \begin{matrix}7{,}8\\9{,}4\end{matrix}\Big\} = 8,6$$

Fig. 276.

Demnach des Kometen Länge ♍ $15^0\ 39,'2 - 6,'9 =$ ♍ $15^0\ 32'$,
Nördliche Breite $0^0\ 34' - 8,'6 = 0^0\ 25,'4$.

No. 312. S. 481. Nach der Stelle dieses §., welche in der vorhergehenden Bemerkung besprochen worden ist, würde die beobachtete Breite des Kometen am 10. November gleich $0^0\ 25'\ 24''$ im Text anzusetzen und hiernach $R. - B. = -0'\ 17''$ sein.

No. 313. S. 482. Irre ich nicht, so müsste hier statt $5^h\ 9^m$ gelesen werden $4^h\ 51^m$.

No. 314. S. 484. Ist AB die Ekliptik, die durch α Virg. C und α Leon. gehende Linie diejenige gerade Linie, welche die Aehre und das Herz des Löwen verbindet. Alsdann ist die Länge des Punktes A nach dem Texte ♎ $19^0\ 23'\ 47'' = 199^0\ 24'$, die Breite von α Virg. $= -2^0\ 2'$, die Länge von $C =$ ♏ $3^0\ 46' = 153^0\ 46'$, also $AC = 45^0\ 38'$ und wenn man $\angle\ AC\alpha$ Virg. $= x$ setzt, $\sin AC\ .\ \tang x = \tang A\alpha$ Virg., so wie wenn man die Werthe von AC und $A\alpha$ Virg. substituirt, $x = 2^0\ 51'$. Denkt man sich nun den Kometen auf der geraden Linie α Virg. $C\alpha$ Leon. in der Länge ♏ $3^0 = 213^0$, so wird seine südliche Breite bestimmt durch $\sin 59^0\ 14'\ .\ \tang 2^0\ 51' = \tang 2^0\ 27'$.

Fig. 277.

No. 315. S. 484. Nach der im Text vorhergehenden Bemerkung ist die Breite der Spica $= -2^0\ 2'$; mithin liegt die Breite des Kometen am 22. November zwischen $2^0 2'$ und $2^0 26'$ und ist im Mittel $= -2^0 14'$.

No. 316. S. 484. Wie in Bemerkung 314. findet man aus ♏ $12^0\ 52'$ — ♍ $3^0\ 46' = 222^0\ 52' - 153^0\ 46' = 69^0\ 6'$; $\sin 69^0 6'\ \tang 2^0\ 51' = \tang 2^0\ 40'$; also war hiernach die südliche Breite etwas weniger als $2^0\ 40'$.

No. 317. S. 487. Nach der Tafel, Pag. 545. war am 12. December die Länge des Kometen ♑ 6° 32′ = 276° 32′, seine Breite + 8° 29′, das obere Ende des Schweifes nach Pag. 551 in Länge ♒ 4° = 304°
„ Breite + 42° 30′,
anderweitig in Länge ♓ 22° = 352°,
„ Breite = 61°.
Demnach der Unterschied beider Enden des Schweifes
in Länge = 27° 28′ und 75° 28′,
„ Breite = 34° 1′ „ 52° 31′.
Hieraus die Länge des Schweifes
43,°7 91,°9
oder im Mittel 67,°8.

No. 318. S. 487. Die Dauerhaftigkeit der Kometen ist, nach Newton's Zeit, durch die Wiederkehr mehrerer derselben direkt erwiesen worden. Dass sie nicht aus gasförmiger Materie bestehen, hat man daraus abgenommen, dass Sterne, welche durch sie hindurch beobachtet worden sind, keine Spur von Strahlenbrechung gezeigt haben. Gegen eine bedeutende Dichtigkeit ihrer Materie spricht der Umstand, dass sie keine Störung auf Planeten, denen sie sehr nahe kommen, ausüben. Schliesslich wollen wir auch bemerken, dass es nach den jüngsten Erfahrungen wahrscheinlich geworden ist, dass die Kometen als ein Aggregat sogenannter Meteoriten (Sternschnuppen) betrachtet werden müssen.

No. 319. S. 488. Unter der Voraussetzung, dass die Materie des Kometen, unter übrigens gleichen Umständen, eben so stark wie unsere Erde im Sommer durch die Sonne erwärmt werden kann; verhält sich die Erwärmung des erstern in seiner Sonnennähe zur Erwärmung der Erde, wie 2806 : 1. Bezeichnen wir die Temperatur des Kometen durch k, die der Erde durch e, die des kochenden Wassers durch w und die des glühenden Eisens durch g; so wird nach den im Text angeführten Werthen k : e = 28600 : 1, e : w = 1 : 3, w : g = 1 : 3(4), also k : g = 28000 : 9(12) = 3100 : 1 = (2300 : 1).

No. 320. S. 488. Die Menge der in einer Kugel eingeschlossenen Materie ist dem Cubus, die Oberfläche dem Quadrat des Durchmessers proportional; die Dauer der Abkühlung wird daher direct dem Cubus und indirect dem Quadrat des Durchmessers, d. h. dem Durchmesser selbst proportional sein. Die Werthe, welche hier in Betracht kommen, sind, wenn sie in gleichen Einheiten ausgedrückt werden: Durchmesser der Kugel 1 Zoll, der Erde = 1728 . 24000 . 12 = 497664000 Zoll = 41472000 Fuss, Dauer der Abkühlung der Kugel 1 Stunde, der Erde = x, also folgt aus 1 Zoll : 497664000 Zoll = 1 Stunde : x Stunden, x = 497664000 Stunden = 20736000 Tagen = 50000 Jahren ungefähr. Hiernach müsste der Text wohl geändert werden, die Resultate stimmen überein.

No. 321. S. 492. Es sei (in der Figur zu §. 30., zweiten Buches)

S das Centrum der Erde, SA ihr mittlerer Halbmesser $= 19618800'$ $= r$, $AC = 850'$ und daher $SB = 19616650' = a$, $SF = 2r$, die Potenz der Hyperbel $fah = r^2$; also $Aa = r$, $Ff = \frac{1}{2}r$ und $Bb = \frac{r^2}{a}$; so wie ferner $Aa - Ff = \frac{1}{2}r$, $Aa - Bb = \frac{ar - r^2}{a}$. Es sei die Dichtigkeit $AH = St = m = 33$, $BJ = Sn = n = 32$, $FZ = SZ = d$. Ferner nach der Natur der Hyperbel

$$1.\quad thnz : thin = \log \frac{m}{d} : \log \frac{m}{n}$$

und nach Buch II., §. 30., Zusatz

$$2.\quad \log \frac{m}{d} \,.\, \log \frac{m}{n} = \frac{1}{2}r : \frac{ar - r^2}{a} = a : 2a - 2r,$$

also $\log \frac{m}{d} = \frac{a}{2a - 2r} \log {}^{33}/_{32} = {}^{1961665}/_{170} \,.\, 0{,}0133639 = 154{,}208793\,5.$

$$3.\quad \frac{m}{d} = 1617 \,.\, 10^{151}.$$

Der Halbmesser der Erdbahn ist $= 21000000$ Meilen, etwa $= 500.000.000.000'$, der Halbmesser der Saturnsbahn zehnmal so gross $= 5000.000.000{,}000'$, der Durchmesser der Saturnsbahn $= 10000.000.000.000'$ $= 120000.000.000.000''$. Es verhält sich daher die Saturnskugel zu einer Kugel, deren Durchmesser $= 1''$, wie

$$4.\quad 1728 \,.\, 10^{39} : 1,$$

ein weit kleineres Verhältniss, als das in 3. gefundene Verhältniss der Dichtigkeiten $1617 \,.\, 10^{151} : 1$. Daher würde eine Kugel von $1''$ im Durchmesser unserer Luft bei der Dichtigkeit, welche diese in der Höhe Eines Halbmessers der Erdbahn hat, den ganzen Raum der Planeten bis zum Saturn und jenseits ausfüllen.

No. 322. S. 493. Es stelle S die Sonne, AB einen Theil der Kometenbahn dar. Es sei N der Kern des Kometen, welcher von A gegen B fortschreitet, C das Ende des Schweifes. Zieht man CS, so bezeichnet der Durchschnittspunkt d mit der Bahn den Ort, in welchem der am Ende des Schweifes befindliche Dampf vom Kopfe aufzusteigen begonnen hat, wenn jener Dampf geradlinig von der Sonne aufsteigt. Da diese nicht der Fall ist, sondern der Dampf nach der Seite A, welche der Komet verlassen hat, nach dem Obigen hinneigt; so ziehe man SE parallel der Länge des Kometen, oder vielmehr, wegen der krummlinigen Bewegung des Kometen, von dieser Linie divergirend. Die Linie SE schneide die Bahn in D, und

Fig. 278.

es wird der, jetzt das Ende des Schweifes bildende, Dampf vom Kern aufzusteigen begonnen haben, als der Komet sich in D befand. Die aufsteigende Bewegung des Dampfes wird nämlich mit der fortschreitenden Bewegung des Kometen zusammengesetzt. Nach den entwickelten Methoden kann man aber die Zeit bestimmen, in welcher der Komet sich im Punkte D befunden hat, und die Zwischenzeit, welche den Oertern D und N des Kometen entspricht, stimmt mit derjenigen überein, welche der Dampf braucht, um vom Kopfe bis zum Ende des Schweifes aufzusteigen.

Es stelle S die Sonne, T die Erde, STA den Winkelabstand des Kometen von der Sonne dar, und es sei ATB die scheinbare Länge des Schweifes. Weil das Licht sich vom Ende des Schweifes längs TB fortpflanzt, so befindet sich das Ende desselben irgendwo auf dieser Linie, etwa in D. Man ziehe DS, welche AT in C schneidet; alsdann werden, weil der Schweif immer sehr nahe der Sonne gegenüberliegt, die Sonne, der Kopf und der Endpunkt des Schweifes in gerader Linie, der zweite also in C liegen. Zieht man SA $\mp$ TB, so liegt C zwischen T und A, weil das Ende des Schweifes irgendwo auf der unendlichen Linie TB liegt und alle Linien, welche von S nach TB gezogen werden können, TA irgendwo zwischen T und A schneiden. Der Komet kann daher von der Erde nicht weiter als TA und von der Sonne nicht weiter als SA entfernt sein.

Fig. 279.

Z. B. der Komet von 1680 hatte am 12. December die Länge $276^0\ 32'$, die Breite $8^0\ 28'$, die Sonne die Länge $271^0\ 51'$ (nach Pag. 538.) Unterschied der Längen $= 4^0\ 41'$; mithin der Abstand des Kopfes von der Sonne aus $\cos KS = \cos 4^0\ 41' \,.\, \cos 8^0\ 28'$, $KS = 9^0\ 40' =$ ATS. Die Länge des Schweifes, oder ATB $= 35^0$, SA : ST $= \sin 9^0\ 40' : \sin 35^0 = 3:10$. Der Komet war daher an diesem Tage von der Sonne nur um $^3/_{10}r$ entfernt, wo r der mittlere Abstand der Erde von der Sonne bezeichnet. Jener befand sich also innerhalb der Mercursbahn.

Am 21. December war Länge des Kometen $305^0 8'$, Breite $= 21^0\ 42'$, Länge ⊙ $281^0\ 7'$, mithin $\cos KS = \cos 24^0\ 1' \,.\, \cos 21^0\ 42'$, $KS = 31^0\ 56'$ $=$ ATS, ATB $= 70^0$, SA : ST $= \sin 31^0\ 56' : \sin 70^0 = 4 : 7$. Der Komet war noch innerhalb der Venusbahn.

Am 28. December war Länge des Kometen $338^0 41'$, Breite $28^0 6'$, Länge ⊙ $288^0\ 26'$, $\cos KS = \cos 50^0\ 15' \,.\, \cos 28^0\ 6'$, $KS = 55^0\ 40'$, Länge des Schweifes $= 56^0$, SA : ST $= \sin 55^0\ 40' : \sin 56^0$. Der Komet befand sich also noch innerhalb der Erdbahn.

No. 323. S. 495. Ich kann der hier aufgestellten Schlussfolge nicht ganz beistimmen.

Ich glaube nämlich nicht, dass von der Feuchtigkeit; womit unsere Erde ausgestattet ist, ihr beim Process des Wachsens und Faulwerdens der Pflanzen etwas verloren gehe, sondern dass die hierzu erforderliche Feuchtigkeit nur von andern Theilen der Erde hergeliehen, und dass dieselbe bei eintretender Fäulniss durch Verdunstung wieder frei und zu anderweitigen Operationen verwendet werde. Nur dann erst könnte ich in Bezug auf die Erde der Schlussfolgerung im Texte beitreten, wenn zuvor nachgewiesen wäre, dass bei den beiden Operationen die absolute Menge des Flüssigen vermindert und die des Festen vermehrt werde. Denselben Haushalt stelle ich mir auf den Planeten vor, so dass auch diese keiner äussern Zuführung von Flüssigkeit bedürfen. Ist endlich die bisher besprochene Hypothese, dass durch die Wärme der Sonne aus den Kometenköpfen entwickelten Dämpfe die Schweife gebildet werden, begründet; so ist es am einfachsten anzunehmen, dass diese Dämpfe, bei der Entfernung der Kometen von der Sonne, niedergeschlagen werden und zu den Köpfen zurückkehren.

Sollte übrigens die bereits erwähnte Meinung, wonach eine gewisse Identität zwischen den Kometen und den Meteorsteinen besteht, sich bestätigen; so würde man Veranlassung haben, neue und wesentlich andere Hypothesen über das Wesen und die Entstehung der Schweife aufzustellen.

No. 324. S. 487. Die Praemisse dieses Satzes wird durch die neu entdeckten kleinen Planeten (die Asteroïden) wesentlich modificirt, da sie entschieden kleiner sind, als die vier der Sonne näher gelegenen Planeten.

No. 325. S. 499. Es sind der Reihe nach

die Flächenräume	D und E,	d und e,	δ und ε,
„ Zwischenzeiten	A „ B		
„ ganzen Zeiten zwischen 1. und 3. Beobachtung	T	t	T
„ ganze richtige Zwischenzeit	S		
„ Knotenlänge	K	K + P	K
„ Neigung	J	J	J + Q.

Wären die Flächenräume den Zeiten entsprechend, so müssten sie einander proportional sein, und wir hätten

$$1.\quad A : B = D : E = d : e = \delta : \varepsilon;$$

da dies nicht der Fall, setzen wir wie im Texte

$$2.\quad \begin{cases} A : B = C : 1 \\ D : E = G : 1 \\ d : e = g : 1 \\ \delta : \varepsilon = \gamma : 1 \end{cases}$$

und wir erhalten alsdann folgende Proportionen und Gleichungen:

$$3.\ \begin{cases} T - r : T - S = Q : x \\ G - \gamma : G - C = Q : y \\ T - t : T - S = P : x' \\ G - g : G - C = P : y' \end{cases}$$

also
$$4.\ x = \Delta J = \frac{T-S}{T-r} Q$$
$$5.\ y = \Delta J = \frac{G-C}{G-\gamma} Q$$
$$6.\ x' = \Delta K = \frac{T-S}{T-t} P$$
$$7.\ y' = \Delta K = \frac{G-C}{G-g} P.$$

Damit nun so wohl x und y, als x' und y' einander gleich werden, setzen wir $\frac{T-S}{T-r} = \frac{G-C}{G-\gamma} = n$, $\frac{T-S}{T-t} = \frac{G-C}{G-g} = m$, erhalten hieraus $T-S = n(T-r)$; $G-C = n(G-\gamma)$, $T-S = m(T-t)$; $G-C = m(G-g)$ und so die Bedingungsgleichungen:

$$8.\ \begin{cases} 2T - 2S = m(T-t) + n(T-r) \\ 2G - 2C = m(G-g) + n(G-\gamma), \end{cases}$$

welche zur Bestimmung von m und n dienen. Mittelst dieser so gefundenen Werthe erhält man dann nach 4.—7. die Werthe des Knotens und der Neigung bezüglich K + mP und J + nQ.

No. 326. S. 501. Der Inhalt dieses Abschnittes ist mir nicht klar. Stellen γ, A, K die bezüglichen Oerter von Stern γ, A und Komet dar, so erhält man aus den Breiten von $\gamma = +\ 7^0\ 8'\ 58''$, $A = +\ 8^0 28' 33''$ und dem Längenunterschiede $= 0^0 6' 0''$, den Abstand $A\gamma = 1^0\ 19'\ 48''$. Ist nun $G\gamma$ der Breitenparallel von γ, AG darauf senkrecht, so folgt aus $AG = 1^0\ 19'\ 35''$, $A\gamma = 1^0\ 19'\ 48''$, der Winkel $A\gamma G = x$ aus $\sin x = \frac{\sin AG}{\sin A\gamma}$; nämlich $x = 85^0\ 46'\ 39''$, und daher, weil $A\gamma K = 90^0$, $K\gamma g = y = 4^0\ 13'\ 21''$, so wie $g\gamma$ und gK, welche letztere auf $G\gamma$ normal, weil $K\gamma = A\gamma$, $g\gamma = 1^0\ 19'\ 35''$ und da die Länge von $\gamma = \Upsilon\ 28^0\ 30'\ 15''$, $g\gamma$ sec. $7^0\ 8'\ 58'' = 1^0\ 20'\ 12''$, die Länge von $K = \Upsilon\ 27^0\ 10'\ 3''$, $gK = 0^0 5' 53''$ und die Breite des Kometen $K = 7^0 8' 58'' - 0^0 5' 53'' = 7^0 3' 5''$. Diese Werthe der Länge und Länge und Breite des Kometen stimmen nicht mit den in der vorhergehenden Tabelle für Febr. 7 gegebenen überein.

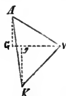


Fig. 280.

No. 327. S. 505. Bekanntlich ist dieser Komet, der Halley'sche, so wohl 1759 als 1835, den angestellten Rechnungen entsprechend, wiedergekehrt.

No. 328. S. 505. Hiervon machen die verschiedenen, in der neuern Zeit entdeckten und berechneten Kometen von kurzer Umlaufszeit eine entschiedene Ausnahme.

No. 329. S. 506. In Bezug auf diese Stelle im Texte möge nur kurz bemerkt werden, dass bis jetzt bei den Berechnungen der Kometenbahnen die Störungen gehörig berechnet worden sind, welche sie von Seiten der Planeten erleiden. Dagegen hat sich noch keine Veranlassung gezeigt, auch auf etwaige Störungen, welche die Kometen ausüben, Rücksicht zu nehmen. Man betrachtet ihre Masse als verschwindend klein.

No. 330. S. 507. Die Grenzen des Zodiakus haben bekanntlich auch in der neuern Zeit für die kleinen Planeten erweitert werden müssen.

No. 331. S. 507. Vergleiche vorstehende Bemerkung 329.

No. 332. S. 508. Die ungeheuren Abstände, in denen sich die Fixsterne von einander befinden, würden allein ihr Zusammenfallen vermöge der allgemeinen Gravitation nicht verhindern können. Man muss vielmehr annehmen, dass dieses eben so verhindert wird, wie das Zusammenfallen der Planeten mit ihrem Centralkörper, der Trabanten mit ihrem Planeten, durch eine den Fixsternen eigenthümliche fortschreitende Bewegung, welche mit jener allgemeinen Anziehung im Gleichgewichte steht. Eine derartige eigene Bewegung wird aber um so wahrscheinlicher, als die Zahl der Fixsterne fortwährend wächst, bei denen man eine eigene Bewegung wahrnimmt und ein Theil der letztern durch die Annahme der Bewegung unseres ganzen Sonnensystemes nach einem bestimmten Punkte des Himmels erklärt wird. Gar leicht und einfach schliesst man aus diesen Betrachtungen, dass im gesammten erkennbaren Weltraume keine absolute Ruhe, sondern beständige Bewegung stattfinde.

No. 333. S. 511. In den auf Newton folgenden Zeiten ist die Grenze der Wirksamkeit der Schwere thatsächlich über den Saturn hinaus erweitert werden. Nicht nur der später entdeckte Planet Uranus und der Halley'sche Komet bewegen sich, den in diesem Werke entwickelten Gesetzen der Schwere entsprechend; sondern es wurde ja auch vor etwa 30 Jahren, in Folge der vervollkommneten Theorie, Leverrier und Adams möglich, aus den Störungen, welche Uranus in seinem Laufe erlitt, auf die Ursache derselben, den weiter entfernten Planeten Neptun und seinen Ort zu schliessen.

No. 334. S. 513. Ich bitte, hier die vorhergehende Bemerkung 332. zu beachten.

No. 335. S. 521. Setzt man die Masse der Erde $= T$, die des Mondes $= L$, so soll die Reihe $T + L, (T + L)x, (T + L)x^2, (T + L)x^3$ dergestalt gebildet werden, dass $(T + L)x^3 = T$, also $x = \sqrt[3]{\frac{T}{T+L}}$ werde. Das im Texte erwähnte erste Glied ist aber

$$(T + L)\sqrt[3]{\frac{T}{T+L}} = \sqrt[3]{T.(T+L)^2}$$

und das Verhältniss $T + L : \sqrt[3]{T(T + L)^2}$.

Für den mittlern scheinbaren Durchmesser des Mondes = 31,'5,
und für „ „ „ „ der Erde = 114,6,
wird $T : L = (114,6)^3 : (31,5)^3 = 42 : 1$

$$\text{und } T + L : \sqrt[3]{T(T + L)^2} = {}^{43}/_{42} : \sqrt[3]{\frac{42 . 43^2}{42^3}} = 128:127.$$

No. **336**. S. **522**. Setzt man den mittlern Abstand der Erde von der Sonne = 10000; so ist der mittlere Abstand des Jupiters von der Sonne, oder SJ = 52012 und der mittlere Abstand der Venus von der Sonne = 7234. Wenn nun die grösste Elongation des 4. Trabanten, oder TSJ = 8' 13" und der wirkliche Abstand JT = x gesetzt wird; so hat man x = SJ tang 8' 13" = 124 und so x : SJ = 124 : 52012 und ähnlich x : SV = 124 : 7234, wo SV den mittlern Abstand der Venus von der Sonne bezeichnet.

Fig. 281.

No. **337**. S. **522**. Es wird, weil $16^d\ 18^h = 402^h$, $224^d\ 16^h = 5392^h$, das gesuchte Verhältniss $\frac{124}{402^2} : \frac{7234}{5392^2} = 767 : 249 = 442 : 143$. Ferner $442 . \frac{124^2}{7234^2} = 0,13$ und $0,13 : 143 = 1 : 1100$.

No. **338**. S. **524**. Für CF = 191382, FG = 3, wird $\angle FCG = {}^3/_{191382}\, 206265'' = 3,''25$ und nicht = 3,''14 wie im Text.

Fig. 282.

No. **339**. S. **525**. Der Durchmesser des Jupiters wird, nach den im Text angegebenen Werthen, $= \frac{2 . 493}{24,903} = 39,''6$.

No. **340**. S. **527**. Es ist in der neuern Zeit wohl von sympathetischen Pendeln, d. h. solchen die Rede gewesen, welche bei gleicher Form und Länge neben einander schwingend, bald gleichförmig zu schwingen anfangen. Hieraus könnte man einen Einwurf gegen die im Texte von Newton beschriebenen Versuche und die Strenge der daraus gezogenen Schlüsse abnehmen.

Dieser Einwand wird bei den neuern Versuchen von Bessel fortfallen, wo die Schwingungen der Pendel bei verschiedenen Substanzen, jede für sich beobachtet wurden.

No. **341**. S. **529**. In der spätern Zeit hat man die Ablenkung des

Lothes von der vertikalen Richtung heachtet und zu hestimmen versucht. Es möge hier an den Berg Shehallien erinuert werden.

No. 342. S. 531. Für die Umlaufszeit

der Venus	= 224,^{d}7	finde ich ihre Fallzeit =	39,^{d}72,
des Jupiters	= 4332,58	„ „ „ „ =	2 Jahre 35,^{d}4,
der Erde	= 365,26	„ „ „ „ =	64,^{d}569.

No. 343. S. 532. Vergleiche die frühere Bemerkung 332.

No. 344. S. 532. Dieser letzte Satz wird gegenwärtig wesentlich modificirt durch die beiden später entdeckten und weiter entfernten Planeten Uranus und Neptun, wogegen die vielen Asteroïden, in Folge ihrer verschwindend kleinen Masse, als wirkungslos in dieser Beziehung hetrachtet werden können.

No. 345. S. 534. Der Inhalt dieses §., namentlich des letzten Satzes ist höchst interessant, indem Newton aus den vorher auseinander gesetzten Bewegungen mit grosser Wahrscheinlichkeit auf das Vorhandensein des damals noch unbekannten Planeten Uranus schloss. Nur dieser, nicht aber die ganz oder fast ganz masselosen Kometen konnten als Ursache der wahrgenommenen Aenderungen in den Elementen der hekannten Planeten in Betracht kommen.

Nachdem etwa ein Jahrhundert später der Uranus durch Zufall entdeckt worden und seine lange genug verfolgten Bewegungen ähnliche Störungen gezeigt hatten, haben Leverrier und Adams aus diesen nicht allein das Vorhandensein eines weitern äussern Planeten als wahrscheinlich abgeleitet, sondern auch den Ort desselben, des Neptuns, so nahe richtig vorher angezeigt, dass derselbe sogleich aufgefunden werden musste.

No. 346. S. 535. Da allgemein das Differential der Fläche des vom Monde beschriebenen Sectors $= \frac{1}{2} r^2 dv$ und hier dasselbe proportional der Summe 237,3 + sin vers.; so wird $r^2 = \frac{a(237,3 + \text{sin vers.})}{dv}$, wo a eine Constante hezeichnet.

No. 347. S. 536. Die Umlaufszeit des vierten Trabanten ist $= 16^d\,16^h\,32^m$ = ♃☽,
unseres Mondes = 27,^{d}32166 = ♁☾.
Die sider. Umlaufszeit des Jupiters . . . . . . = 4332,^{d}5848 = ♃,
„ „ „ der Erde . . . . . . = 365,^{d}25637 = ♁.
Die 100jährige rückläufige Bewegung des Mondknotens = 5 Umläufe $134^0\,9'\,57,''5 = 18134^0\,10'$ = Δ☊, mithin die 100jährige Bewegung des Knotens des vierten Trabanten = Δ☊' : Δ☊ = $\left\{ \begin{array}{l} \text{♁}^2 : \text{♃}^2 \\ \text{♃☾} : \text{♁☾} \end{array} \right.$ und mittelst der vorstehenden Werthe, welche nach Hansen a. a. O. angesetzt sind, Δ☊' $= 8^0\,24'$.

No. 348. S. 542. Vermuthlich muss hier 18. statt 13. gelesen werden.

No. 349. S. 545. Der grösste Unterschied der Fluthhöhe wird offenbar in den Punkten A und B stattfinden, weil CA der grösste und CB der kleinste Halbmesser und daher

$$1.\ CA - CB$$

ein **Maximum** ist.

Weil $CE = CF > CB$, wird

$$2.\ CA - CE = CA - CF < CA - CB,$$

also zwischen der Mitte A und den Küsten E und F des EF breiten Meeres ein **geringerer** Unterschied der Fluthhöhe, als zwischen A und B stattfinden. Ferner wird

$$3.\ CE - CF = 0,$$

Fig. 283.

und daher zwischen den Küsten E und F des EF breiten Meeres gar kein Unterschied in der Fluthhöhe stattfinden.

Betrachten wir das ef breite Meer, so ist Ce nahe dem grössten Werthe CA, Cf nahe dem kleinsten Werthe CB gleich und da $CD < CA$ und $CD > CB$; offenbar

4. $CD - Cf$ oder $Ce - CD$ **kleiner** als $Ce - Cf$.

Der Höhenunterschied der Fluth zwischen der Mitte D und den Küsten e und f des ef breiten Meeres ist **geringer** als der zwischen e und f selbst. Man ersieht hieraus zugleich, dass der letzte Unterschied desto **grösser** ist, je **grösser** die Breite ef des betreffenden Meeres vorausgesetzt wird. Hierbei muss aber der **Winkel** eCf am Mittelpunkte C der Erde **kleiner** als 90^0 sein, weil ein rechts von CB liegender Halbmesser Cf **grösser** als der letztere und daher $Ce - Cf$ wieder kleiner werden würde.

No. 350. S. 547. Setzt man nämlich die bestimmte Höhe, für welche man das Gewicht bestimmen will, $= h$, eine unbestimmte Höhe $= x$ und bezeichnet c eine Constante; so erhält man das Gewicht für die Höhe h aus $c \int_0^h x dx = \frac{1}{2} ch^2$.

No. 351. S. 547. Vergleiche §. 41. des dritten Buches.

No. 352. S. 548. Genauer folgt hier $5L + 5S = {}^{15165}/_{2000}\, L - 9S$, $L = {}^{28000}/_{5165} S = 5\,{}^{218}/_{518} = 5\,{}^{3}/_{5}$.

No. 353. S. 548. Es ist in den Syzygien $\frac{U}{2R} = {}^{1685}/_{2000}$, $T = {}^{1685}/_{2000}$.

„ „ Quadraturen $\frac{U}{2R} = {}^{2000}/_{2000}$, $T = {}^{1685}/_{2000}$.

also ${}^{1685}/_{2000}\, L + {}^{1685}/_{2000}\, S : L - {}^{1685}/_{2000}\, S = 6 : 5$, woraus

$L = 5^{66}/_{358}S = 5^1/_5S$ und im Mittel $L = 5^3/_{10}S = 5^1/_3S$, so wie $L + S = 6^1/_3S$ folgt.

No. **354**. S. **549**. Aus $\frac{12868200}{6^1/_3}$ ergiebt sich der Werth 2031821, welcher von dem im Texte aufgeführten Werthe zwar verschieden ist, aber so wenig, dass der dort gezogene weitere Schluss richtig bleibt.

No. **355**. S. **550**. Nach der 4. Erscheinung des dritten Buches beträgt der mittlere Abstand des Saturns von der Sonne etwa 950000, wenn der mittlere Abstand der Erde von der Sonne = 100000 gesetzt wird; also die jährliche Parallaxe des Saturns $= {}^{100000}/_{950000} \cdot 3437,'7 \ldots = 361,'8$. Da nun die jährliche Parallaxe der Fixsterne $\angle$ 1'; so müssen diese mehr als 360 mal weiter von der Erde entfernt sein, als der Saturn.

No. **356**. S. **551**. Der ganze Inhalt dieses §. ist wohl mehr von theoretischem, als praktischem Interesse; auch scheinen mir die darin enthaltenen Zahlenangaben nicht ganz richtig. Deshalb einige Bemerkungen. Nehmen wir den Abstand der Erde von der Sonne S = 10000, den Abstand des Saturns von der Sonne K = 95388, den Abstand des Fixsterns = x; so ist nach dem Text $\frac{10000}{x} \angle 1'$ oder $x \cdot 1' > 10000$, d. h. $\frac{x \cdot 1'}{3437,'7466} > 10000$, oder $x > 34377466$, und da $360 \cdot R = 34339680$, $x > 360 \cdot R$. Der scheinbare Durchmesser des Saturns ist $= 17,''1$, mithin sein wirklicher Durchmesser $D = 2 \cdot 95388 \sin 8,''55$ und daher sein wirklicher Halbmesser $r = 95388 \sin 8,''55$,

log 95388	4,97948
„ sin 8,55	5,61754
log r	0,59702

Die Fläche der Saturnsscheibe ist $= r^2\pi$, die Fläche der Kugel zur mittleren Entfernung des Saturns von der $\odot = 4R^2\pi$ mithin ihr gegenseitiges Verhältniss $r^2 : 4R^2 = [1,19404] : [10,56102] = 1 : 2300000000$, wofür im Text 1 : 2100000000. Die in den Klammern enthaltenen Zahlen bezeichnen Logarithmen.

Setzt man den wirklichen Durchmesser der Erde = 1, so ist die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne D = 12027 und der wirkliche Durchmesser der Sonne $\triangle = 112,06$. Es wird daher der scheinbare Halbmesser der Sonne $= \frac{56,03}{12027} \cdot 206264,''8 = 16'0,''9$, ihr Durchmesser $= 32'1,''8$. Ferner die Parallaxe der Sonne $= \frac{0,5}{12027} 206264'8 = 8,''5752$. Die Sonne soll sich nun in der Entfernung 100000 . 9,53885 = 953885 von der Erde befinden, und da für d = 1 und $\triangle = 112,06$, D = 12027 ist, so wird, wenn wir den 953885 entsprechenden Werth durch D' bezeichnen, aus 1 : 12027 = 953885 : D', also D' = 11472674895. Nach dem Texte sollte nun, wenn 206264,''8 = ω gesetzt wird.

$$\frac{112,06}{D'}\,\omega = 7^{V}\,16^{VI} \text{ und } \frac{1}{953885}\,\omega = 13^{V} \text{ werden.}$$

Ich erhalte D' für den ersten Werth $7^{IV}\,17^{V}$ und für den zweiten 13^{III}

Aus dem im Eingange dieser Bemerkung angegebenen Grunde enthalte ich mich weiterer Ausführung.

No.. 357 S. 562. Nach §. 30., Zusatz des zweiten Buches haben wir thnz : thkw = Aa — Ff : Aa — Cc oder

$$1.\quad \text{thnz} : \text{thkw} = 1 - \frac{Ff}{Aa} : 1 - \frac{Cc}{Aa}.$$

Fig. 284.

Nach der Lehre von der Hyperbel wird aber

$$2.\quad \begin{cases} \text{thnz} = \log St - \log Sz \\ \text{thkw} = \log St - \log Sw \end{cases}$$

und nach derselben Lehre SF . Ff = SA . Aa oder

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{Ff}{Aa} = \dfrac{SA}{SF} \\ \text{und ebenso } \dfrac{Cc}{Aa} = \dfrac{SA}{SC} \end{array}\right\} 3.$$

Nach den Gleichungen 1. bis 3. wird, wenn man

St = AH, d. h. die Dichtigkeit in A durch δ_0

Sz = FN „ „ „ F „ δ

Sw = CK „ „ „ C „ δ_1

bezeichnet, $\dfrac{\log \delta_0 - \log \delta}{\log \delta_0 - \log \delta_1} = \dfrac{1 - \dfrac{SA}{SF}}{1 - \dfrac{SA}{SC}}$ oder, weil SF — SA = AF und

SC — SA = AC, wenn man den Abstand AF = x, AC = a, SC = SA + AC = r + a, SF = SA + AF = r + x setzt, wo r = 4000 englische Meilen den Halbmesser der Erde bezeichnet

$$\frac{\log\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)}{\log\left(\frac{\delta_1}{\delta_0}\right)} = \frac{x}{a} \cdot \frac{r+a}{r+x}, \ \log\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right) = \frac{1+\frac{r}{a}}{1+\frac{r}{x}} \log\left(\frac{\delta_1}{\delta_0}\right) \text{ und}$$

indem man von den Logarithmen auf Zahlen übergeht:

$$5. \quad \delta = \delta_0 \cdot \left(\frac{\delta_1}{\delta_0}\right)^{\frac{1+\frac{r}{a}}{1+\frac{r}{x}}} = \delta_0 : \left(\frac{\delta_0}{\delta_1}\right)^{\frac{1+\frac{r}{a}}{1+\frac{r}{x}}}.$$

Nach dem Text ist $\delta_0 = 33$; a = 1200; $\delta_1 = 32$ engl. Fuss, r = 4000 Meilen = 19191600 Fuss, nnd x der Reihe nach in Meilen = 5, 10, 20, 40, 400, 4000, 40000, 400000, 4000000, ∾. Setzen wir $\log\left(\frac{\delta_0}{\delta_1}\right) = \log\frac{33}{32} = 0{,}0133639 = C$ so folgt aus 5.

$$6. \quad \log \delta = \log 33 - C \cdot \frac{1+\frac{r}{a}}{1+\frac{r}{x}}$$

nnd hiernach, folgende tabellarische Rechnung:

x	$1+\frac{r}{x}$	$\log\left(1+\frac{r}{x}\right)$	$\log\left\{C.\frac{1+\frac{r}{a}}{1+\frac{r}{a}}\right\}$	$C.\frac{1+\frac{r}{a}}{1+\frac{r}{x}}$	$\log 33 - C.\frac{1+\frac{r}{a}}{1+\frac{r}{x}}$	δ	A.
5	801	2,9036325	9,4262480	0,266842	1,2516759	17,8516	1,8486
10	401	2,6031444	9,7267361	0,533011	0,9855030	9,6717	3,4120
20	201	2,3031961	0,0266844	1,06337	0,4551769	2,8521	11,5701
40	101	2,0043214	0,3255591	2,11621	9,4023019	0,2525	130,68
400	11	1,0413927	1,2884878	19,43067	0,XVII08784	0,XVII1224	26957XV
4000	2	0,3010300	2,0288505	106,86869	0,CV64982	0,CV4465	73908CII
40000	1,1	0,0413927	2,2884878	194,30673	0,CXCII21178	0,CXCII1628	20259CLXXXX
400000	1,01	0,0043214	2,3255591	211,62117	0,CCX89734	0,CCX7895	41799CCVII
4000000	1,001	0,0004341	2,3294464	213,52384	0,CCXII99467	0,CCXII9878	33414CCIX
∾	1	0,0000000	2,3298805	213,73739	0,CCXII78112	0,CCXII6041	54625CCIX

Diese Darstellnng verdanke ich meinem mathematischen Frennde Dr. Tietjen, wonach die Werthe δ bis auf den x = 400000 entsprechenden übereinstimmen. Hier steht im Original 7859 statt 7895, ein oft vorkommendes Versehen. Unser Werth scheint der richtigere zn sein, indem der ans $\frac{33}{\delta}$ sich ergebende Werth von A hiermit 41799 wie im Original wird. Auch die Werthe von A stimmen nicht alle mit den im Original aufgeführten.

Es ist zwar r = 4000 e. Meilen angegeben, aber nicht wie viele

Fuss auf 1 e. Meile gehen, was doch erforderlich, weil a in Fussen ausgedrückt ist. Der Werth von $\frac{r}{a}$ ist demnach aus einen der einzelnen Fälle abgeleitet worden, und zwar am einfachsten aus $x = \infty$ entsprechenden, wo einfach nach Gl. 6. $1 + \frac{r}{a} = \frac{\log 33 - \log \delta}{C.}$,
also weil hier $\delta = 0.CCXII6041$, $\log 33 = 1{,}5185139$, $\log\delta = 0{,}CCXII78112$,
$\log[\log 33 - \log \delta] = \log[213{,}73739] = 2{,}3298895$,
$\log C = \log[0{,}0133639] = 8{,}1259332 - 10$, $1 + \frac{r}{a} = 15993{,}64$; $\frac{r}{a} = 15992{,}64$,
1 e. Meile = 4797,79 e. Fuss wird.

No. 358. S. 563. Der Saturn ist von der Sonne im Mittel entfernt 197VI g. Meilen = 56796IX Zoll und die letzte Zahl ist weit kleiner, als 73907CII.

No. 359. S. 565. Die halbe grosse Axe der Mercursbahn ist = 0,387, wenn die der Erde = 1 gesetzt wird; mithin ihr Verhältniss = 387 : 1000 oder 4,2 : 11 > 3 : 11.

No. 360. S. 566. Für die Venus haben wir das ähnliche Verhältniss = 723 : 1000 = 5 : 7 > 4 : 7.

No. 361. S. 567. Wir müssen bemerken, dass sich für neuere Kometen die Neigung weit grösser ergeben hat, und daher ihre Breite grösser als 40° werden kann. Ferner sind die Grenzen der Zone, innerhalb deren die Planeten sich bewegen, des sogenannten Zodiacus durch die Entdeckungen der kleinen Planeten wesentlich erweitert worden.

No. 362. S. 568. Sind die Tageszeiten Jan. 4 6^h Morgens und Nov. 10. 12^h so gerechnet, wie es früher zu geschehen pflegte, dass nämlich der Anfang des Tages um Mitternacht angenommen wurde; so ist Jan. 4, 6^h Morgens = Jan. 3. 18^h, nach der neuern Anfangszeit des Tages um Mittag,
Jan. 3. $18^h + 16^h$ = Jan. 4. 10^h, d. h. Jan. 4 10^h Abds.
Nov. 10. 12^h Abends = Nov. 10. 12^h und
Nov. 10. $12^h - 16^h$ = Nov. 9. 20^h = Nov. 10. 8^h Morgens nicht 6^h wie im Text.

No. 363. S. 568. Es ist Jan. 4. 10^h — Dec. 7 = Dec. 35,4 — Dec. 7 = $28,^d 4$, Dec. 7. — Nov. 10,3 = Nov. 37 — Nov. 10,3 = 26,7. Jan. 4. 10^h — Dec. 8 = $27,^d 4$, Dec. 8. — Nov. 10,3 = 27,7.

No. 364. S. 569. Nach §. 75. war am 10. Nov. die scheinbare tägliche Bewegung des Kometen = $4^2/_3{}^0$, welcher nach der vierten Columne der Tab. II. der Abstand $347 + \frac{7}{37} \cdot 69 = 360$ entspricht.

No. 365. S. 559. Zur Veranschaulichung dieser Stelle im Text sei die Parabel der Bahn dargestellt mit den drei Oertern vom 10. Nov.,

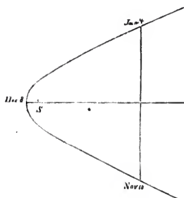


Fig. 285.

8. Dec. und 4 Jan., und dem Punkte S, wo die Sonne sich im Brennpunkte befindet. Die Zeit $27^d\ 16^h\ 4^m$ ist nach Tab. I. 27 16 7, der Unterschied nicht von Belang.

No. 366. S. 570. Aus dem Winkel von 23° folgt der kleinste Abstand $= 1000 \sin 23° = 390{,}7$. Den letztern Werthe entsprechen nach Tabelle I. nicht 34^d wie im Text, sondern 37^d.

Diese Tabelle ist offenbar die modificirte Barker'sche Tafel, mittelst welcher die mittlere Bewegung aus der wahren Anomalie gefunden wird. Diese Tafel ist in dem Werke von Olbers: „Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Kometen aus einigen Beobachtungen zu finden. Weimar 1797", wie auch in der zweiten, von Encke besorgten Ausgabe. Weimar 1847. enthalten.

Nach derselben fallen die im Texte enthaltenen Zahlenwerthe etwas verschieden aus, jedoch sind die Unterschiede nicht von Bedeutung; da nach des Verfassers Bemerkung die ganze Berechnung in diesem Paragraphen nur eine genäherte sein soll.

No. 367. S. 570. Dem Abstande von 122 Theilen entsprachen in Tab. I. $31\frac{1}{2}$, nicht 30 Tage wie im Text.

No. 368. S. 570. Dem Abstande von 350 Theilen entsprechen 37,2, nicht $33\frac{1}{2}$ Tage, und der erstere Unterschied kommt dem Sept. 16 — Aug. 11 = 36 Tage näher.

No. 369. S. 572. Da $SP = \sqrt{SB^2 + BP^2}$, so wird verbessert $SP = \sqrt{SB^2 + (BP + e)^2} = \sqrt{SP^2 + 2\,BP\,e + e^2}$, ferner $SP = \frac{M^2 \cdot N}{OR^2}$,

also verbessert $SP = \frac{M^2 \cdot N}{\left(OR - \frac{TR}{TP}e\right)^2} = \frac{M^2 \cdot N}{OR^2 - 2\frac{OR \cdot TR}{TP}e + \frac{TR^2}{TP^2}e^2}$

Hier steht im Original fälschlich $+ \frac{2\,OR \cdot TR}{TP}e$. Es wird hierauf $\sqrt{SP^2 + 2\,BP \cdot e + e^2} = (SP^2)^{1/2} + \frac{1}{2}(SP^2)^{-1/2} BP \cdot e + \frac{1}{2}(SP^2)^{-1/2} e^2 - \frac{1}{8}(SP^2)^{-3/2}\, 4BP^2 e$ etc. $= SP + \frac{BP}{SP}e + \frac{1}{2}\frac{SP^2 - BP^2}{SP^3}e^2$ etc. $= SP + \frac{BP}{SP}e + \frac{SB^2}{2\,SP^3}e^2$ etc.

$$\frac{M^2N}{OR^2 - 2\,\frac{OR\,.\,TR}{TP}\,e + \frac{TK^2}{TP^2}\,e^2}$$

$$= M^2N\,\left\{(OR^2)^{-1}\;1.\,(OR^2)^{-2}\left(-\frac{2\;OR\,.\,TR}{TP}\,e\right) - 1(OR^2)^{-2}\,\frac{TR^2}{TP^2}\,e^2\right.$$

$$\left. + (OR^2)^{-3}\,4.\,\frac{OR^2\,.\,TR^2}{TP^2}\,e^2\right\}$$

$$= \frac{M^2\,N}{OR^2} + 2\,\frac{TR}{TP}\cdot\frac{M^2\,N}{OR^3}\,e + 3.\frac{TR^2}{TP^2}\cdot\frac{M^2\,N}{OR^4}\,e^2 \text{ etc.}$$

No. 370 S. 575. Das Verhältniss $\sqrt{SP} : \sqrt{Sp}$, ist identisch mit dem $SP : \sqrt{SP\,.\,Sp}$, und dieses geht, wenn es erlaubt ist, statt des geometrischen Mittels $\sqrt{SP\,.\,Sp}$ das arithmetische $\frac{SP + Sp}{2}$ zu setzen, über in $2\;SP : SP + Sp$.



Druck von H. S. Hermann in Berlin.
Commandantenstr. 77-79. (Industriegeb.)



